目　录

第一章　海水的物理性质

人类生活于大气所笼罩的环境之中，所以对大气的性质如气温，大气的运动形式如风等等，都已司空见惯，而且也熟知大气的运动与其物理性质之间有着密切的关系。同样，海水的物理性质也是制约海水各种运动形式的内因。但是，海水温度的变化却比气温小得多，而风速多比海流速度大几十倍；60 多年前在大西洋某些站点深层观测的水温和盐度值，与现今重测的结果惊人地吻合，这都和浩瀚海水的物理性质有密切的关系。然而，面面俱到详细介绍海水的所有物理性质，并不是本章的要求。诸如海洋声学、光学、电磁学等等，业已形成独立的分支，且有各种专著面世，可供读者查阅与深入研讨。鉴于此，本章只介绍海水的最基本的一些物理性质。

§1.1　海洋空间的特点

地球表面积的 71×10^{-2}被海水所覆盖，换言之，海水面积几乎是陆地面积的 2.5 倍。但是海陆分布极不均匀，三分之二的陆地集中在北半球。大洲的面积和形状虽各不相同，却多数有北宽南窄的特点。诸如此类的特点，对海洋环流的影响是不言而喻的，从而对海水的理化乃至生物等特征也有重大的影响。

1.1.1 海洋空间的特点

海洋是一个对立统一体。即使不谈微观，仅就宏观而言，至少下面几对矛盾，对海水性质和运动都有巨大的影响。

1. 广漠与有垠

海洋空间的水平尺度很大，动辄数百、数千乃至10^4km的量级，确非一般的湖泊水面能比拟。尤其在南纬50°附近，环球一周都是海洋；在南北方向上，从北极至南极海域可连绵贯通，难怪人们常用广漠无垠来描述海洋。正因为海洋如此广阔，跨越几个气候带，所以从赤道向两极，海洋的热盐结构与水团特征便大有径庭，这也是大洋热盐环流形成的内因之一。正因为海洋如此广阔，才使得地转效应成为研究海水运动不可忽视的因素，从而导致大洋的潮汐、海流与湖泊、河流迥然不同。也正因为海洋如此广阔，所以在研究海洋时，又常可把边界处理为“无穷远”，从而便于解析求解或数值求解。

当然，实际的海洋绝非无垠。它既被大陆分割成几个相对独立的大洋，在各大洋的边缘部分，又被陆地、半岛、岛屿或岛弧等等，分割为更具自己特征的水域——海和海湾。研究这些水域，当然是有界的。即使对大洋而言，也因为大陆基本上是南北走向，就使各大洋都有相应的西边界和东边界；而在东、西边界海域，海流则发生独特的变化。假如大洋都象环绕南极大陆的南大洋那样没有东、西边界的话，那么，世界大洋的环流就绝不是现今这番景象。

2. 通达与阻隔

世界大洋习惯上分为4部分——太平洋、大西洋、印度洋和北冰洋。这种划分的根据之一是，各大洋都有自身的发展史，又各具独特的形态。但是，前3个大洋在南半球是连在一起的，其分界线只是人为地划定，并无多少科学根据。从图1－1看来，三大洋倒象是绵延一体的南大洋向北伸出的3个大湾，而北冰洋又是大西洋更向北的再伸展。这表明，地球上的4个大洋是彼此连在一起、可以相互通达的一个整体，因此常常称之为世界大洋。世界大洋的各部分既然可以相互通达，其对海水热盐性质及水团环流的影响之大，就可想而知了。

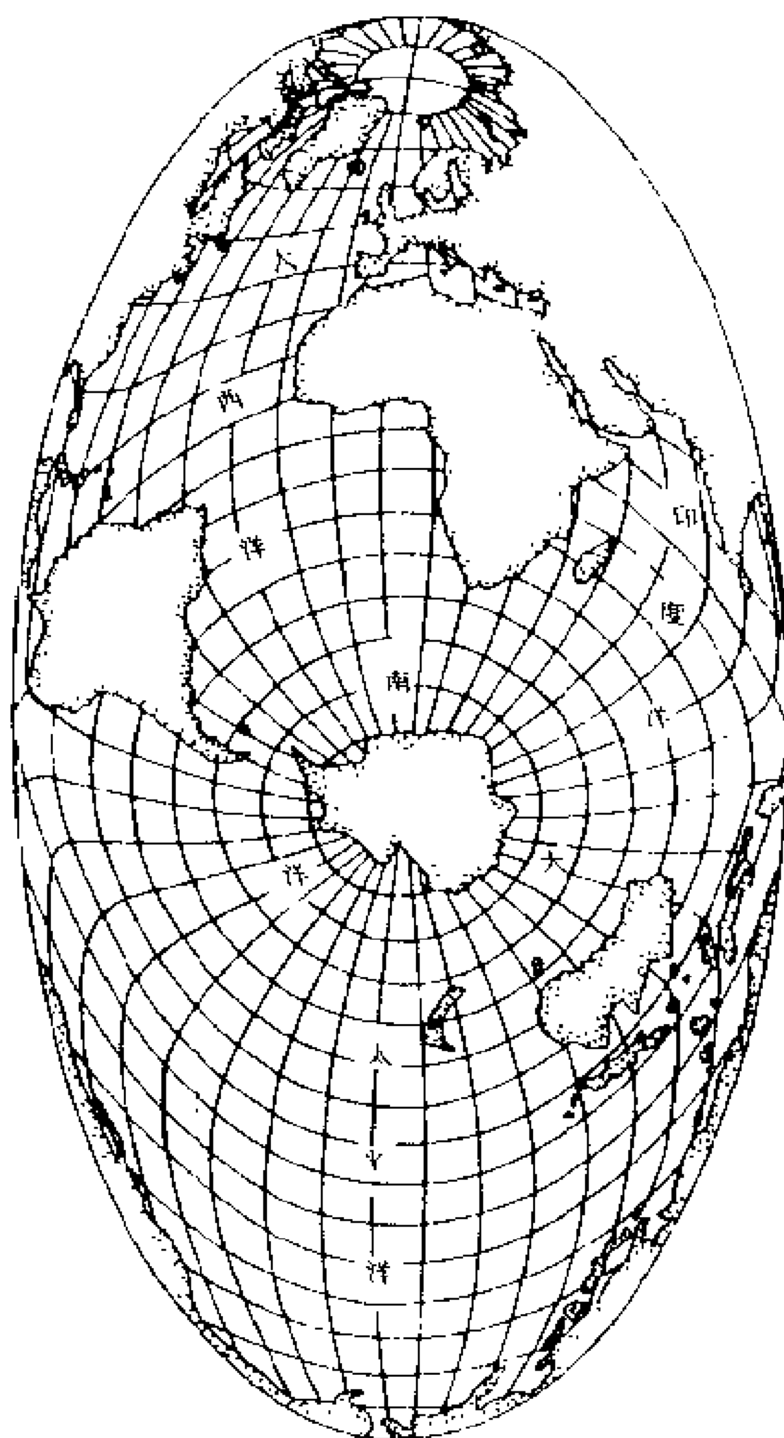


图 1－1 相互通达的世界大洋(据 Tchernia，1980)

然而，世界大洋的各部分，也不全是畅通无阻的。例如，北冰洋与太平洋之间，就仅靠宽度约 80km、深度大多为 18～40m 的白令海峡相通，不言而喻，它们的中层、深层和底层水，彼此就难以沟通。在北冰洋和大西洋之间，虽非狭窄的海峡，但位于两个大洋分界线上的冰岛—法罗岛海脊，也限制了两大洋深层和底层水的交换。在边缘海和内陆海，水交换所受的限

制有时会更大。这种既通达又阻隔的结果，就使得世界大洋的各部分，既有均所具备的共性，又有千变万化的个性和特点。

3.深、厚与浅、薄

全球海洋的平均深度约为 3795m，比陆地的平均高度(875m)大得多。大洋中深逾 6000m 的海沟已发现有 30 多条，超过 10^4m 的海沟也有 5 处之多，最深的马利亚纳海沟可达 11034m，比陆地上最高的珠穆朗玛峰几乎多出 2200m。因此，说海洋深、水层厚，这是名符其实的，而且这也正是海洋水团形成和海洋环流充分发展的必要条件之一。既然如此，在动力海洋学中，在某些情况下把海洋处理为“无限深”，也就不无道理了。

但是，相对于海洋的水平尺度而言，其深度应该说是浅的，海洋的平均深度只不过是地球平均半径的 6×10^{-4}，因而海洋在地球上恰似薄薄的表皮。海洋学中常用的大洋断面图，水平尺度往往都比铅直方向大数千倍，因此无法按实际比例绘图，只得为实用目的而将海洋的深度“夸大”，所以在分析时应予注意。

1.1.2 海洋与周围环境的相互作用

海面是海洋的上界面，海水在此与大气相交接，这是海洋与外界沟通的主要窗口。通过这一窗口，海洋接受了来自太阳的辐射能量，这是海洋，进而也是大气能量的最主要的来源。通过这一界面，海洋与大气圈之间，又进行着物质、动量和能量的交换，从而影响制约着海水性质及海水运动的分布和变化。

海[illegible]洋的下界面，这是海洋与岩石圈的交接面，这里也进行着物[illegible]与能量的交换。尽管从地球内部穿过海底地壳输向海洋的[illegible]海底热流，平均只有$(6.87\pm4.65)\times10^{-2}W/m^2$，但海底火山、大洋中脊、海岭及某些海底深渊等处的海底热泉，对局部海域的影响却不容忽视。例如红海中央的阿特兰蒂斯—Ⅱ号深渊的 2000m 深处，高温高盐卤水层厚达 200m，温度高达 60℃、

盐度高达 310；在 21°N 的东太平洋海隆，热液温度更高，可达(380±30)℃(中国大百科全书，1987)。热液特殊的组分，必然对海水化学成分有影响。海水与海底的物质交换，通过漫长的地质年代，对海水组分所施加的影响，显然也是不可忽视的。如果说海底热液仅影响局部海域的话，那么洋底地形的大尺度的变化，对大洋深层和底层环流的影响则是大范围的，而一些重要的海槛和洋中脊断裂带，又对深、底层水团的分布和海水交换，起了至关重要的作用(详见 § 3.3.3)。

沿岸带是海洋和陆地的过渡带，可视为海洋的侧边界，常有物质经此输入海洋，海洋能量也主要在此耗散。岸线的变化对海流的制约是毋庸置疑的，而岛屿的存在，不仅使海水运动更加复杂化，并且由于使研究海域形成了"多连通域"，从而增加了解析或数值研究的难度，因此成了动力海洋学中倍加关注的问题。

除了上述"有形"的环境影响之外，海洋还处于"无形"的环境因素的影响之中。万有引力场对海洋的作用，既不必通过直接接触，又无时不在无所不至。重力的作用，在海水动能与势能的相互转化中显露其重要性，而天体对海水的引力，则直接对海洋潮汐起着主导作用，天体的引力同样也引起地潮与气潮，它们与海潮之间又发生相互作用及影响。

海洋赖以存在的地球，是一个旋转的球体，这又使海洋处于一个非惯性系统的环境之中。广漠海洋中的大尺度运动和低频运动，受地转效应的影响是极为显著的。从第三章开始，尤在第四章之后，将一再提到它的重要作用。

§ 1.2　水的特性

水对于人类生存繁衍的重要性，已为人们所熟知。我国古代的思想家把水列为"五行"之一，古希腊的先哲有的把水作为"4 元

素”之一，有的甚至认为“水是万物的始基”。随着人类社会的进步、工农业和交通航运的发达，人类更滥向海、湖、河水边聚居，日常生活几乎每时每刻都与水打交道。可能是司空见惯之故，人们似乎觉得水是再普通不过的液态物质了，其实水与其他液态物质相比，性质却是颇为特殊的。这些特殊性质的产生，可用水分子结构的特殊性予以解释。

1.2.1 水分子的结构特殊

在水分子中，假若两个氢原子和氧原子如图1—2那样简单地结合在一起，则正、负电荷的极性可恰好抵消。但是水分子的结构却如图1—3那样是不对称结构，正、负极性不能相互抵消，因而水

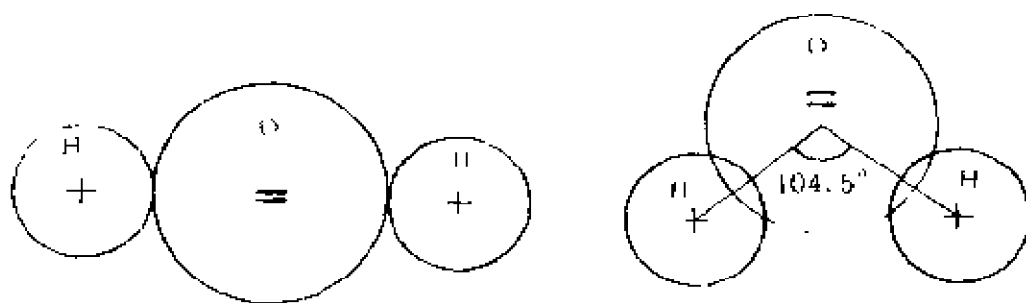


图1—2　氢原子和氧原子的简单配置　　图1—3　水分子的结构

分子是极性分子。这样以来，各水分子又可因极性而互相结合，形成比较复杂的水分子，但水的化学性质并未改变，这种现象称为水分子的缔合。水分子的缔合还与温度的变化有明显的关系，从而导致水与其他液体或其他氧族元素氢化物相比，在性质上多有异常。

1.2.2 水的溶解能力很强

水是一种很好的溶剂，与其他液体如油类等相比，其溶解能力很强。原因是水分子有很强的极性，很容易吸引溶质表面的分子或离子，使之脱离溶质表面而进入水中，继而通过扩散作用进一步在水中散布，形成均匀的溶液。在工农业生产和科学研究中，人们广

泛地使用水制备各种溶液;在日常生活中,人们普遍地用水清洗去污,都是充分利用水的这一特性。世界大洋中的海水,就是水溶解了许多物质的复杂的溶液。正因为海水溶解了多种物质,所以其性质又与纯水大不相同。

1.2.3 水的密度变化有反常

"热胀冷缩"是一般物体的性质,除水之外,其他液体也大都如此。纯水在(3.985±0.005)℃(t_{68},1968年国际实用摄氏温标)以上时,密度随温度的降低而增大;等于该温度时,水的密度最大,ρ_{max}(SMOW)$=\rho^{\circ}=(999.975\pm0.003)\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$(UNESCO,Technical papers in marine science,45,1985);低于该温度时,密度随温度的降低反而减小,即所谓"反常膨胀"。水冻结为冰后体积增大。密度减小,可达916.7kg/m³,因而冰总是浮在水上。进入岩石隙缝的水,结冰后反常膨胀,会对周围产生很大的压力,甚至可达200MPa以上,足以将岩石胀裂。古代的劳动人民曾用此法切割岩石,至今还有些地方仍在沿用这种廉价的方法。

水的密度的上述变化,是由水分子的缔合而造成的。温度低于3.985℃时,有利于水分子缔合;冻结为冰时,这些水分子则全部缔合成一个巨大的分子集合体——分子晶体。由于其晶格结构排列松散,故密度减小。温度从0.01℃升达3.985℃以前,主要过程是较大的缔合分子逐渐离解为较小的缔合分子,因而体积收缩密度增大。高于3.985℃以后,由于水分子的热运动加强,导致体积膨胀,所以密度又随温度升高而减小。这样,就使得纯水在(3.985±0.005)℃(t_{68})时有最大的密度。最大密度的温度记为t(max)或t_{max},因在本书中t又是时间的符号,故记为θ(max)或θ_{max}。相应地,t_{68}也改写为θ_{68}。

1.2.4 水的热性质特殊

同是氧族的氢化物，但 H_2O 与 H_2S、H_2Se 及 H_2Te 比较，热性质却明显的异常。例如比热容和比蒸发潜热等明显的大，特别是熔点和沸点更突出的高。在该族化合物中，一般是随着相对分子质量的增大，熔点和沸点温度相应升高。水却不然，其相对分子质量最小，融点和沸点理应为 -90℃和 -80℃左右(图 1－4)，而实际上却分别高达 0.01℃和 100℃(θ_{68})。其原因就在于，融化或汽化时要离解巨大的缔合分子，需消耗较多的能量。

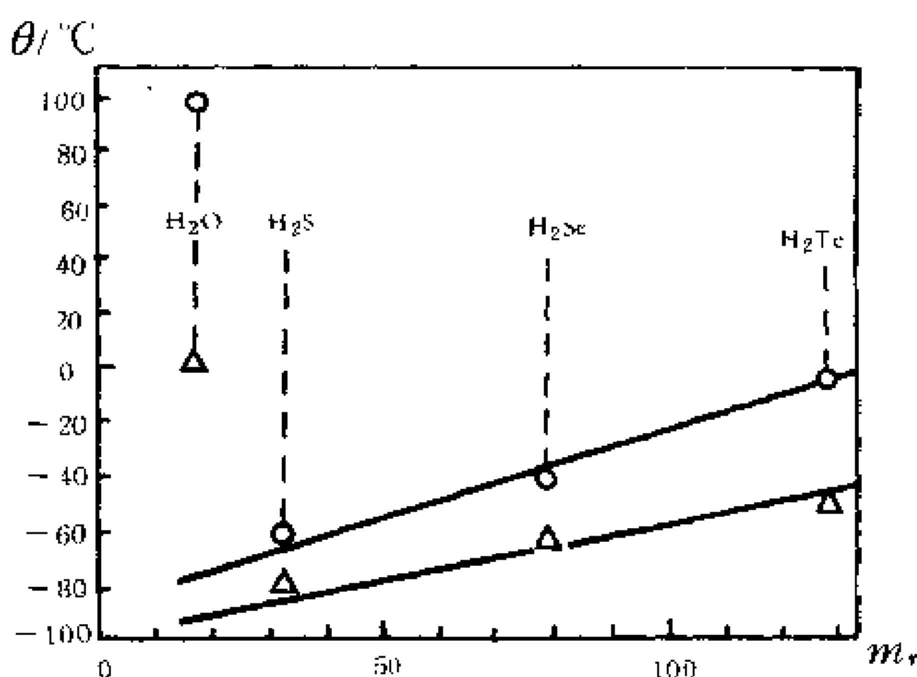


图 1－4 氧族元素氢化物的相对分子质量 m_r 与其沸点(圆圈)、熔点(三角形)的关系

(据友田好文等，1990)

由于国际度量衡委员会 1989 年 9 月决定，采用 ITS－90 温标以取代 1968 年国际实用温标(IPTS—68)，前述各种特征温度的量值也因之有相应的变动。如表 1—1 所示，除在 0℃点之外，θ_{68}和 θ_{90}两者都有差别。在世界大洋的水温变化范围内，两者有关系式

(Saunders P. M., 1990)：

$$\theta_{90} = 0.99976\theta_{68} \qquad (1.2-1)$$

依 ITS－90，水的冰点仍是 0.010℃（θ_{90}），但沸点变为 99.974℃（θ_{90}），而 $\theta(max)$ 变为（3.984±0.005）℃（θ_{90}）。

表 1－1　θ_{68}和 θ_{90}的差值（据 Saunders P. M., 1990）

θ_{90}/℃	−10	0	10	20	30	40
($\theta_{90}-\theta_{68}$)/℃	0.002	0.000	−0.002	−0.005	−0.007	−0.010

§1.3　海水的盐度

世界上液态的纯水数量不多，自然存在的淡水也不纯净，其中往往溶有其他物质。海水则更甚，它溶解了多种无机盐类、有机物质和气体，而且含有悬浮物质，海水中的元素可达 80 多种。溶解物质中，尤以氯化钠含量最多，致使海水带有咸苦味。为了描述海水含盐的浓度，1865 年 Forchhammer 引用了"盐度（*salinity*）"一词。随着海洋研究的逐步深入，发现海洋中的许多现象和过程，都与盐度的分布和变化息息相关，从而对盐度的确切定义和精确测定提出了更高的要求。许多海洋学家为此做出了贡献，例如克努曾（K[illegible]sen M. H. C.）等在本世纪初对海水氯度和盐度定义的探讨与[illegible]定，在考克斯（Cox R. A.）等人研究基础上，60 年代对盐度的再定义以及 1978 年实用盐度标度（PSS78）的提出，就是最具代表性的成果。根据联合国教科文组织（UNESCO）、国际海洋考察理事会（ICES）、海洋研究科学委员会（SCOR）和国际海洋物理科学协会（IAPSO）的联合通告，于 1982 年 1 月 1 日起采用 1978 年实用盐度标度和 1980 年新的国际海水状态方程，从而取代了以前的方法、公式和表格（UNESCO，1981a－d）。

为了尽可能而有效使用历史的氯度及盐度资料，简要介绍盐度定义的演化以及新旧资料的转换方法，是很有必要的。

1.3.1 盐度的首次定义

1902年在克努曾的领导下，提出了测定盐度的一种方法，据此把海水盐度定义为："1kg海水中的溴和碘全部以当量的氯置换，碳酸盐全部转换成氯化物，有机物全部氧化之后，所得固体物质的总克数"，单位是g/kg，符号为‰。

显然，按上述定义测定盐度，既繁杂费时又不便于海上操作。为应用方便，遂根据采自北海、波罗的海、红海等的9个表层水样，测定它们的氯度和盐度，基于海水组成恒定性规律，归纳出用氯度方便地计算盐度的公式：

$$S‰ = 0.030 + 1.8050Cl‰ \qquad (1.3-1)$$

式中氯度Cl‰可以用$AgNO_3$滴定法较快地测定。氯度的定义也是克努曾等于1902年提出的：1kg海水中以氯置换溴和碘后，氯离子的总克数称为氯度，单位g/kg，记为Cl‰。后来发现，由于相对原子质量的测定值的变化，会影响氯度的量值，因而1940年对氯度重新定义：沉淀0.3285234kg海水中的全部卤素所需纯银的总克数(中国大百科全书，1987)。

1.3.2 盐度的重新定义

依式(1.3—1)计算盐度的确方便，故一直延续使用到60年代。但人们也发现了许多问题，例如当氯度为0时，盐度值大于0，显然不合理；再者，公式建立的基础——海水组成恒定性，本身就不够严格；而所用水样又以波罗的海的表层水居多，难以代表整个世界大洋的普遍规律。于是，上述4个国际组织发起，成立了海水状态方程式联合小组，后改为"海洋用表与标准联合专家小组"(JPOTS)，经多次讨论研究之后，为保持历史资料的统一性，将盐

度公式改为(Wooster *et al*,1969):

$$S‰ = 1.80655 Cl‰ \qquad (1.3-2)$$

显见,当 Cl‰=19.355‰时,上二式计算的盐度值均为 34.965‰;当氯度大于此值时,后者计算的盐度值稍大;在低盐时,二式计算结果差别也大。

50 年代以来,由于电导盐度计研究的不断发展,不仅使盐度测定方法简化,而且精度大为提高。考克斯等(Cox R. A. *et al*, 1967)对由大洋和不同海区不深于 100m 水层内采集的 135 个水样,准确地测定其氯度值,按上式计算盐度值,并且测定了电导比 R_{15},得出盐度 $S‰$与电导比 R_{15}有关系式:

$$S‰ = -0.08996 + 28.29720R_{15} + 12.80832R_{15}^2 - 10.67869R_{15}^3 + 5.98624R_{15}^4 - 1.32311R_{15}^5 \qquad (1.3-3)$$

式中 R_{15}是在 15℃和“一个标准大气压”(为忠实于原文,暂未按 UNESCO,NO. 45 规定改为 P_a)① 下水样与 S=35.000‰的标准海水的电导率的比值。依此可使测盐精度达±0.003‰,而测定速度快 4~5 倍。鉴于此,1969 年 JPOTS 推荐该式为海水盐度新定义。然而,从上述定义的由来可知,它既仍然依赖于氯度滴定,又以海水组成恒定性为前提。应该指出,氯度的测定只与海水中的特定离子相对应,而电导率的测定却与海水中的所有离子都有关,这显然是其不足之处。再者,与此定义相匹配的国际海洋常用表(UNESCO,1966),温度范围只包括(10~31)℃,即低于 10℃时也不能查算,所以仍有必要改进。

1.3.3 1978 年实用盐度标度(the Practical Salinity Scale,1978

实用盐度标度彻底摆脱了氯度,而只依赖于电导方法测定。然

---

① 依 UNESCO,NO. 45,1985.“一个大气压”或“标准大气压”均应改为 101325Pa,即 p^0=101325Pa。

而，海水的绝对电导率很难测定，于是选用一种精确测定的氯化钾(KCl)溶液，作为可再制的电导标准，根据水样相对于KCl溶液的电导比来确定该水样的盐度值。海水的绝对盐度 S_A——海水中溶质的质量与海水质量的比值——是不能直接测定的，而它与用上述方法测定的盐度 S 显然有差别。因而将 S 称为实用盐度标度，简称为实用盐标或实用盐度，记为PSS78。二者的关系为 $S_A=a+bS$，对于标准海水，有 $a=0, b=1.00488$；对大洋水也可视 $a=0$；但海水成分变化时，系数 a、b 亦随之有变化。

实用盐标的计算式为(Lewis，1980)：

$$S=\sum_{i=0}^{5}a_iK_{15}^{i/2} \qquad (2\leqslant S\leqslant 42) \qquad (1.3-4)$$

式中 $a_0=0.0080$，$a_1=-0.1692$，$a_2=25.3851$，$a_3=14.0941$，$a_4=-7.0261$，$a_5=2.7081$；$\sum_{i=0}^{5}a_i=35.0000$；$K_{15}$ 是在15℃和101325Pa压力下水样的电导率 $C(S,15,0)$ 与标准KCl溶液(质量比为 32.4356×10^{-3})的电导率 $C_{KCl}(32.4356,15,0)$ 的比值("大气压下"指在海面处，即海压为0，故在 $C(S,\theta,p)$[①] 中 p 的位置上写0)；当 $K_{15}=1$ 时，S 恰等于35。依新规定不再使用符号"‰"，可见实用盐度值是旧定义盐度值的1000倍。

UNESCO，ICES，SCOR和IAPSO采纳了JPOTS的建议，并出版了"国际海洋常用表"，表中也附有计算实用盐度的方法，读者可参看UNESCO的海洋科技文件NO. 36，37，39；在NO. 44中(UNESCO，1983)，给出了电导率—实用盐度转换的标准化计算程序(FORTRAN语言)、图表和实例。

至于氯度，已视为和实用盐度无关的一个独立变量，1979年

---

① 传统记法是写为 $C(S,T,p)$，现改为 $C(S,\theta,p)$。严格说来，按SI规定，符号 p 是表示在海洋中某一点的总压力：$p=p_0+p_w$，其中 p_0 是海面上的大气压力，p_w 是海水的压力，但在海洋学中，长期以来习惯着眼于"海洋本身"，视海面压力为0，即把 p_w 写为 p。为书写方便，本书仍沿用此习惯写法。

IAPSO 所属的物理海洋学符号、单位及术语工作组建议将氯度改为："沉淀海水样品中含有的卤化物所需纯标准银(原子量银)的质量与海水质量之比值的 0.3285234 倍"。以符号"Cl"表示氯度，并以 10^{-3} 代替原符号中的‰。此建议已被 IAPSO 采纳。

1.3.4 实用盐度标度的计算

依实测电导比计算实用盐标，可分三种情况：

1. 若盐度测量仪器带有 15℃(±0.001℃)恒温槽，可测定 R_{15}，即用 R_{15} 代替 K_{15} 依式(1.3—4)计算实用盐度 S。若备有 PSS78 的用表(Ⅰ$_a$)，则可直接查表得出 S 值。

2. 若盐度测量仪器不带恒温槽，测出的是 R_θ，则计算公式为：

$$S = \sum_{i=0}^{5} a_i R_\theta^{i/2} + \Delta S \qquad (1.3-4')$$

式中 a_i 的值同式(1.3—4)，而 ΔS 是温度 θ 不等于 15℃引起的盐度修正项：

$$\Delta S = \frac{\theta - 15}{1 + K(\theta - 15)} \sum_{i=0}^{5} b_i R_\theta^{i/2} \qquad (1.3-5)$$

其中 θ 为海水温度，公式适用的温度范围为 $-2 \sim 35$℃(θ_{68})，

$K = 0.0162$，$b_0 = 0.0005$，$b_1 = -0.0056$，$b_2 = -0.0066$，

$b_3 = -0.0375$，$b_4 = 0.0636$，$b_5 = -0.0144$，且 $\sum_{i=0}^{5} b_i = 0.0000$。适用盐度范围是 2～42，已制成表格供查，也可用 UNESCO(NO. 44.1983)的标准程序计算。

3. 由 CTD 从现场测得的电导比 R，必须经过处理才能求得盐度。R 可分解为

$$R = R_p(S,\theta,p) \cdot R_\theta(S,\theta) \cdot \gamma_\theta(\theta)$$
$$= \frac{C(S,\theta,p)}{C(S,\theta,0)} \cdot \frac{C(S,\theta,0)}{C(35,\theta,0)} \cdot \frac{C(35,\theta,0)}{C(35,15,0)} \qquad (1.3-6)$$

显然有

$$R_t = R/(R_p \cdot r_t) \qquad (1.3-7)$$

式中 R_p 体现了压力[1] 的影响：$R_p = C(S,\theta,p)/C(S,\theta,0)$，可由下式给出：

$$R_p = 1 + (kp)[e_1 + e_2(kp) + e_3(kp)^2] \times [1 + d_1\theta + d_2\theta^2 + (d_3 + d_4\theta)R]^{-1}$$

$$(1.3-8)$$

在珀金和刘易斯的原文中(Perkin and Lewis，1980)压力 p 的单位用的是分巴(dbar)，式中 p 前因数 k 为 1；依 SI(UNESCO，NO. 45，1985)，p 的单位应改为帕(Pa)，则 p 前的匹配因数 $k = 10^{-4}$。而

$e_1 = 2.070 \times 10^{-5}$，$e_2 = -6.370 \times 10^{-10}$，

$e_3 = 3.989 \times 10^{-15}$，$d_1 = 3.426 \times 10^{-2}$，

$d_2 = 4.464 \times 10^{-4}$，$d_3 = 4.215 \times 10^{-1}$，

$d_4 = -3.107 \times 10^{-3}$。

电导比 r_t 体现温度的影响：$r_t = C(35,\theta,0)/C(35,15,0)$，可由下式给出：

$$r_t = c_0 + c_1\theta + c_2\theta^2 + c_3\theta^3 + c_4\theta^4 \qquad (1.3-9)$$

其中

$c_0 = 0.6766097$，$c_1 = 2.00564 \times 10^{-2}$，$c_2 = 1.104259 \times 10^{-4}$，$c_3 = -6.9698 \times 10^{-7}$，$c_4 = 1.0031 \times 10^{-9}$，温度适用范围为 -2～35℃。

于是，可依式(1.3-7)求得 R_t。在UNESCO，NO. 44(1983)中，已公布标准计算程序，并有相应的表格可查。有些CTD已配有转换程序，由探头所测的温度、压力、电导率，可直接计算并输出实用盐度值。

---

[1] 若不指明为“大气压”、“标准大气压”或“101325Pa”，按海洋学中的习惯用法，“压力”就是指“海压”p。

1.3.5 使用盐度历史资料时应注意的问题

新旧盐度不仅有1000倍的差别，而且因不同年代使用的盐度定义不同，也使盐度值的计算产生了误差。为了最大限度地发挥历史资料的作用，又能使之与现今的资料可比较，建议考虑如下做法。

1. 对于1966年以后的资料，若盐度值在33～37的范围(世界大洋99×10^{-2}的海水，盐度值在此范围之内)时，用UNESCO和英国国立海洋研究所(NIO)1966年联合颁布的"国际海洋常用表"，与使用PSS78常用表，两者差值不超过±0.01。现今海洋调查用的CTD系统，所能达到的实用精度也不过如此，因而无论是室内还是现场资料，都可以直接引用。

2. 如果需要重新计算，可用下述方法：

1). 核实原始观测数据，按PSS78定义式(1.3—4)、(1.3—4')重新计算；

2). 用刘易斯—珀金方法。他们在"1978实用盐标：现有数据的转换"(Lewis E. L.，R. G. Perkin，1981)一文中给出了修正表，并介绍了$\triangle K$及$\triangle S$转换方法，其方便之处是不要求知道原始数据对应的电导率值，故实用价值高。具体作法可查作者原文。

3). 对于1966年以前的资料，最好先用式(1.3—2)算出盐度，再查1966年国际海洋常用表，求出R_{15}后代替K_{15}用式(1.3—4)计算实用盐度。尽管这种转换不符合PSS78定义，会带来误差，但通常不超过±0.03；而当盐度在25～38范围之内时，误差可减少到±0.001以内，因而有一定的使用价值。

回顾海水盐度的初始含意，看来它更应该属于海水化学的范畴。然而，海水却因为有了"盐度"，性质诸多异常，海水运动也迥异特殊，致使盐度成了物理海洋学中的重要参数。也正因为它重要，

所以克努曾等学者毕生研究它，而 JPOTS 经深入讨论后，不仅否定了从海洋学中取消盐度的动议，而且组织更多国家的海洋研究机构和专家反复研讨屡予定义(UNESCO,NO. 37,1981b)，使它成为海洋学中一个独立而十分重要的物理量。

§1.4 海水的热性质

海水的热性质，一般指海水的热容、比热容、绝热温度梯度、位温、热膨胀及压缩性，热导率以及比蒸发潜热等等。它们都是海水的固有性质，是海水的温度、盐度、压力和密度的函数。通过实验可以测定它们的量值，根据热力学关系或统计学方法也可以对它们进行计算。海水的主要成分虽然是"水"，但它的热性质却和纯水有很大的差别，而且位于不同海域或不同深处的海水，其热性质也大有径庭。这又是造成海洋有诸多特异之处的原因之一。

1.4.1 热容和比热容

海水温度升高 1K 时所吸收的热量，称为海水的热容(*heat capacity*)，若海水热量增加 dQ(J)，水温升高 dT(K)，则热容为

$$C = dQ/dT \qquad (1.4-1)$$

单位记作"焦·开$^{-1}$"(J/K)。热容量除以海水的质量，得单位质量海水的热容，即海水的比热容(*Specific heat capacity*)，单位是"焦/(千克·开)"，符号为 $J \cdot kg^{-1} \cdot K^{-1}$。显见，海水的热容与海水的质量成正比，而比热容则只与海水自身的性质有关。海水的比热容一般又分为比定压热容(*Specific heat capacity at constant pressure*)和比定容热容(*Specific heat capacity at constant volume*)两种，分别记为 c_p 和 c_V，海洋学中最常使用的是前者。

c_p 和 c_V 都是海水温度、盐度和压力的函数。国际实用温标的改变，会导致比热容计算值的少许变化，因为在不同的温标中，1℃

间隔是不同的。例如，对 θ_{48}和 θ_{68}而言，在 0℃时有

$$\frac{d\theta_{48}}{d\theta_{68}} = 1.00044$$

至于 θ_{68}和 θ_{90}的关系，可参见式(1.2—1)和式(1.6—16)。但是，实用温标改变后的差值，与 c_p 计算的精度差不多，而对于计算位温的影响不超过 4×10^{-4}℃，所以一般可忽略不计。

由于比热容在海洋学中具有重要意义，因而许多海洋学家对 c_p 的计算进行了深入的研究。其中，米勒罗等(Millero *et al*, 1973 a, b)的贡献较大，他们给出的经验公式已被 UNESCO 采纳(UNESCO, NO. 38, 1981c)，其形式为

$$c_p(S,\theta,0) = c_p(0,\theta,0) + AS + BS^{3/2} \qquad (1.4-2)$$

式中

$$c_p(0,\theta,0) = 4217.4 - 3.720283\theta_{68} + 0.1412855\theta_{68}^2 - 2.654387\times10^{-3}\theta_{68}^3 + 2.093236\times10^{-5}\theta_{68}^4$$

$$A = -7.643575 + 0.1072763\theta_{68} - 1.38385\times10^{-3}\theta_{68}^2$$

$$B = 0.1770383 - 4.07718\times10^{-3}\theta_{68} + 5.148\times10^{-5}\theta_{68}^2$$

该式的适用范围是水温 0～35℃(θ_{68})，盐度 0～40，标准差为 0.5J/(kg·K)(亦可记为 J·kg·℃$^{-1}$，因“K”可用“℃”代替)。

依式(1.4—2)可计算气压为 101325Pa 时海面的比热容 c_p，据计算结果可绘出图 1—5。由图可直观地看出，在不同盐度值下 c_p 随温度变化的情况。淡水($S=0$)的 c_p 随温度的升高而减小，低盐海水在低温时亦然。但当盐度增大时，其随温度的变化情况却益趋复杂。大致规律是：盐度为 30～35 的海水在 5～35℃(θ_{68})范围内，c_p 值随温度的升高而增大；但温度高于 35℃(θ_{68})之后，c_p 又再缓慢地减小。

比定压热容 c_p 随压力的增大而减小，依 UNESCO(NO. 44, 1983)并考虑到 SI 的规定(UNESCO, NO. 45, 1985)，可写为如下的多项式：

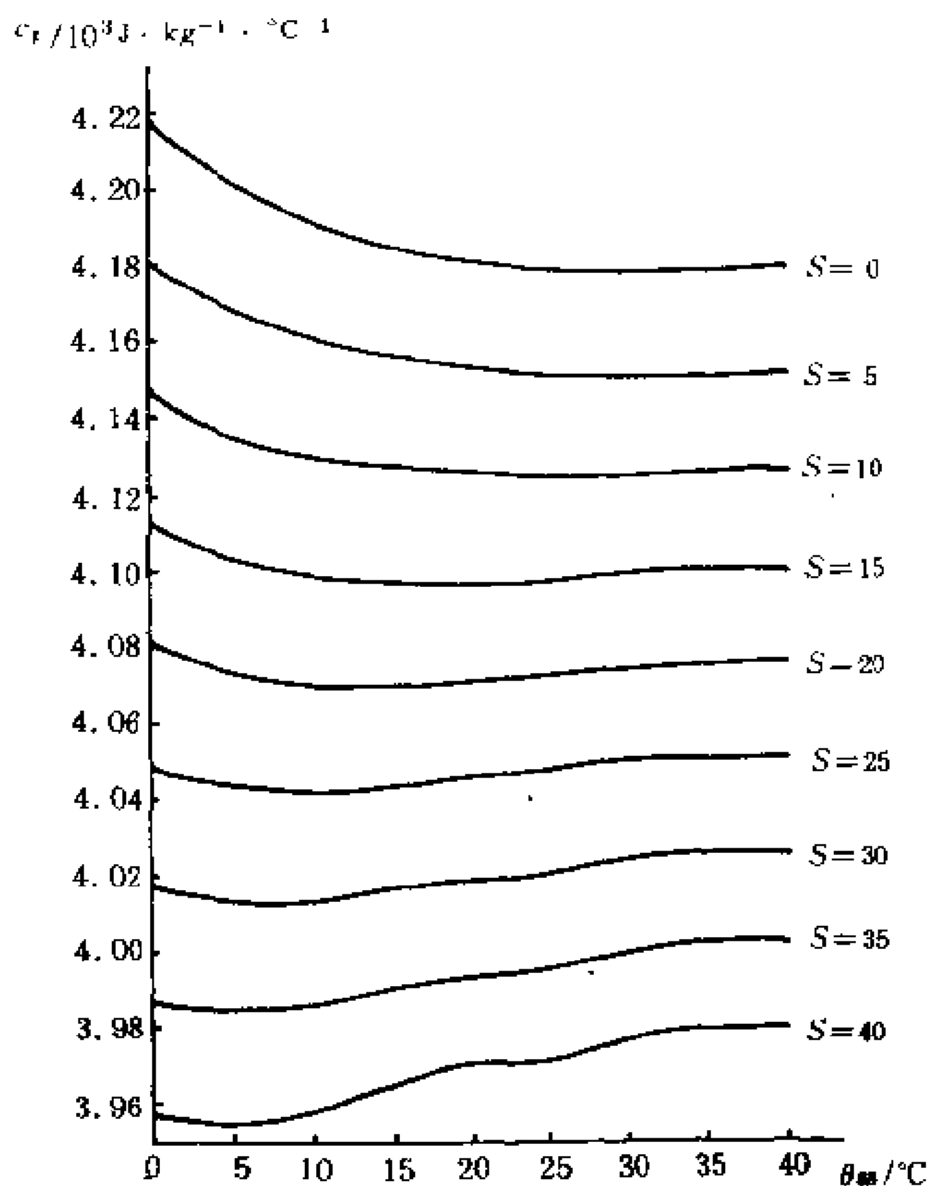


图 1—5 气压为 101325Pa 时海面不同盐度海水的比热容 c_p 随温度的变化

$$c_p(S,\theta,p) = c_p(S,\theta,0) + \triangle_1 c_p(0,\theta,p) + \triangle_2 c_p(S,\theta,p) \tag{1.4-3}$$

对于 $S=0$，有多项式

$$\triangle_1 c_p(0,\theta,p) = (a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + a_4\theta^4)(np)$$

$$+ (b_0 + b_1\theta + b_2\theta^2 + b_3\theta^3 + b_4\theta^4)(np)^2$$

$$+ (c_0 + c_1\theta + c_2\theta^2 + c_3\theta^3)(np)^3 \qquad (1.4-3')$$

式中

$a_0 = -4.9592 \times 10^{-1}$, $a_1 = 1.45747 \times 10^{-2}$,

$a_2 = -3.13885 \times 10^{-4}$, $a_3 = 2.0357 \times 10^{-6}$,

$a_4 = 1.7168 \times 10^{-8}$; $b_0 = 2.4931 \times 10^{-4}$,

$b_1 = -1.08645 \times 10^{-5}$, $b_2 = 2.87533 \times 10^{-7}$,

$b_3 = -4.0027 \times 10^{-9}$, $b_4 = 2.2956 \times 10^{-11}$;

$c_0 = -5.422 \times 10^{-8}$, $c_1 = 2.6380 \times 10^{-9}$,

$c_2 = -6.5637 \times 10^{-11}$, $c_3 = 6.136 \times 10^{-13}$

对于 $S>0$，有多项式

$$\triangle_2 c_p(S,\theta,p) = [(d_0 + d_1\theta + d_2\theta^2 + d_3\theta^3 + d_4\theta^4)S + (e_0 + e_1\theta + e_2\theta^2)S^{3/2}](np)$$

$$+ [(f_0 + f_1\theta + f_2\theta^3 + f_3\theta^2)S + (g_0)S^{3/2}](np)^2$$

$$+ [(h_0 + h_1\theta + h_2\theta^2)S + j_1\theta S^{3/2}](np)^3 \qquad (1.4-3'')$$

式中

$d_0 = 4.9247 \times 10^{-3}$, $d_1 = -1.28315 \times 10^{-4}$,

$d_2 = 9.802 \times 10^{-7}$, $d_3 = 2.5941 \times 10^{-8}$,

$d_4 = -2.9179 \times 10^{-10}$; $e_0 = -1.2331 \times 10^{-4}$,

$e_1 = -1.517 \times 10^{-6}$, $e_2 = 3.122 \times 10^{-8}$;

$f_0 = -2.9558 \times 10^{-6}$, $f_1 = 1.17054 \times 10^{-7}$,

$f_2 = -2.3905 \times 10^{-9}$, $f_3 = 1.8448 \times 10^{-11}$;

$g_0 = 9.971 \times 10^{-8}$; $h_0 = 5.540 \times 10^{-10}$,

$h_1 = \quad 1.7682 \times 10^{-11}$, $h_2 = 3.513 \times 10^{-13}$,

$j_1 = -1.4300 \times 10^{-12}$

在上述各式中，S 为实用盐标，适用范围为 0～40。温度 θ 为 θ_{68}，若改为 θ_{90}，可依式(1.2—1)或式(1.6—16)变换。p 为海压，米勒罗等人原文用的单位是“巴”(bar)，因数 $n=1$；改依国际标准单

位制(SI)，p 的单位用 Pa，所以乘匹配因数 $n=10^{-5}$。

表 1—2 是依上述各式计算的部分结果，c_p 随压力增大而减小的特点是显而易见的。由表还可看出，盐度相同时压力对 c_p 的影

表 1—2 海水的比热容 c_p（c_p/J·kg^{-1}·℃$^{-1}$）（据 UNESCO，1983）

S	p/(10^7Pa) \ θ_{68}/℃	0	10	20	30	40
25	0	4048.4	4011.8	4044.8	4049.1	4051.2
	1	4011.5	4012.9	4020.2	4026.9	4031.8
	2	3978.0	3986.3	3997.4	4006.2	4013.6
	3	3947.8	3962.0	3976.2	3986.9	3996.7
	4	3920.6	3939.8	3956.7	3968.9	3980.9
	5	3896.3	3919.6	3938.6	3952.0	3966.1
	6	3874.4	3901.1	3921.9	3936.3	3952.4
	7	3854.9	3884.3	3906.5	3921.7	3939.5
	8	3837.4	3869.0	3892.2	3907.9	3927.6
	9	3821.8	3855.1	3879.0	3895.1	3916.4
	10	3807.7	3842.3	3866.7	3883.0	3905.9
30	0	4017.2	4013.8	4019.1	4024.7	4027.2
	1	3982.1	3986.2	3995.4	4003.2	4008.4
	2	3950.3	3960.8	3973.3	3983.1	3990.8
	3	3921.6	3937.6	3953.0	3964.3	3974.4
	4	3895.7	3916.3	3934.1	3946.9	3959.1
	5	3872.5	3897.0	3916.7	3930.6	3944.9
	6	3851.7	3879.3	3900.6	3915.3	3931.7
	7	3833.1	3863.3	3885.7	3901.1	3919.3
	8	3816.5	3848.7	3872.0	3887.8	3907.9
	9	3801.6	3835.4	3859.2	3875.4	3897.1
	10	3788.2	3823.2	3847.4	3863.6	3887.1

(续表 1—2)

35	0	3986.5	3986.3	3993.9	4000.7	4003.5
	1	3953.3	3959.9	3970.9	3979.7	3985.2
	2	3923.1	3935.7	3949.6	3960.2	3968.2
	3	3895.9	3913.5	3930.0	3942.0	3952.3
	4	3871.3	3893.2	3911.8	3925.1	3937.6
	5	3849.3	3874.7	3895.0	3909.2	3923.9
	6	3829.5	3857.9	3879.5	3894.5	3911.1
	7	3811.8	3842.6	3865.2	3880.7	3899.3
	8	3796.0	3828.7	3851.9	3867.8	3888.2
	9	3781.8	3816.0	3839.7	3855.7	3877.9
	10	3769.1	3804.4	3828.3	3844.3	3868.3
40	0	3956.4	3959.3	3968.9	3977.0	3980.1
	1	3925.0	3934.1	3946.8	3956.6	3962.3
	2	3896.4	3910.9	3926.2	3937.6	3945.8
	3	3870.6	3889.8	3907.2	3919.9	3930.5
	4	3847.4	3870.4	3889.7	3903.4	3916.2
	5	3826.4	3852.8	3873.5	3888.1	3903.0
	6	3807.7	3836.7	3858.6	3873.8	3890.7
	7	3790.9	3822.2	3844.8	3860.4	3879.3
	8	3776.0	3808.9	3832.0	3847.9	3868.7
	9	3762.6	3796.9	3820.2	3836.1	3858.8
	10	3750.6	3785.9	3809.3	3825.1	3849.5

响，低温时比高温更明显。例如 $S=35$ 的海水，在 0℃时压力由 0 增至 10^7Pa，c_p 减少 33.2J/(kg · ℃)，而在 30℃时 c_p 仅减少21.0J/(kg · ℃)。温度相同时压力对 c_p 的影响，低盐时比高盐要大一些。

比定容热容 c_V 的量值比 c_p 略小，一般而言 c_p/c_V 为 1～1.02(友田好文、高野健三，1990)。

海水比热容之大，在所有固体和液体物质中是名列前茅的。世界大洋的海水总量约 $1370\times10^6 km^3$，其热容量之大不言而喻。从热量的传输来看，它对气温变化的影响，无论如何是不能低估的；海洋性气候优于大陆性气候，也与此有很大关系。大气的比热容小，气温易骤升剧降；陆地的比热容既小，且升降温仅在薄薄的地表层进行，故温度变化更为剧烈。海洋则不然，海水的比热容既大，且因混合效应能涉及相当厚的水层，所以海水温度的变化比较和缓，总体平均变化速度，至少比大气小 3 个量级。

1.4.2 体积热膨胀

在海水温度高于 $\theta(\max)$ 的情况下，若海水再吸收热量，除了会增加海水自身的内能之外，还会发生体积膨胀。在恒压定盐条件下，当温度升高 1K 时，单位体积海水的体积的增量，称为体积热膨胀系量（*cubic thermal expansion coefficient*）或热膨胀率（*thermal expansibility*）：

$$\alpha_V = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p,S} \qquad (1.4-4)$$

其单位是"开$^{-1}$"(K^{-1})。式中 V 是海水的体积，T 为热力学温度，$T/K = 273.15 + \theta_{90}/℃$。米勒罗等已根据国际海水状态方程（见§1.6）给出了计算 α_V 的经验公式。表 1—3 中最下面的一行，即引用其计算结果。

海水的体积热膨胀系量比纯水的大，并且随水温和盐度的升高而增大。由表 1—3 还可看出，在低温低盐时 α_V 为负值，此即海水反常膨胀的表现。α_V 由负值变为正值之时的温度，就是 $\theta(\max)$，该温度值随海水盐度的增大而降低。对盐度显著大于 0 的外海水，有如下的经验公式（友田好文，高野健三，1990）：

$$\theta(\max) = 3.95 - 2.0\times10^{-1}S - 1.1\times10^{-3}S^2 + 0.2\times10^{-4}S^3 \qquad (1.4-5)$$

表 1—3 在气压为 101325Pa 条件下海水的体积热膨胀系量($\alpha_V/10^{-6}K^{-1}$)

θ_{68}/℃ \ S	0	10	20	30
0	−67	88	207	303
10	−30	113	222	314
20	5	136	237	324
30	36	157	251	332
35	51.5	166.8	257.0	333.9

(S = 0–30 各行标注:引)

注:据友田好文、高野健三(1990)。

在液态物质中,海水的体积热膨胀系量是比较小的,因而由温度变化所引起的海水密度的变化,就不太显著。继而由此而产生的压力梯度也较小,于是由水平温度梯度而产生的海水的运动也比较弱。这是制约海水运动速度远小于空气的因素之一。值得注意的是,海水的体积热膨胀系量随压力的增大而增大,尤其是在低温时更为明显。例如盐度为 35 的海水,若温度为 0℃,在 1000m 深处(海压约为 10.1MPa)的体积热膨胀系量,比在海面的值大 60×10^{-2},而温度为 20℃时,则仅大 4×10^{-2}。由于高纬海域的水温比低纬海域低得多,因而上述影响在高纬海域更显著。

1.4.3 压缩性、绝热变化及位温

1. 海水的压缩性

单位体积的海水,当压力增加 1Pa 时,其体积的负增量称为压缩系量,若海水微团在被压缩时,因和周围海水有热量交换而得以维持其水温不变,则称为等温压缩。定盐条件下的等温压缩系量

为：

$$\kappa_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{T,S} \qquad (1.4-6)$$

单位为"帕$^{-1}$"(Pa^{-1})，式中 V 为海水的体积，p 为压力。

假如海水微团在被压缩的过程中，与外界没有热量的交换，则称为绝热压缩。定盐条件下的绝热压缩系量为

$$\kappa_\eta = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{\eta,S} \qquad (1.4-7)$$

海水的压缩系量随水温、盐度和压力的增大而减小。与其它液体相比，海水的压缩系量是较小的，一般小于 $4.6\times10^{-10}Pa^{-1}$，仅在低温、低盐、低压时才大于 $4.7\times10^{-10}Pa^{-1}$。与海水的体积热膨胀系量较小相应，这也是导致海水运动速度较小的原因之一。鉴于压缩性小，故在动力海洋学中为简化求解，常把海水视为不可压缩流体。然而在海洋声学中，压缩系量却是重要的参数。再者，若考虑到世界大洋的水很深(§1.1)，其压缩之量就相当可观了。据估算，若海水果真"不可压缩"的话，那么海平面将比现今高 30m 左右。

2. 绝热变化

由于海水的压缩系量不为 0，故当某一海水微团在海洋中有铅直位移时，因其所处深度变化导致压力不同，就会使其体积发生相应的变化。在绝热变化时，海水微团下沉压力增大使其体积缩小，外力对海水微团作的功，增加了海水微团的内能，导致其温度升高；反之绝热上升时体积膨胀，则消耗自身内能而导致降温。海水温度在绝热变化过程中随压力的变化称为绝热温度梯度(*Adiabatic temperature gradient*)，也有人称为绝热递减率(*adiabatic lapse rate*)。依 SI 及 UNESCO(NO. 45, 1985)，绝热温度梯度可用下式计算：

$$\Gamma = \alpha_V g T / c_p \qquad (1.4-8)$$

式中 α_V 为体积热膨胀系量，c_p 为比定压热容，g 为重力加速度，T

为热力学温度。由于海洋中的现场压力与水深有关，所以Γ的单位也可以用“开[尔文]每米”(K/m)。

Γ是温度、盐度和压力的函数，$\Gamma=\Gamma(S,\theta,p)$，可以通过状态方程和比热容来计算(Bryden，1973)，也可以直接测量(Caldwell and Eide，1980)。前者提出的多项式的计算结果，与依1980年国际海水状态方程(§1.6)得出的值相当一致，因而已被采纳(UNESCO，NO.44，1983)。考虑到SI的规定，可将其写成如下形式：

$$\begin{aligned}\Gamma(S,\theta,p) = & a_0 + a_1\theta + a_2\theta^2 + a_3\theta^3 + (b_0 + b_1\theta)(S-35) \\ & + [c_0 + c_1\theta + c_2\theta^2 + c_3\theta^3 + (d_0 + d_1\theta) \\ & (S-35)](kp) + (e_0 + e_1\theta + e_2\theta^2)(kp)^2\end{aligned} \tag{1.4-9}$$

式中

$$a_0 = 3.5803\times10^{-5},\quad a_1 = 8.5258\times10^{-6},$$
$$a_2 = -6.8360\times10^{-8},\quad a_3 = 6.6228\times10^{-10};$$
$$b_0 = 1.8932\times10^{-6},\quad b_1 = -4.2393\times10^{-8};$$
$$c_0 = 1.8741\times10^{-8},\quad c_1 = -6.7795\times10^{-10},$$
$$c_2 = 8.7330\times10^{-12},\quad c_3 = -5.4481\times10^{-14};$$
$$d_0 = -1.1351\times10^{-10},\quad d_1 = 2.7759\times10^{-12};$$
$$e_0 = -4.6206\times10^{-13},\quad e_1 = 1.8676\times10^{-14},$$
$$e_2 = -2.1687\times10^{-16}。$$

S为实用盐标，θ为水温(℃，θ_{68})；$k=10^{-4}$，为与海压p的单位相匹配的因数。计算结果节录于表1—4中。

3. 位温

海水微团从海洋某一深度(压力为p)绝热上升到海面(压力为大气压p_a)时所具有的温度称为位温(*potential temperature*)，记为Θ。海水微团此时相应的密度，称为位密，记为ρ_Θ。若该海水微团未上升之前的现场温度为θ，绝热升达海面后温度降低了$\triangle\theta$，则该深度海水的位温即为

$$\Theta = \theta - \Delta\theta \qquad (1.4-10)$$

表 1－4 海水的绝热温度梯度($\Gamma/10^{-7}$℃·Pa^{-1})

(据 UNESCO,1983.)

S	p/(10^7Pa) \ θ_{68}/℃	0	10	20	30
25	0	0.0169	0.1002	0.1738	0.2417
	1	0.0363	0.1135	0.1825	0.2467
	2	0.0548	0.1263	0.1908	0.2515
	3	0.0723	0.1384	0.1987	0.2561
	4	0.0890	0.1500	0.2063	0.2605
	5	0.1047	0.1610	0.2135	0.2648
	6	0.1195	0.1713	0.2204	0.2688
	7	0.1334	0.1811	0.2270	0.2726
	8	0.1463	0.1903	0.2332	0.2763
	9	0.1583	0.1989	0.2390	0.2797
	10	0.1694	0.2069	0.2445	0.2830
30	0	0.0263	0.1075	0.1790	0.2448
	1	0.0452	0.1205	0.1874	0.2497
	2	0.0631	0.1328	0.1954	0.2543
	3	0.0801	0.1445	0.2031	0.2588
	4	0.0962	0.1556	0.2104	0.2630
	5	0.1113	0.1662	0.2173	0.2671
	6	0.1256	0.1761	0.2239	0.2710
	7	0.1389	0.1855	0.2302	0.2747
	8	0.1512	0.1942	0.2361	0.2782
	9	0.1627	0.2024	0.2416	0.2815
	10	0.1732	0.2099	0.2468	0.2846

(续表 1—4)

35	0	0.0358	0.1149	0.1843	0.2479
	1	0.0541	0.1274	0.1923	0.2526
	2	0.0714	0.1393	0.2001	0.2571
	3	0.0879	0.1506	0.2074	0.2614
	4	0.1034	0.1613	0.2144	0.2655
	5	0.1180	0.1714	0.2211	0.2695
	6	0.1316	0.1809	0.2274	0.2732
	7	0.1443	0.1898	0.2334	0.2767
	8	0.1562	0.1981	0.2390	0.2801
	9	0.1670	0.2059	0.2442	0.2832
	10	0.1770	0.2130	0.2491	0.2862
40	0	0.0453	0.1222	0.1895	0.2510
	1	0.0630	0.1343	0.1973	0.2556
	2	0.0798	0.1457	0.2047	0.2599
	3	0.0956	0.1566	0.2118	0.2641
	4	0.1106	0.1669	0.2185	0.2681
	5	0.1246	0.1766	0.2249	0.2718
	6	0.1377	0.1857	0.2309	0.2754
	7	0.1498	0.1941	0.2366	0.2788
	8	0.1611	0.2020	0.2419	0.2820
	9	0.1714	0.2093	0.2468	0.2849
	10	0.1808	0.2161	0.2515	0.2877

$\triangle\theta$ 的量值随海水微团原先的深度及对应的现场温度 θ 的增大而增大。

通过对绝热温度梯度积分,可以计算出位温。设海水微团初始现场温度为 θ_0,盐度为 S_0,海压为 p_0,绝热地移动到海压为 p_r 处,则位温 $\Theta(S_0,\theta_0,p_0,p_r)$可用弗弗诺夫(Fofonoff,1977)给出的 4 阶龙格—库塔(Runge—Kutta)积分程序(UNESCO,1983),得出足够精确的值。其迭代计算式如下:

$$\left.\begin{aligned}
&\triangle\theta_1 = k\cdot\triangle p\cdot\Gamma(S_0,\theta_0,p_0) && \theta_1 = \theta_0 + \frac{1}{2}\triangle\theta_1 \\
&\triangle\theta_2 = k\cdot\triangle p\cdot\Gamma(S_0,\theta_1,p_0+\frac{1}{2}\triangle p) && \theta_2 = \theta_1 + (1-\frac{1}{\sqrt{2}})(\triangle\theta_2 - q_1) \\
&\triangle\theta_3 = k\cdot\triangle p\cdot\Gamma(S_0,\theta_2,p_0+\frac{1}{2}\triangle p) && \theta_3 = \theta_2 + (1+\frac{1}{\sqrt{2}})(\triangle\theta_3 - q_2) \\
&\triangle\theta_4 = k\cdot\triangle p\cdot\Gamma(S_0,\theta_3,p_0+\triangle p) && \theta_4 = \theta_3 + \frac{1}{6}(\triangle\theta_4 - 2q_3)
\end{aligned}\right\}$$

$$(1.4-11)$$

式中 $q_1=\triangle\theta_1$，$q_2=(2-\sqrt{2})\triangle\theta_2+(\frac{3}{\sqrt{2}}-2)q_1$，$q_3=(2+\sqrt{2})\triangle\theta_3-(\frac{3}{\sqrt{2}}+2)q_2$；而 $\triangle p=p_r-p_0$，单位是 P_a，$k=10^{-4}$，为其匹配因数。Θ_4 即为所求之 $\Theta(S_0,\theta_0,p_0,p_r)$。对于 $\triangle p=10^6P_a$，上式积分误差不超过 0.1×10^{-3}℃。表 1－5 为计算结果节录。

由表可见，若有盐度为 35 的海水微团在 8×10^7P_a 处（约 8000m）现场温度为 0℃，则其位温为－0.7813℃，也就是说，当它绝热升达海面时，温度便降至－0.7813℃，这就意味着，海面上温度为－0.78℃的海水，并不比 8000m 深处温度为 0℃的海水来得"冷"。因而在比较不同深处的海水温度时，不宜仅依其现场温度值而直观地评论高低；在分析深海区的水温铅直结构时，更不可无视绝热变化的影响。例如表 1－6 为明达瑙海沟观测资料节录，在深于 3470m 以后水温随深度而增加。依现场水温绘制的断面图（图 1－6a）中，在与海槛深度相当的水层上，呈现出一个明显的"冷水舌"，俨然有一层"冷水"在底层的"暖水"之上"水平地"流过。其实由位温分布（图 1－6b）可知，越过海槛的水是一直沿坡下沉到海沟底部的。在我国南海的深海盆中，也发现水温随深度的增加而缓慢上升，亦为绝热变化所致（赫崇本、管秉贤，1984）。

表 1—5　海水的位温（Θ/℃，参照压 p_r = 0. 0Pa）

（据 UNESCO，1983）

S_0	p_0/（10⁷Pa） \ θ_0/℃	0	10	20	30
25	0	0.0000	10.0000	20.0000	30.0000
	1	0.0265	9.8935	19.8224	29.7566
	2	−0.0715	9.7749	19.6377	29.5098
	3	−0.1339	9.6448	19.4461	29.2599
	4	−0.2125	9.5040	19.2480	29.0070
	5	−0.3061	9.3531	19.0438	28.7512
	6	−0.4139	9.1927	18.8338	28.4928
	7	−0.5349	9.0234	18.6183	28.2319
	8	−0.6679	8.8459	18.3978	27.9685
	9	−0.8122	8.6607	18.1724	27.7030
	10	−0.9667	8.4684	17.9426	27.4353
30	0	0.0000	10.0000	20.0000	30.0000
	1	−0.0357	9.8864	19.8174	29.7535
	2	−0.0892	9.7611	19.6278	29.5038
	3	−0.1595	9.6248	19.4317	29.2511
	4	−0.2454	9.4782	19.2293	28.9955
	5	−0.3458	9.3219	19.0211	28.7372
	6	−0.4598	9.1565	18.8074	28.4763
	7	−0.5864	8.9827	18.5885	28.2130
	8	−0.7246	8.8010	18.3648	27.9475
	9	−0.8734	8.6120	18.1365	27.6798
	10	−1.0320	8.4164	17.9040	27.4102

(续表 1-5)

35	0	0.0000	10.0000	20.0000	30.0000
	1	−0.0448	9.8793	19.8123	29.7505
	2	−0.1069	9.7473	19.6179	29.4979
	3	−0.1851	9.6048	19.4172	29.2423
	4	−0.2783	9.4523	19.2106	28.9840
	5	−0.3856	9.2906	18.9985	28.7231
	6	−0.5058	9.1203	18.7810	28.4598
	7	−0.6380	8.9419	18.5587	28.1942
	8	−0.7813	8.7560	18.3317	27.9264
	9	−0.9348	8.5633	18.1005	27.6567
	10	−1.0974	8.3643	17.8654	27.3851
40	0	0.0000	10.0000	20.0000	30.0000
	1	−0.0540	9.8721	19.8072	29.7474
	2	−0.1246	9.7335	19.6080	29.4919
	3	−0.2107	9.5847	19.4028	29.2335
	4	0.3113	9.4265	19.1919	28.9725
	5	−0.4253	9.2594	18.9758	28.7091
	6	−0.5518	9.0840	18.7546	28.4433
	7	−0.6897	8.9011	18.5288	28.1753
	8	−0.8381	8.7110	18.2986	27.9053
	9	−0.9962	8.5145	18.0645	27.6335
	10	−1.1629	8.3121	17.8266	27.3599

在分析大洋深、底层的海水运动时，由于各处水温差别甚小，绝热变化效应往往变得明显起来，因而用位温分析比用现场水温更合理有效(§3.3.3)

表 1—6 明达瑙海沟的现场水温、盐度及位温、位密

(据 Pickard，1979)

水深 z /m	S	现场水温 θ/℃	位温 Θ/℃	位密 ρ_{θ} /kg·m^{-3}
1455	34.58	3.20	3.09	1027.56
2470	34.64	1.82	1.65	1027.73
3470	34.67	1.59	1.31	1027.78
4450	34.67	1.65	1.25	1027.78
6450	34.67	1.93	1.25	1027.79
8450	34.69	2.23	1.22	1027.79
10035	34.67	2.48	1.16	1027.79

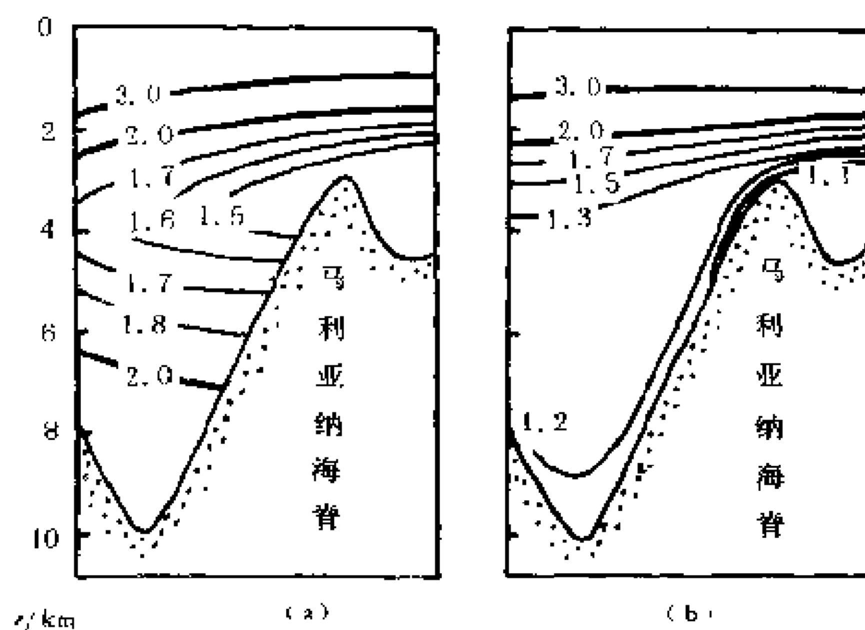


图 1—6 明达瑙海沟中的温度分布

(a)现场水温；(b)位温

(据 Pickard，1979)

1.4.4 蒸发潜热及饱和蒸汽压

1. 海水的比蒸发潜热

1kg 海水汽化为同温度的蒸汽所需要的热量，称为海水的比

蒸发潜热，单位是“焦/千克”(J/kg)，其具体量值略受盐度影响，一般可不予考虑，即如纯水只考虑温度的影响。比蒸发潜热的计算已有许多经验公式，如 Dietrich (1980)给出的公式可改写如下：

$$L = (2502.9 - 2.72\theta) \times 10^3 \mathrm{J/kg} \tag{1.4-12}$$

式中 θ 是水温(℃)，适用范围为 0～30℃。

水的特殊性之一，是其比蒸发潜热在所有物质中为最大，海水亦然。因而伴随海水的蒸发，海洋将散失巨额热量，这对于海面热平衡和海上大气热状况的影响是很大的。例如，在北太平洋西部和南海的热带低压(风力接近 8 级)，逐步增强为热带风暴(风力 8～9 级)、强热带风暴(风力 10～11 级)，直至发展为台风(风力 12 级以上)，生成条件之一是必须在广阔的高温洋面上，其维持和不断增强的机制之一，是“暖心”的形成与维持。“暖心”最重要的热量来源之一，便是上升气流所致水汽凝结放热，而这些热量则是蒸发时所吸收贮存的。台风登陆以后之所以很快削弱，地面摩擦固然起了很大作用，但水汽来源的骤减也是重要原因之一。风暴重新入海之后往往再度增强，不可否认底摩擦减小起了重要作用，而水汽供应的恢复，也是重要原因之一。

由于海水的比热容很大，因而从海面至 3m 深的薄薄一层海水的热容量，就与地球上大气的总热容相当；所以，尽管海洋每年蒸发平均失去约 126cm 厚的一层水，从而使气温发生激烈而迅速的变化，但因海水的热容量极大，故水温的变化却缓慢保守得多。

2. 饱和蒸汽压

制约海水温度变化缓慢的另一个因素，是海水的饱和蒸汽压比较小。因为蒸发现象的实质是水分子由海面逃逸而出的过程，所以盐度若高，则单位面积海面上平均的水分子数将减少，从而使水分子逃逸出海面的机率也减少。所谓饱和蒸发压，是指水分子经由海面逃出和重又回到海水中的过程达到动态平衡时水汽所具有的

压力。海水盐度的增大，减少了单位面积海面的平均水分子数，显然会使饱和蒸汽压降低。海面蒸发量与饱和差(相对于表面水温的饱和蒸发压与现场蒸汽压的差值)成比例，所以饱和蒸汽压小就不利于蒸发，因而海水属于较难蒸发的液体。这样以来，海洋因蒸发而损失的水量和热量，相对而言也就减少了。

1.4.5 热传导

相邻的海水若温度不同时，由于海水分子或海水块体的交换，会使热量由高温处向低温处转移，这就是热传导。单位时间内通过某一截面的热量称为热流率(*heat flow rate*)，符号为 Φ，单位为"瓦"(W)。通过单位面积的热流率称为热流率密度(*density of heat flow rate*)，记为 q 或 φ，单位是"瓦/米²"($W \cdot m^{-2}$)。其量值的大小除与海水本身的热传导性能紧密相关之外，还与垂直于该传热面方向上的温度梯度有关系，即

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} \qquad (1.4-13)$$

式中 n 为垂直于传热面的方向，λ 为热导系量，单位是"瓦·米$^{-1}$·开$^{-1}$"($W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$，亦可用 $W \cdot m^{-1} \cdot ℃^{-1}$)。若热量的传递仅由海水分子的不规则运动所引起，则称为分子热传导，分子热导系量记为 λ_t，在 101325P_a 和 10℃时，纯水的 $\lambda_t = 0.582 W \cdot m^{-1} \cdot ℃^{-1}$，30℃时 $\lambda_t = 0.607 W \cdot m^{-1} \cdot ℃^{-1}$，即随温度的升高而增大。水的热导系量在液体中除水银外是最大的，见表1—7。人们已广泛地利用水的这一性质，如医疗中的冷敷、热敷及工业生产中的水冷却等，但是不少人却认为"水不易传热"，其实是混淆了热传导和水温变化的差别。原因在于水的比热容很大，所以虽然水的热导性很好，但水温的变化显得相当滞缓。

海水的热导系量比纯水稍低，且随盐度的增加而略有减小，例如 $\theta = 17.5℃$的纯水 $\lambda_t = 0.586 W \cdot m^{-1} \cdot ℃^{-1}$，盐度增至 20 时，

表 1－7　几种物质的热导系量(λ_{T}/W·m^{-1}·K^{-1})

(据友田好文、高野健三,1990)

水(10℃)	水(30℃)	酒精(30℃)	甘油(10～70℃)	苯(20℃)	水银(0℃)	空气
0.582	0.607	0.181	0.285	0.147	7.8	0.024

λ_{T}＝0.567W·m^{-1}·$℃^{-1}$,而 S＝40 时 λ_{T}＝0.561W·m^{-1}·$℃^{-1}$。

如果热量的传递,是由于海水块体的随机运动所引起,则称为涡动热传导,又称为湍流热传导。涡动热导系量记为 λ_A,λ_A 和海水的运动状况关系很大,并且在不同海区和不同季节也有较大的差异。

由于海水运动多为涡动形式,而 λ_A 又比 λ_{T} 大得多,所以涡动热传导在海洋的热量传输中起了主要的作用。当然,分子热传导也有其不可忽视的作用,因为热量传输的最终过程,还是靠分子热传导来最后完成的。

类似于热量的传导,盐量也能扩散传输,但其分子扩散系量仅为分子热导系量的 0.01 左右。这种显著差异,会导致双扩散对流,从而加速了海洋内部的混合(详见§2.6)。

1.4.6　沸点升高、冰点降低

纯水的沸点和冰点与同族化合物相比是反常的(§1.2),而且与其相对分子质量相近的物质比较,也很特殊(见表 1－8)。海水与纯水又有不同,这就是:随着海水盐度的增大,沸点更趋升高而冰点愈益降低。鉴于海水的现场水温最高不过 36℃,且仅在波斯湾那样的内陆海出现;而南、北极附近广阔的高纬海域却低达冰点左右,所以人们更关心海水冰点随盐度的变化。Doherty 等(Doher

表 1—8　几种物质的沸点和冰点(据友田好文、高野健三,1990)

物　质	相对分子质量	沸点/℃	冰点/℃
CO(一氧化碳)	28	—191.5	—205
CH_4(甲烷)	16	—161.6	—182.7
NF(氟化氮)	20	19.9	—83

ty and Kester,1974)给出了如下的关系式:

$$\theta_f = -0.0137 - 0.051990S - 0.00007225S^2 - 0.000758d \quad (1.4-14)$$

式中 d 是海水所在的深度(m)。在上述作者测量的基础上,米勒罗等(Millero and Leung,1976)又提出了新的公式,并被 UNESCO 所采纳(UNESCO,Report No. 28,1978;NO. 36,1981a),依 SI 的规定,可将其改写如下:

$$\theta_f = -0.0575S + 1.710523 \times 10^{-3}S^{3/2} - 2.154996 \times 10^{-4}S^2 - 7.53 \times 10^{-4}(kp) \quad (1.4-15)$$

式中 S 为实用盐标,海压 p 的单位为 P_a,匹配因数 $k=10^{-4}$,计算结果见表 1—9,在 5×10^6P_a 时,误差为 0.003℃。

表 1—9　海水的冰点(θ_f/℃)(据 UNESCO,1983)

$p/10^6$ Pa \ S	5	10	15	20	25	30	35	40
0	—0.274	—0.542	—0.812	—1.083	—1.358	—1.638	—1.922	—2.212
1	—0.349	—0.618	—0.887	—1.159	—1.434	—1.713	—1.998	—2.287
2	—0.424	—0.693	—0.962	—1.234	—1.509	—1.788	—2.073	—2.353
3	—0.500	—0.768	—1.038	—1.309	—1.584	—1.864	—2.148	—2.438
4	—0.575	—0.844	—1.113	—1.384	—1.650	—1.939	—2.224	—2.513
5	0.650	—0.919	—1.188	—1.460	—1.735	—2.014	—2.299	—2.589

虽然 θ(max)和 θ_f 都随盐度的增大而降低,但前者降得更快

(图 1—7)。当 $S=24.695$ 时两者均为 -1.33℃，而当盐度再增大时，$\theta(\max)$ 就低于 θ_f 了。除了河口冲淡水外，海水的盐度均高于24.70，因而当水温一直下降到冻结时，海水仍未达到最大密度。换言之，只要未冻结，海水的密度就仍然处于继续增大的过程之中。

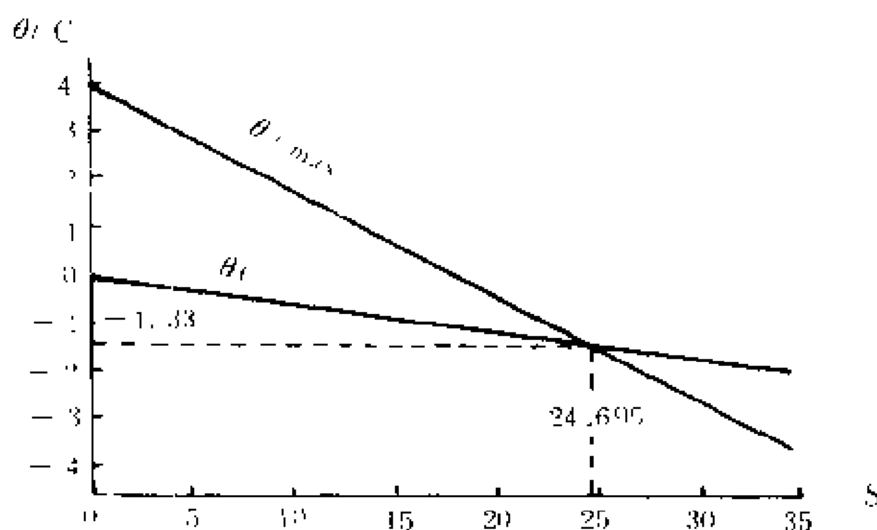


图 1—7　$\theta(\max)$ 和 θ_f 随温度的变化(据腐斯，1983)

海水的这一特性，导致其冷却过程与纯水大不相同。纯水被冷却的仅仅是表层，表层以下直到很深的水底，在被冻结前可仍然保持 3.984℃(θ_{90})。原因是纯水低于 3.984℃时密度减小浮于表层，继续冷却的还是表层水。海水则不然，表层水被冷却后密度增大而下沉，下层温度高、密度小的海水便上升。对流混合的效应，一方面是使表层的冷却相对于淡水来得"慢"；另一方面则使深层水的冷却比淡水"快"得多。海水表层虽然冷却得慢且较难结冰，但相当深厚的水层却一起被冷却了。这种过程对大洋底层水团的形成和世界大洋环流结构的影响，是至关重要的。

§1.5　海水的密度

在推行国际标准单位制(SI)以前相当长的时期内，人们习用的密度单位是"克/厘米^3"，因之纯水的密度大体上等于 1。在论及其他物质的质量时，又常以纯水的密度为 1 作参照标准，所以除了

在讨论 4℃左右的反常性外，通常不大注意纯水密度的变化。海水却不然，其密度的变化既非常复杂，且又对海洋的许多过程都有相当重要的作用，因而成了物理海洋学倍加关心的一个重要参数。

1.5.1 海水的密度及比容

单位体积海水的质量定义为海水的密度，用符号 ρ 表示，其单位是“千克每立方米”，即 $kg \cdot m^{-3}$。在物理海洋学中还常用“比容”(*Specific volume*)，它指的是体积除以相应的质量，符号为 α 或 v，即

$$\alpha = 1/\rho \qquad (1.5-1)$$

单位是“立方米每千克”($m^3 \cdot kg^{-1}$)。

因为海水的密度是其盐度、温度和压力的函数，所以，通常用 $\rho(S,\theta,p)$表示实用盐度为 S、水温为 θ℃、海压为 p(单位为兆帕：MP_a)条件下的海水的密度。例如实用盐度 35.02，温度 4.53℃和压力为 28.79MP_a 的海水，其密度可写为 ρ(35.02，4.53℃，28.79MP_a)。当按照上述限定的 S,θ,p 的顺序书写，且又使用上述规定的单位时，温度和压力的单位还可省略，即写为 ρ(35.02，4.53，28.79)。这一规定也适用于比容的书写。

以前，在海洋学文献中，一般是将圆括号内的参数写成下标形式，如 $\rho_{s,t,p}$，依 SI 推荐，应优先使用带圆括号的写法(UNESCO，1985)。

1.5.2 密度的简略表示法

用千克每立方米表示的海水密度值，可由 6～7 位有效数字组成，且具有 1×10^{3} 的精确度。为书写简便，可借助下述两个参数。

1.克努曾参数 σ

σ 是克努曾当时引入的符号，一直沿用至今。考虑到在一般正常的温盐范围内，海水密度值的前两位数字都相同，为简便计而写成

$$\sigma_{S,\theta,p} = (\rho_{S,\theta,p} - 1) \times 10^3 \qquad (1.5-2)$$

在海面，海压为0，海水密度仅是温度和盐度的函数，记为

$$\sigma_t = (\rho_{S,\theta,0} - 1) \times 10^3 \qquad (1.5-3)$$

称为"条件密度"。当温度为0℃时记为σ_0，只随盐度而变。相应地将位密记为σ_θ，它是位温和盐度的函数。

如SI文件所言，σ实际上是与相对密度而对应的。所谓相对密度，指的是某物质在给定物理条件下的密度和101325Pa气压下的、没有溶解气体的4℃纯水密度的比值，用符号d表示，显然它是无量纲的。例如，若$d=\rho/\rho(\max)=1.028723$，既想简略又能同样精确地表示这一密度时，可写为$\sigma=(d-1)\times 10^3=28.723$，此数只有三位小数，故很方便。

根据SI公布的文件(UNESCO，1985)，σ已不再推荐使用，而σ_t则属于坚决劝阻使用的符号。

2. 新推荐的参数γ——密度超量

依SI推荐，密度超量(*density excess*)定义为

$$\gamma = \rho - 1000\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \qquad (1.5-4)$$

它与密度有相同的单位$\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$。

于是，例如有密度值$\rho=1028.723\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$，便可以写为$\gamma=\rho-1000\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}=28.723\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$。

1.5.3 比容偏差和热比容偏差

若海水样品的现场比容为$\alpha(S,\theta,p)$，则

$$\delta = \alpha(S,\theta,p) - \alpha(35.0,0,p) \qquad (1.5-5)$$

称为比容偏差(*Specific volume anomaly*，*steric anomaly*)，也可将其记为$\delta(S,\theta,p)$。式中$\alpha(35.0,0,p)$是参照海水——盐度35.0，温度0℃，海压p——的比容值。

海洋学中还常用热比容偏差(*thermosteric anomaly*)，也有人称为热盐比容偏差，符号为Δ或$\Delta(S,\theta)$，它表示海压为0($p=0$)时的

偏差值：

$$\triangle(S,\theta)=\alpha(S,\theta,0)\quad \alpha(35,0,0) \qquad (1.5-6)$$

显然它只是温度和盐度的函数。

在海洋上层，例如 1000m 以浅，海水密度或比容主要取决于水温和盐度的变化，因此$\triangle(S,\theta)$经常用作描述上层海洋密度特征的一种参数，由于 $\alpha(35,0,0)=0.97266204\times10^{-3}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1}$，由式(1.5—4)、(1.5—6)可得

$$\triangle(S,\theta)=\left(\frac{1000}{1000+\sigma_\theta}-0.97266204\right)\times10^{-3}\mathrm{m}^3\cdot\mathrm{kg}^{-1} \qquad (1.5-7)$$

虽然依 SI 已劝阻使用 σ_θ，但此前的海洋学文献曾广泛地使用 σ_θ，况且在新旧单位制交替的一段时间，难免还会遇到上述关系。鉴于此，使用 σ_θ 虽然不如 γ 规范，但对海洋上层而言，海压变化不大，在某些情况下以 σ_θ 代替式中的 γ，也有方便之处。

§ 1.6 海水状态方程

表层海水的密度虽然可以直接测量，但操作并不简便，而表层之下海水的现场密度则很难直接测量。海水虽因体积热膨胀系量和压缩系量较小（§ 1.4）导致密度变化不那么激烈，但由于海洋空间尺度大，巨量海水在大尺度空间上的密度差异，其影响作用却是异乎寻常的。鉴于此，许多海洋学家进行了大量的研究，以便通过温度、盐度和压力来间接但力求精确地计算海水的现场密度。

海水状态方程是描述海水状态参数之间关系的方程式。最常用的海水状态方程，就是描述海水现场密度 $\rho(S,\theta,p)$或现场比容 $\alpha(S,\theta,p)$与其盐度、温度及压力之间关系的经验公式，因此有人将海水状态方程称为海水的 $P-V-T$ 性质。根据海水状态方程，代入实测的现场温、盐、压资料，便可计算出海水的现场密度或比容。

已提出的海水状态方程为数不少，形式各异，大体上可分三种类型：用多项式型表达的状态方程，通过热力学、物理化学公式表达的状态方程和由声速导出的海水状态方程（张正斌、刘莲生，1989），其中有代表性的是以下几种。

1.6.1 克努曾一埃克曼经典状态方程

1901 年克努曾提出计算条件密度的公式

$$\sigma_t = \Sigma_T + (\sigma_0 + 0.1324)[1 - A_T + B_T(\sigma_0 - 0.1324)] \tag{1.6-1}$$

式中 σ_t、σ_0 前已述及（§1.5），Σ_T，A_T，B_T 是与温度有关的系数。

1908 年埃克曼提出

$$\alpha_{STp} = \alpha_{STp}(1 - \mu p) \tag{1.6-2}$$

式中 μ 被定义为从 0 到 p 巴（海压）之间的海水平均（等温）压缩系数。上二式结合即为克努曾一埃克曼状态方程，依其可计算现场密度和比容。为便于计算，他们把式中的有关量编算制表供计算时查用，从而得到广泛应用。

1.6.2 皮耶克尼斯和桑德斯特勒姆状态方程

用上面的公式计算是很繁琐的，为此，1910 年 Bjerknes V. 和 Sandström J. W. 用泰勒级数展开，得到

$$\alpha_{STP} = \alpha_{35,0,P} + \triangle_{S,T} + \delta_{S,P} + \delta_{T,P} + \delta_{S,T,P} \tag{1.6-3}$$

式中各 δ 表示相应下标物理量的改正值，$\triangle_{S,T}$为热比容偏差，见式（1.5—6）。他们也编算了成套表格以供查用。

以上两种状态方程都是通过多项式表达的海水状态方程式。

1.6.3 陈一米勒罗状态方程

上述状态方程多年来在海洋学中得到广泛应用，但后来发现

它们有问题。如格拉斯豪夫(Grasshoff K. ,1976)指出,用克努曾埃克曼状态方程计算比容有误差,若 S 为 35.0,气压为 101325Pa,水温为 0°～25℃,其平均偏差为$(8.7\pm1.0)\times10^{-9}m^3\cdot kg^{-1}$;海压为 500bar(即 5×10^7Pa,水深将近 5000m)时,偏差增至 $33\times10^{-9}m^3\cdot kg^{-1}$;在 1000bar($10^8$Pa,水深近 10000m)条件下,埃克曼的高压状态方程偏差可达$(89\pm5)\times10^{-9}m^3\cdot kg^{-1}$。误差的产生,与盐度的定义及测量精度等有关,故很有必要改进。

1."一个大气压(101325Pa)下的海水状态方程"

1973 年米勒罗等(Millero *et al*,1973c)用磁性浮子密度计和悬浮密度计,在气压 101325Pa 下测定了经过稀释和蒸发的标准海水于盐度 0.5～40,温度 0～40℃范围内的相对密度。依测定结果提出了"一个大气压下的海水状态方程":①

$$\rho-\rho_0=AS+BS^{3/2}+CS^2 \qquad (1.6-4)$$

式中 S 为盐度;A、B 为与温度相关的参数,C 为常数,用加权最小二乘法求得,ρ_0 为纯水密度,它们的量值可查阅作者原文。该式适用于较广的温、盐范围,且计算精度超过以往各式。

2.任意压力下的海水状态方程

1976 年陈镇东和米勒罗(Chen C. T. and F. J. Millero,1976)用高压磁性浮子密度计在温度 0～40℃,海压 0～10^8Pa,盐度 5～40 范围内测定高压海水的比容,得到 558 个数据,依实验结果提出:

$$K=\frac{\alpha^0 p}{\alpha^0-\alpha^p}=K^0+Ap+Bp^2 \qquad (1.6-5)$$

式中 $K=\frac{\alpha^0 p}{\alpha^0-\alpha^p}$是海压为 p 时的割线体积模量(*the secant bulk modulus*),可由海水比容测定数据求得;α^0 和 α^p 分别是外加压力为 0 和 p 时的海水的比容;K^0 为大气压下的割线体积模量;A 及 B 是

① 为忠实于原文,故仍有"一个大气压"的提法。

和温度及盐度相关的参数，而式(1.6—5)中的 p，单位是巴(bar)。

用该式计算海水的比容，热膨胀系量和等温压缩系量，与文献所载结果都较一致，既能适用于较广的温、盐、压范围，且较其他状态方程精确。缺点是计算 K^0、A、B 需用 48 个参数，为此作者在 1977 年又提出具有 24 个参数的简化状态方程式。后者计算比容及热膨胀系量时，与前者比较其偏差都不大，因此相当适用。

以上状态方程是通过热力学基础方程式近似表达的。

1.6.4 根据声速导出的海水状态方程式

鉴于海水中声速可以精确测定，而声速与海水密度又有密切关系，克瑞斯(Crease J，1962)由海水声速导出海水状态方程，依实测声速数据来确定压缩系量。米勒罗在此实验基础上，仍选用类似式(1.6—5)的形式给出

$$K = \frac{\alpha_W^0 p}{\alpha^0 - \alpha^p} = B + A_1 p + A_2 p^2 \qquad (1.6-6)$$

式中 α_W^0 是在海面气压下的纯水比容，α^0 及 α^p 分别是海压为 0 及 p 时的海水比容，系数 B、A_1、A_2 是温度和盐度的函数，可通过实测声速依交互计算的方法求出。米勒罗认为，依声速数据得到的状态方程比以前的更好。

1.6.5 1980 年国际海水状态方程(EOS80)

海洋学常用表和标准联合专家小组(JPOTS)1980 年在第 10 次报告(UNESCO，NO. 36，1981a)中，公布了新的 1980 年国际海水状态方程。这些方程是在米勒罗等(Millero *et al*，1980，1981a，b；Chen *et al*，1976，1977a，b)工作的基础上提出的。UNESCO，ICES，SCOR 和 IAPSO 于 1982 年 1 月联合发出通告，接受 JPOTS 的推荐，决定从 1982 年 1 月 1 日起启用 1980 年国际海水状态方程(EOS80)。

1. “一个大气压国际海水状态方程”

依 UNESCO(NO. 38, 1981c), “1980 年一个大气压① 国际海水状态方程”定义如下：

在一个标准大气压($p=0$)下，海水密度(ρ, $kg \cdot m^{-3}$)根据实用盐度(S)和温度(θ_{68}, ℃)按下列方程计算得出：

$$\rho(S,\theta,0) = \rho_W + AS + BS^{3/2} + CS^2 \qquad (1.6-7)$$

式中

$$A = 8.24493 \times 10^{-1} - 4.0899 \times 10^{-3}\theta + 7.6438 \times 10^{-5}\theta^2 - 8.2467 \times 10^{-7}\theta^3 + 5.3875 \times 10^{-9}\theta^4,$$

$$B = -5.72466 \times 10^{-3} + 1.0227 \times 10^{-4}\theta - 1.6546 \times 10^{-6}\theta^2,$$

$$C = 4.8314 \times 10^{-4},$$

而 ρ_W 是基准水(SMOW, IUPAC, 1976)的密度，当作纯水参考标准，由下式给出：

$$\rho_W = 999.842594 + 6.793952 \times 10^{-2}\theta - 9.095290 \times 10^{-3}\theta^2 + 1.001685 \times 10^{-4}\theta^3 - 1.120083 \times 10^{-6}\theta^4 + 6.536332 \times 10^{-9}\theta^5$$

该式是比格(Bigg, 1967)给出的，将来若有新的更可靠的基准水密度方程时，可取而代之。依 SI 建议(UNESCO, 1985)，将 SMOW (*Standard Mean Ocean Water*)的符号记作 ρ^0。米勒罗和波伊森指出(Millero F. J., A. Poisson, 1981a)，式(1.6－7)的适用范围是：温度 －2～40℃(θ_{68})，实用盐度 0～42；计算密度的标准差为 3.6×10^{-3} kg/m^3。

2. 高压国际海水状态方程

依 UNESCO, NO. 38(1981c)及 SI(UNESCO, 1985)，高压国际海水状态方程可如下定义：

---

① UNESCO, NO. 38 在 1981 年公布，故仍有“1980 年一个大气压”和“一个标准大气压”的提法。

高压海水密度(ρ,kg/m^3)可根据实用盐度(S)、温度(θ_{68},℃)和海压(p,Pa),按下列方程计算:

$$\rho(S,\theta,p) = \rho(S,\theta,0)\cdot\left[1-\frac{(np)}{K(S,\theta,p)}\right]^{-1} \tag{1.6-8}$$

式中 $\rho(S,\theta,0)$如式(1.6−7)所示;$K(S,\theta,p)$为割线体积模量,由下式给出:

$$K(S,\theta,p) = K(S,\theta,0) + A(np) + B(np)^2 \tag{1.6-9}$$

其中

$$K(S,\theta,0) = K_W + (54.6746 - 0.603459\theta + 1.09987\times10^{-2}\theta^2 - 6.1670\times10^{-5}\theta^3)S + (7.944\times10^{-2} + 1.6483\times10^{-2}\theta - 5.3009\times10^{-4}\theta^2)S^{3/2} \tag{1.6-10}$$

$$A = A_W + (2.2838\times10^{-3} - 1.0981\times10^{-5}\theta - 1.6078\times10^{-6}\theta^2)S + 1.91075\times10^{-4}S^{3/2} \tag{1.6-11}$$

$$B = B_W + (-9.9348\times10^{-7} + 2.0816\times10^{-8}\theta + 9.1697\times10^{-10}\theta^2)S \tag{1.6-12}$$

割线体积模量中的纯水项由下式给出:

$$K_W = 19652.21 + 148.4206\theta - 2.327105\theta^2 + 1.360477\times10^{-2}\theta^3 - 5.155288\times10^{-5}\theta^4 \tag{1.6-13}$$

$$A_W = 3.239908 + 1.43713\times10^{-3}\theta + 1.16092\times10^{-4}\theta^2 - 5.77905\times10^{-7}\theta^3 \tag{1.6-14}$$

$$B_W = 8.50935\times10^{-5} - 6.12293\times10^{-6}\theta$$

$$+ 5.2787 \times 10^{-8}\theta^2 \qquad (1.6-15)$$

该方程的适用范围是:温度−2～40℃(θ_{68}),实用盐度0～42,海压0～10^8Pa,压力匹配因数$n=10^{-5}$.

式(1.6−8)也可写成计算比容的形式:

$$\alpha(S,\theta,p) = \alpha(S,\theta,0) \cdot \left[1 - \frac{(np)}{K(S,\theta,p)}\right] \qquad (1.6-8')$$

高压状态方程的一个优点是,它比原有的其他形式的状态方程更准确。米勒罗等对方程进行了大量的验算,多达1908个数据(纯水298个,海水1610个),比容总的标准差为$9.0\times10^{-9}m^3/kg$,在大洋海水的温、盐、压力范围内,标准差仅为$5.0\times10^{-9}m^3/kg$。用于计算海水体积热膨胀系量或压缩系量等,精度也很高(Millero *et al*,1980)。

方程的另一个优点,是结构比较简明,能清晰地刻划出决定海水体积模量的"纯水项"、"标准大气压项"和"高压项",这给理论研究、实验和计算带来很大的方便(甘子钧,1981)。而且,将来若调整方程的"纯水项"(或其他项,如"一个大气压项"、"高压项")时,可以不影响其他的项。

3. 完整的国际海水状态方程

米勒罗等当时提出的方程,是分别对一个大气压和高压两种情况的,即式(1.6—4)和式(1.6−5)。他们在1980年以后已把两种情况结合,提出了"完整的国际海水状态方程"(Millero *et al*,1981*a*、*b*),其形式即如式(1.6−8)和式(1.6−8′)。式(1.6−8)后来被正式命名为"1980年高压国际海水状态方程"(UNESCO,1981c),简记为EOS80;式(1.6−8′)是式(1.6−8)的变换形式,有时也通称为EOS80。

鉴于ITS−90温标的公布,国际海水状态方程中的温度也应由θ_{68}换算为θ_{90},由表1−1可得两者之间近似有线性关系:

$$\theta_{68} = 1.000024\theta_{90} \qquad (1.6-16)$$

1.6.6 EOS80的应用

EOS80不仅可以直接用于计算海水的密度和比容，还可以计算热膨胀系量、压缩系量、声速、绝热梯度、位温、比容偏差以及比热容随压力的变化等等。本节先介绍压缩系量的计算并顺便说明割线体积模量的含意，然后再介绍如何由EOS80计算常用的比容偏差。至于如何由EOS80计算海水的其他热学性质，可参阅UNESCO，NO. 44(1983)。

1. 由EOS80计算海水压缩系量

设在$p=0$时海水微团的体积是V_0，压力增至p时体积变为V，体积的改变量是$-\triangle V=V_0-V$，压力的改变量是$\triangle p=p$。压缩曲线(p,V)关系的示意形式如图1—8，在低压(如$p<10MP_a$)时，曲

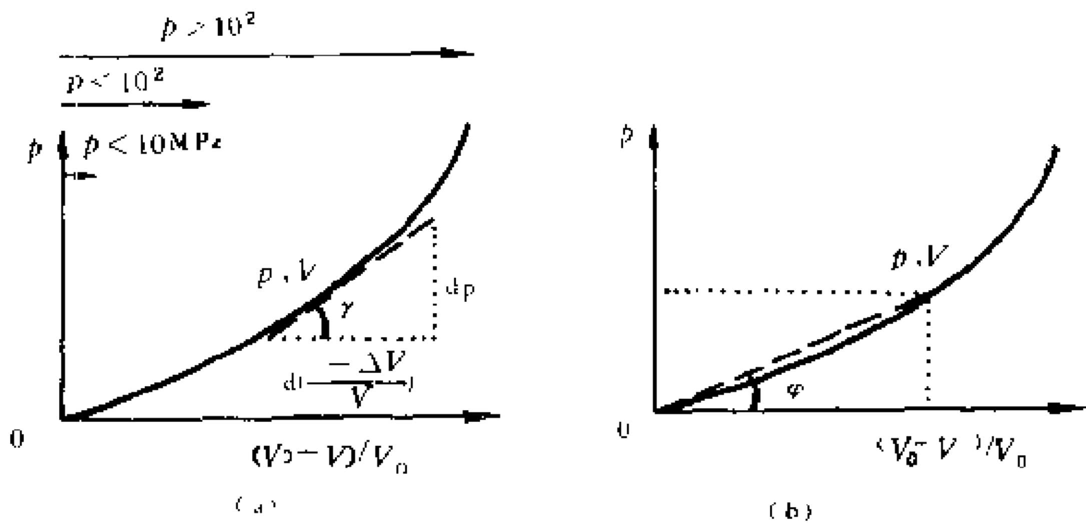


图1—8 切线体积模量(a)和割线体积模量(b)(据庞德、皮卡德，1990)

线的关系是线性关系，压力增大，当$10MP_a<p<10^2Mp_a$时是二次曲线，当压力$p>10^2MP_a$时变为三次曲线。

海水的压缩系量(§1.4.3)的倒数，为切线体积模量

$$K_T = -V\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}(\frac{V_0 - V}{V})} = \mathrm{tg}\gamma \qquad (1.6-17)$$

即压缩曲线的切线的斜率(图1—8,a),K_T 称为切线体积模量。在压力很小时因有线性关系,可视为常量;压力较大时则渐变为 p 的高于一次幂的关系。所谓割线体积模量可从图1—8b中看出

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{p}{\frac{V_0 - V}{V_0}} = \frac{V_0 p}{V_0 - V} = K \qquad (1.6-18)$$

是压缩曲线的割线的斜率。Hayward 指出(1967),若写成

$$K = \frac{V_0 p}{V_0 - V} = K_0 + mp$$

既容易用实验数据测定,又与切线体积模量具有同样的精度。米勒罗等对此再加改进,给出对实验数据更好的拟合:

$$K(S,\theta,p) = \frac{\alpha_0 p}{\alpha_0 - \alpha_p} = K_0 + Ap + Bp^2 \quad (1.6-19)$$

式中 α_0 即 $\alpha(S,\theta,0)$,而 α_p 即 $\alpha(S,\theta,p)$,于是可得出式(1.6—8),(1.6—8′)和(1.6—9),只是因为压力的单位不同,差一个匹配因数 $n=10^{-5}$. 式(1.6—19)中的 $K_0=K(S,\theta,0)$,即海压为0时的割线体积模量。因在低压时压缩曲线为线性,所以 K_0 具有式(1.6—17)所示的 K_T 的性质。如前已述,因为 K_T 是压缩系量 $\varkappa_T$ 的倒数,所以由 K_0 便可以得到海压等于0时的压缩系量。至于压力为 p 时的压缩系量,由式(1.4—6)知,可通过式(1.6—8′)对 p 微分而求得,因而依 EOS80 可以相当精确地计算压缩系量 $\varkappa_T$;类似地也可用 EOS80 对 θ 求微分而计算海水体积热膨胀系量。

2. 用 EOS80 计算比容偏差 δ

依定义式(1.5—5),将 $S=35, \theta=0℃, p=p\mathrm{P_a}$ 代入式(1.6—8′)和式(1.6—9),分别得

$$\alpha(35,0,p) = \alpha(35,0,0)\cdot[1-(np)/K(35,0,p)] \qquad (1.6-20)$$

$$K(35,0,p) = K_0 + A_0(np) + B_0(np)^2 \quad (1.6-21)$$

式中

$$\alpha(35,0,0) = 9.7266204 \times 10^{-4}(\mathrm{m}^3/\mathrm{kg}), \quad K_0 = 21582.27,$$

$$A_0 = 3.35940552, \quad B_0 = 5.03217 \times 10^{-5}, \quad n = 10^{-5},$$

于是可得

$$\begin{aligned}\delta = \alpha(S,\theta,p) - \alpha(35,0,p) &= \delta(S,\theta,0)[1-(np)/K(35,0,p)] \\ &+ \alpha(S,\theta,0)\cdot[(np)/K(35,0,p)-(np)/K(S,\theta,p)] \\ &= \triangle(S,\theta)\cdot[1-(np)/K(35,0,p)] \\ &+ \alpha(S,\theta,0)\cdot(np)\cdot\left[\frac{K(S,\theta,p)-K(35,0,p)}{K(S,\theta,p)\cdot K(35,0,p)}\right] \quad (1.6-22)\end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned}\triangle(S,\theta) &= \delta(S,\theta,0) = \alpha(S,\theta,0) - \alpha(35,0,0) \\ &= 1/\rho_{(S,\theta,0)} - \alpha(35,0,0)。\end{aligned}$$

这样以来，依式(1.6—8)、(1.6—20)～(1.6—22)便可求得比容偏差 δ。在 UNESCO,NO. 34(1983)中，已给出了计算程序，但该文献中温度用的是 θ_{68}，压力原用分巴(abar)输入，计算中程序又换算为巴，因此，若借用该程序计算，须注意匹配因数 n 的赋值。

§1.7 海水的声学和光学性质

声波、光波和电磁波等都可在海水中传播，但唯有声波衰减较小，所以水声技术被广泛应用于海洋研究、海洋开发和军事活动中。

1.7.1 声波在海水中的传播速度

早在 1827 年瑞士物理学家科拉东(Colladon J. D.)和法国数学家斯图谟(Sturm C.)就于日内瓦湖中测量了水中声速，其结果

是 c=1435m/s，与后来的理论计算值很接近。声波在可压缩介质中传播的相速度为

$$c = \left(\frac{1}{\rho}\frac{c_p}{\kappa_T c_V}\right)^{1/2} \tag{1.7-1}$$

式中 ρ 为介质密度，c_p、c_V 为介质的比定压热容和比定容热容，κ_T 为介质的等温压缩系量。依该式算得水中声速为 1436m/s。

在海洋中，海水的密度、比热容及压缩系量均随海水的温度、盐度和压力（与深度相关的静压力）而变，所以声速因时因地而异，大致范围为（1450～1540）m/s，比在淡水中大一些。由实验得知，水温每增高 1℃，声速约增加 5m/s。盐度的增大会使海水密度变大，由式（1.7—1）知这能使声速减小；然而盐度的增大，却会使压缩系量减小（§1.4），又使声速增大；其总的效应是使声速增大，据实测，盐度每增加 1，声速可增加 1.14m/s，小于温度变化 1℃的影响。静压力的增加会使密度增大，但海水的压缩率不大，增密所致声速减小的量不大，而增压所致压缩系量的减小，其增大声速的作用超过前者。实测证明，深度每增加 100m，声速增加 1.75m/s。综合比较，还是温度的影响大。

依实测的水温、盐度和压力，通过 EOS80 可以算出有关的量而得声速值，也可以通过实测及计算拟合提出有效的经验公式而计算声速。1962 年发表的威尔逊（Wilson W. D.）海水声速公式应用就很广泛，其计算值大体与声速仪实测相当。陈镇东和米勒罗的公式（Chen and Millero，1977b），与依 EOS80 计算的结果更为一致。其公式为：

$$c(S,\theta,p) = C_W(\theta,p) + A(\theta,p)S + B(\theta,p)S^{3/2} + D(\theta,p)S^2 \tag{1.7-2}$$

式中 $C_W(\theta,p)$，$A(\theta,p)$，$B(\theta,p)$，$D(\theta,p)$ 是关于 θ 不高于 5 阶、p 不高于 3 阶的多项式，其具体组合形式及有关常系数值，本书附录已列出，以备读者查用。公式的适用范围是：盐度 0～40（S），温度 0～

40℃ (θ_{68})海压 0～$10^8$$P_a$，因原文献所给系数值是对应压力单位“巴”的，故改为 P_a 时应有匹配因数 $n=10^{-5}$。

1.7.2 海洋中声速的铅直分布

海水温度通常是随水深增加而降低的，因之声速由表层向下随水深增加而减小（图 1－9），但是当达到某一深度后，一方面因

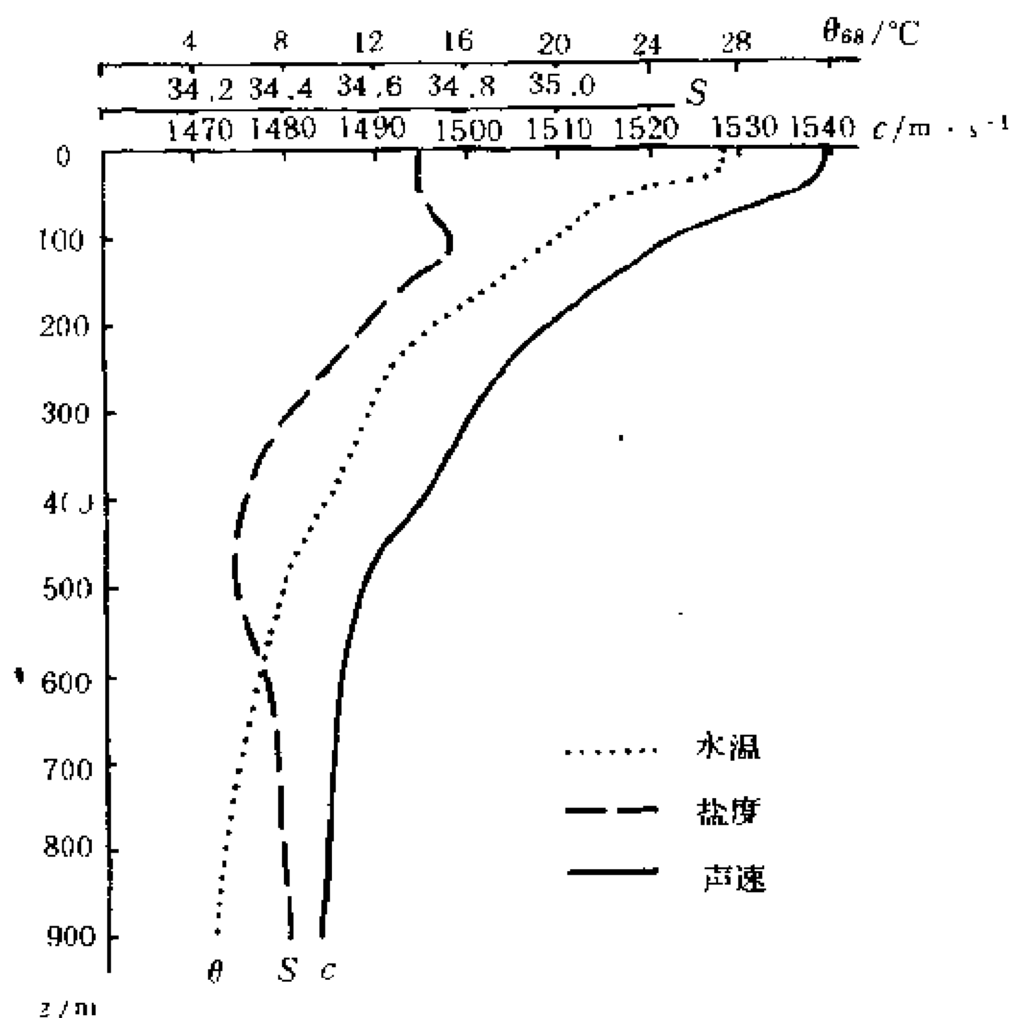


图 1－9 东海（19°24′N，127°48′E）的水温、盐度、声速铅直分布（1987.6.6）

水温的降低愈趋缓慢，另一方面压力增大使声速增加的影响相对显著起来，从而使声速在铅直方向上出现一个极小值。世界大洋中、低纬度海域，声速铅直分布几乎都有此共同特征，即水下存在

一个声速最小层。该层的深层，在大西洋约1200～1300m（图1—10），太平洋则只有900～1000m左右（图1—11），某些热带海域可深达2000m，而温带海域又升到200～500m，在两极海域，因水温随深度的变化不大，故压力对声速的影响从表层开始向下即体现出来，致使声速最小层位于海面附近。

当声波与声速最小层成较小角度向上或向下传播时，其传播路径发生弯曲而折回声速最小层。因此，近于水平方向发射的声音，其声波大多数不经海底或海面反射，而是以声速最小层为轴线，在该层上下返转传播（图1—10）。由于声波能量相对集中于该层上下，损失很小，故可使其传播距离大大超过通常的传播距离，甚至可达数百倍。这一水层称为大洋声道，而声速最小层称为声道轴。利用深水声道超远传播的特点，可以建立海难救助系统，即在大洋中几个岛屿上设立声波接收站，遇难船舶投掷少量炸药在水下爆炸，几千公里外的接收站可收到爆炸信号，由三个以上接收站收到信号的时间差，可推断爆炸点位置，以便营救。类似地，也可建立海啸预报系统或测定导弹溅落位置。因此，深水声道又称为声发波道——SOFAR(*Sound Fixing and Ranging*)Channel。

不仅寒带海域能形成表层声道，温带海域能形成上均匀层的地方，由于强跃层对声波的反射，也能形成表层声道（图1—12）。但是，声道的厚度（即上均匀层的厚度）常随季节变化而变动，再者，跃层对声波也有折射作用（图1—12b），从而使声能减弱。

1.7.3 海洋声学技术在物理海洋学中的应用

水声技术已广泛地应用于海洋研究和开发。例如，回声测深取代缆绳测深，在了解水深分布和洋底地貌特征方面起了决定性的作用；回声测深仪器经过改装之后，已能测量波高、周期、潮位变化和海流；鱼探仪在提高渔获量方面的作用，更为渔业系统所公认。

为获取海洋研究的资料，海洋学家历尽艰险远航调查，而水声

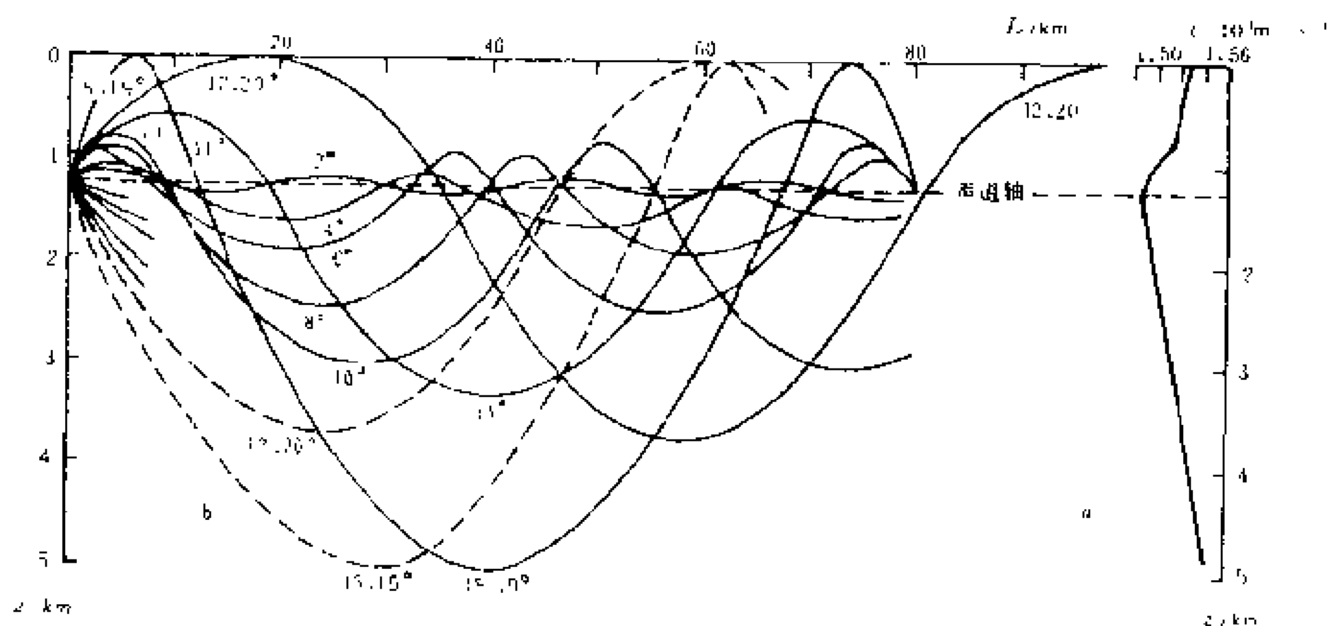


图 1—10　大西洋的声道声线(据 R. J. Urick, 1975)

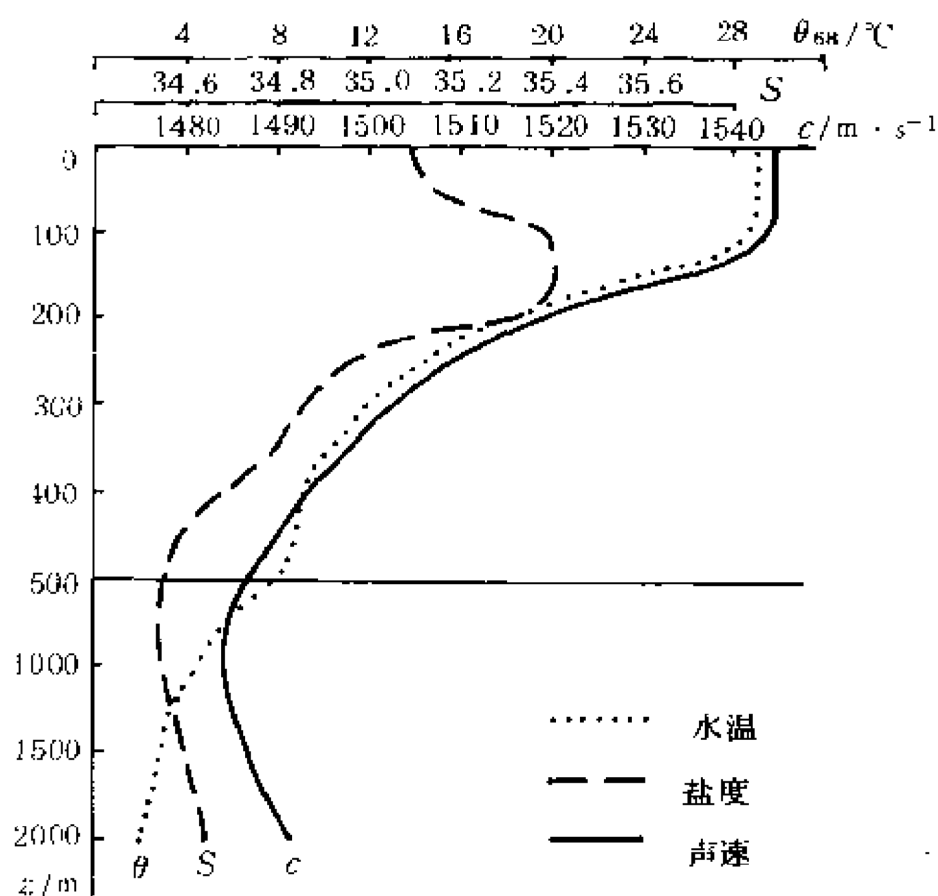


图 1—11　太平洋(0°1.8′N,164°59.8′E)的水温、盐度、声速分布(1979,5,1;"向阳红 09"号调查船)

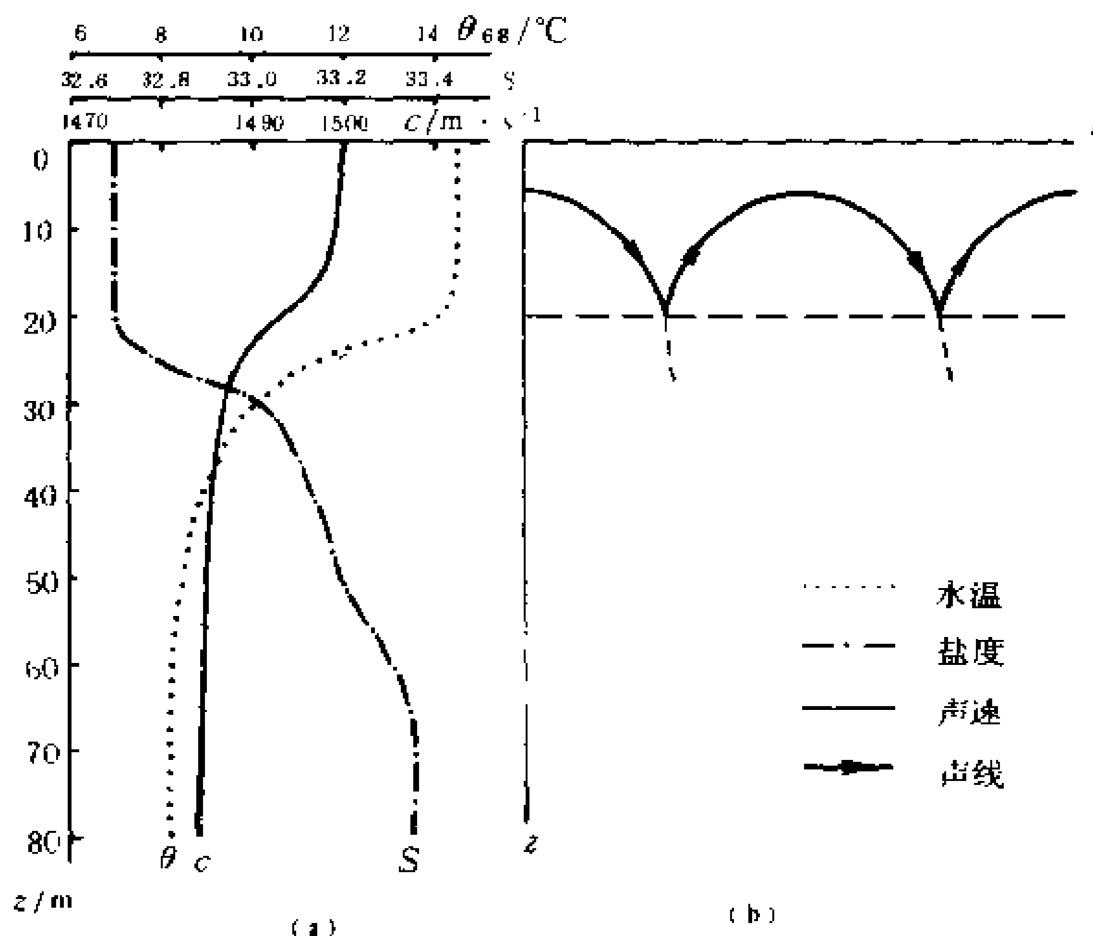


图1—12 黄海(35°N,124°E)温、盐、声速的铅直分布
(1987,5,26)(a)及声线示意图(b)

技术的应用,可为遥测开辟通途。海洋声学层析术在大范围海域中测量海洋动力学特征,已经取得了令人可喜的成果。这种方法又称为海洋声学层析图象法(*marine acoustic tomography*,Munk and Wunsch,1979),从1970年左右开始研究,至80年代已付诸实用。其构想是考虑海水温度、盐度、流向、流速等对声波在海水中传播的影响,利用声速逆推该海域的温度、盐度分布,利用声波往返的速度差反推该海域的流速和流向。具体作法是在测量海区布设若干个水声发射和接收换能器,精确测量声波的传播时间,用电子计算机对取得的速度和往返速度差进行逆运算,于是求出多个换能器包围水域中的温度、盐度、流向、流速的分布。这种方法比调查船巡航

采样观测，有实时、简便和节省人力物力等优点，可以进行大范围（达 $10^5 km^2$ 量级）水域的层析观测，也可以监测中尺度涡之类的中尺度海洋动力过程。若使用频率更低（如 30Hz）的声波，还可以进行更大面积的观测。

1.7.4 光在海水中的衰减

英国海洋生物学家福布斯（Forbes E.）在 19 世纪 40 年代提出，水深超过 550m 的深海是无生命带。这一说法曾风行一时，尽管后来将深度加深至 700m，但终被事实证明是错误的。然而他的根据之一——深海是黑暗的，却体现了光在海水中衰减很快这一事实。自然光在海水中的衰减，主要是由海水的散射和吸收而造成的。

1. 散射

光在海水中传播时，因受介质微粒作用，会偏离原来直线传播的方向而发生散射。海水中含有许多悬浮物质，其直径远大于光波的波长，所以它们引起的散射作用，比水分子的瑞利（Rayleigh L.）散射大得多。一个小体积元 dV 所产生的散射，可用体积散射函数 $\beta(\theta)$ 表示

$$\beta(\theta) = \frac{dI(\theta)}{E dV} \tag{1.7-3}$$

式中 $dI(\theta)$ 为与光束成 θ 角方向的辐射强度（辐射强度定义为沿给定方向的单位立体角内在单位时间内通过的辐射能。由于单位时间内通过的辐射能被定义为辐射通量：$\Phi = \frac{dW}{dt}$，所以辐射强度也可定义为沿给定方向上通过单位立体角的辐射通量，即 $I = \frac{d\Phi}{d\omega}$；$\omega$ 为立体角，其单位为球面度（*steradian*），记为 sr）。E 为 dV 接收到的辐照度（辐照度定义为单位面积上的辐射通量：$E = \frac{d\Phi}{dA}$，它的单位是 W/m^2）。

若光束的初始通量为 Φ，通过厚度为 dl 的海水后，因散射而损失 $d\Phi$，则有

$$d\Phi = -b\Phi dl \qquad (1.7-4)$$

式中 b 为总散射系数，表示散射体的总散射能力，负号表示 $d\Phi$ 和 dl 的符号相反。b 等于 $\beta(\theta)$ 对整个立体角的积分：

$$b = \int_{4\pi} \beta(\theta) d\omega \qquad (1.7-5)$$

在分子散射和较小粒子的散射中，前向散射($\theta=0°$)和后向散射($\theta=180°$)两者相等且为最强；在与入射光线垂直的方向上散射最小，仅为前者之半。在较大的粒子(直径大于光波波长)散射时，入射光在粒子周围产生绕射，光线进入粒子后也会产生多次折射，再加光在粒子表面的反射等等，其散射规律甚为复杂。例如，前向散射大于后向散射，而且这种不对称性随粒子直径与光波波长比值的增大而增大。这种现象称为梅氏(Mie G.)效应。直径远大于光波波长的悬浮颗粒和透明物质的散射，b 值与波长的关系不大，可用下式表示：

$$b = \frac{\pi}{4}\sum_{i=1}^{n} K_i N_i D_i^2 \qquad (1.7-6)$$

式中 n 为粒子的光学类型数，D_i 为粒子直径，N_i 为单位体积的粒子数，K_i 为散射有效面积(亦称有效因子)，它等于被粒子散射的总光能 E 与粒子的截面积之比。

2. 吸收

吸收也使光在海水中衰减，但与散射过程有本质的不同，散射主要是改变了光传播的方向，而吸收则使能量的存在形式发生了变化——光能转变为热能、化学能等。光能转变为海水的热能，是海洋中的主要吸收机制，通过光合作用而转变为化学能，则是海洋生命维系的重要环节。

类似于式(1.7－4)，把因吸收而减少的辐射通量记为 $d\Phi$，则

有

$$d\Phi = -\ a dr \qquad (1.7-7)$$

式中 a 为吸收系数。对厚度为 r 的均匀介质，有

$$a = -\ \frac{1}{r}\ln(1-A) \qquad (1.7-8)$$

式中 A 为吸收比，它是光束被吸收后的通量 Φ_a 与入射通量 Φ_0 之比，即 $A=\Phi_a/\Phi_0$。

海水中的溶存杂质对吸收作用有很大的影响。试验表明，过滤后的大洋水因含杂质很少，其光学性质接近于纯水。然而较浑浊的近岸水，即使反复过滤，其吸收能力却仍远大于纯水。原因是后者含有“黄色物质”——海洋生物及来自陆地的有机体腐败分解而形成的可溶性有机物质，通常呈黄色——能使吸收系数在短波部分随波长减小而迅速增大。自然海水的吸收系数，在短波部分明显地大于纯水，而且随海水浑浊度的增大愈加突出，其原因就在于此。

3. 衰减

进入海水的光辐射，因散射和吸收共同作用，强度便逐渐减弱。设辐射通量 Φ 经过厚度为 dl 的水层后，其损耗为 $d\Phi$，于是

$$d\Phi = -\ c\Phi dl \qquad (1.7-9)$$

式中 c 为衰减系数。由式(1.7—4)、(1.7—7)及(1.7—9)，显然有

$$c = a + b \qquad (1.7-10)$$

故又称为线性衰减系数。图 1—13 给出了不同波长的光在水中的散射系数和吸收系数。不难看出，在 λ 为 0.4～0.5μm 范围内 c 有最小值，也就是说，蓝紫光在水中衰减较慢。这对海水表观光学性质的影响是非常重要的。

1.7.5 水色和透明度

在海洋调查的早期，就已使用简单的仪器——透明度盘和水

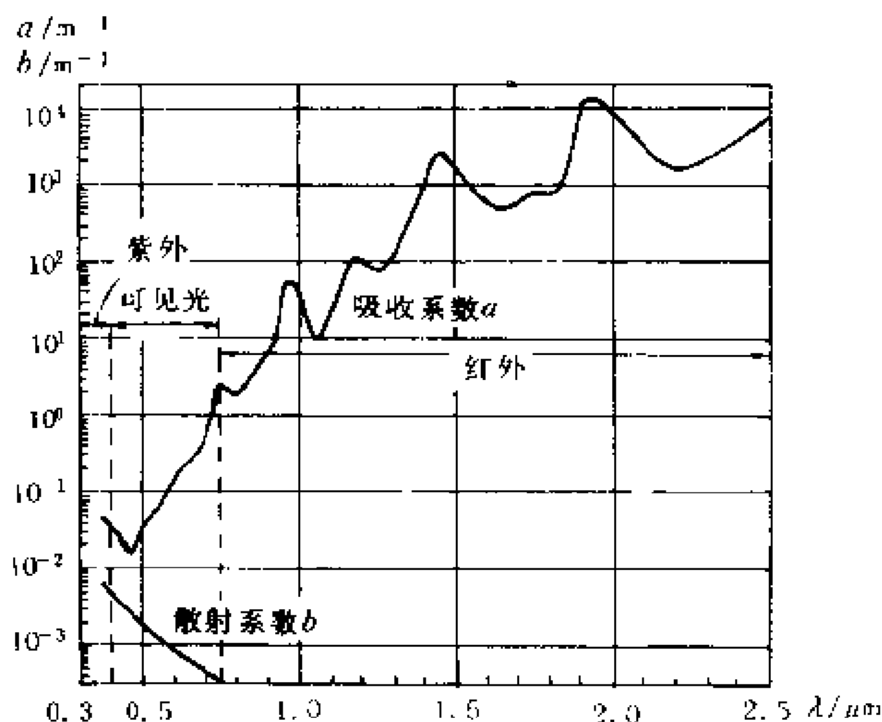


图 1—13　光在水中的散射系数和吸收系数
（据友田好文、高野健三，1990）

色计，来测量海水的透明度和水色。用海面向下和向上辐照度及透射率等概念，很容易揭示透明度、水色和海色的光学原委。

1. 透射率和向上、向下辐照度

透射率是准直光束通过厚度为 r 的水层后的辐射通量 Φ_r 与入射通量 Φ_0 之比，即 $t_r=\Phi_r/\Phi_0$ 它可以用准直光束透射率计来测量，并可测得线性衰减系数 c。

透入海水中的太阳辐射，一部分被吸收转变为其他形式的能量，一部分历经多次散射而形成海洋空间中的漫射光，还有一部分未被吸收、散射的光继续直线传播，后二者对海洋辐照度的分布影响最大。通常以海平面为基准，把法线向上的单位面元上接收到的辐射通量称为向下辐照度，记为 E_d，显然它包括了仍以直线传播的以及散射后的辐射的铅直向下的分量；法线向下的单位面元上接收到的辐射通量称为向上辐照度，记为 E_u，它是散射后向上的分量形成的，其中一部分会射出海面重返大气，从而造成海洋中辐射能的损失。E_d 和 E_u 的分布与太阳高度、波长及水深等有关。例如，一般海区表层 E_d 的极大值在 λ 为 0.48～0.50μm 处，在大洋水中，随水深的增加则移至 0.465μm 处，水深增至 100～500m 后，光

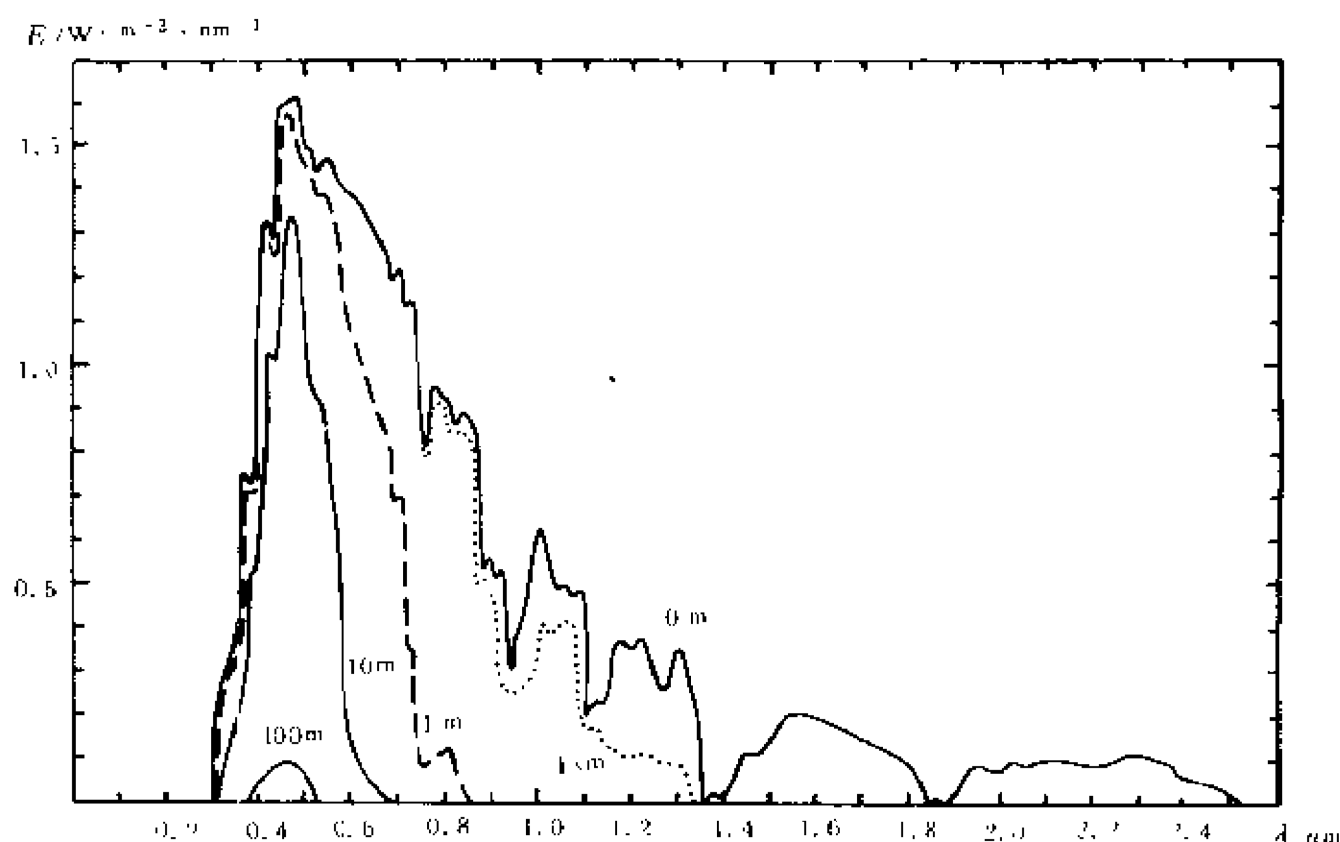


图 1—14　海洋中向下辐照度的整个频谱分布

（据 Jerlov N. G.，1976）

谱分布则局限于很窄的蓝光区（图 1—14）。在浑浊海域中，随着黄色物质和悬浮颗粒的增多，选择吸收作用显著，致使 E_d 峰值愈向波长较大的一侧偏移。在图 1—15 中，Ⅰ为最清洁的大洋水，Ⅱ为热带、亚热带大洋水，Ⅲ为中纬度大洋水，1～9 为浑浊程度递增的近岸水。显而易见，海水越是浑浊，不仅透射率明显降低，而且 E_d 的峰值也越向长波一侧移动。

向上辐照度 E_u 与同一海区同样深度上的 E_d 之比，即 $E_u/E_d=R$，称为辐照比（反射比），它随波长、深度及海水浑浊度而变，最洁

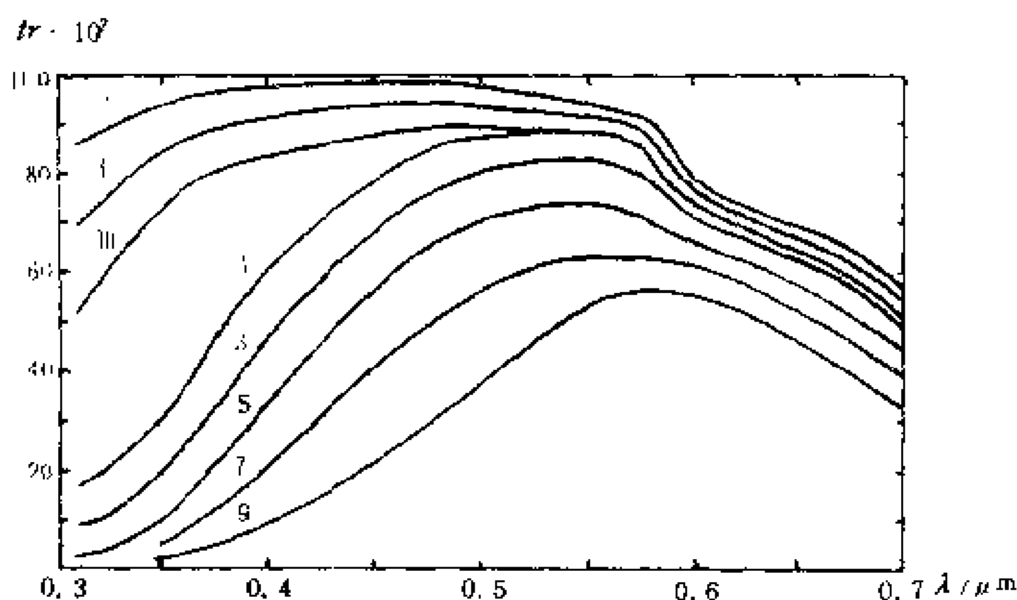


图 1—15　不同类型海水表层的 E_d 透射率 t_r

(据杰尔洛夫,1981)

净水的蓝光可达 10^{-1},浑浊水域甚至仅为 10^{-3}。E_u 随水深、波长、浑浊度的变化与 E_d 类似。

2. 海色、水色和透明度

世界上有 4 个海是以海色命名的,即黄海、红海、黑海和白海。所谓海色,是指在岸边或船上的观察者所看到的海洋的颜色,一般而言,它是由海面反射光谱和海洋的向上辐照度光谱所组成的。由于反射光谱中对天空的反射光又占很大的成分,所以常因天空颜色(晴朗或阴霾)以及海面状况(平静或波涛汹涌)的变化,而使观察到的海色有变化。白海因冰封雪盖海色淡白,黑海因水色深暗且多风暴而分别得名;黄海因古黄河流入、含沙量高,使向上辐照度谱分布中黄色波段显著,红海因有束毛藻繁盛而使海水呈红褐色而分别有了彩色的名字。若不在"名"与"实"上过分挑剔的话,这些名字的确能部分地反映上述海区的某些表观光学性质。

应该指出,水色因不受天空反射光及海面状况的影响,在表征特定海域海水的表观光学性质上,要比海色更科学。水色是海水、

水中溶解的和悬浮的、有机的和无机的物质，对入射光的散射与吸收的选择性等等综合作用的结果，粒子含量和粒度组成的变化，特别是黄色物质的浓度，对水色变化的影响更大。

洁净的大洋水，光学性质与纯水相似，散射是以分子散射为主的，依靡瑞尔(Morel A.，1974)的研究成果，其散射系数与波长的(-4.32)次方成正比，这就使得散射光中的短波部分的比例显著的增大。由图1—13可知吸收系数在短波部分很小，尤在蓝光波段达最小。两者综合影响的结果，则使短波部分的散射增强，也使这部分光较易射出海面，从而使海洋的水色呈现蓝色。

近岸海域则不然，由于浑浊程度的增加，特别是黄色的物质的增多，选择吸收的结果是使短波部分迅速衰减，从面导致向下辐照度的峰值向长波一侧偏移(图1—15)，向上辐照度也有类似变化，所以海水浑浊度愈高，水色愈低。

当然，颗粒较大、数量较多的悬浮物质本身的颜色，特别是大量繁殖的浮游生物的颜色，也对水色有影响，如黄海和红海即如此。

透明度与水中能见度有很密切的关系，但从传统的概念看，它是专指从海面铅直向下的，因此它与漫射光随深度增加而铅直向下衰减有直接的联系，所以在透射率和透明度之间，存在着一定的数量关系。尽管海洋调查中普遍使用透明度盘目测，但准直光束透射率计却能不赖目测而给出准确的透明度值，因此透射率计也被称为透明度仪。

在渤、黄、东海的近岸海域，透明度小于5m，水色也低(水色号大于6)，在外海特别是黑潮区，透明度和水色则都很高。如1987年6月在29°24′N，127°48′E附近测得透明度大于40m，水色1～2号。根据前面介绍的光在海水中衰减的规律，以及实测的衰减系数的分布(图1—16)，是容易解释这些分布特点的。

1.7.6 光学技术在物理海洋学中的应用

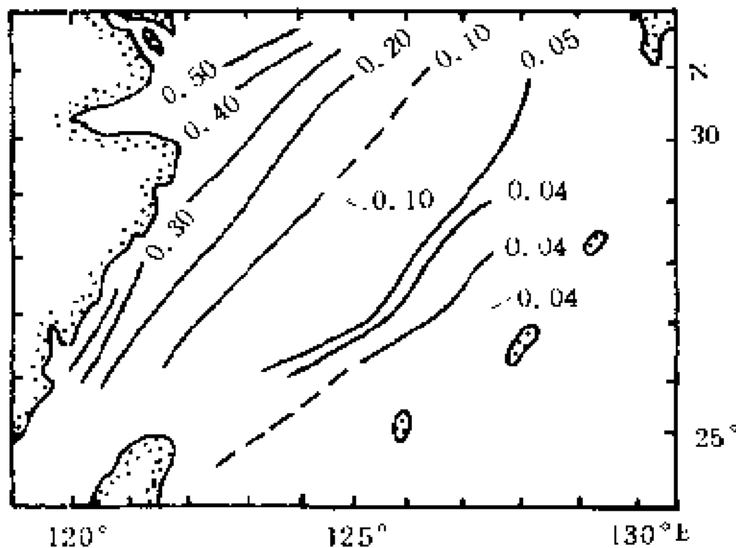


图 1—16 东海 40m 层漫射光衰减系数(m^{-1})的分布(1984,6~7)(据"黑潮调查研究论文集,1987)

用遥感方法接收海面向上辐射光谱和海面热辐射,借助电子计算机进行数据和图象处理,可以得出海洋的多种参数。由于人造卫星能够同步连续监测广阔的海洋空间,比调查船、飞机、浮标观测有很多优越之处,所以愈来愈引起人们的重视。目前卫星遥感已有可见光、红外和微波等多种波段,可监测水温、锋面、水色、叶绿素、海上风速风向、海冰、海面倾斜、盐度和污染等项目。

1. 水色、叶绿素和悬浮体

雨云卫星(NIMBUS)上的海岸带水色扫描仪(CZCS),大地卫星(LANDSAT)上的多光谱扫描仪(MSS),诺阿卫星(NOAA)上的改进型甚高分辨率辐射仪(AVHRR)等,都能传输水色、叶绿素含量和悬浮体分布的信息,可以分析水色和锋面。

2. 水温

诺阿卫星上的(AVHRR),雨云卫星及海洋卫星(SEASAT)上的多通道扫描微波辐射仪等,都可获取海面及其下数毫米水层的温度信息。这与"表层水温"的传统概念虽有差别(§2.4),但能同步、连续、大面积而实时地给出水温分布,无疑是其优越之处,且在

分析水温锋、水系和水团等方面有广泛的应用前景。

3. 海面高度

经典的动力海洋学以研究低频、定常状态为主，那时也不能精确地测定海面高度及海面倾斜。当今物理海洋学已十分重视中、高频运动和天气式变化，诸如由局地风场引起的埃克曼抽吸所造成的水位升降的研究等，对海面高度的测量就寄以厚望。美国和欧洲空间局的海洋卫星、动力实验卫星（GEOS）、海面起伏实验卫星（TOPEX）等等，都载有高度计，测量精度可达 3cm，对研究全球海水运动很有应用价值。

4. 海面粗糙度

海洋卫星及欧洲遥感卫星上的散射计、高度计及合成孔径雷达，可获取海面粗糙度及其分布，从而推导出波高、海冰、风速风向等，应用前景非常广阔。

我国的风云 1 号卫星，也能获取多种海洋信息。

§1.8 海水的其他物性及海冰

1.8.1 **海冰**

关于海冰的物理性质，不少学者进行了深入的研究，本节不拟详细介绍，而只侧重于讨论它和海洋环境的相互影响。

1. 海冰的盐度和密度

海水结冰时，会将部分海水和空气封闭在冰中。在温度高于 -8.2℃时，海冰是由纯水冰和封闭在冰中的“卤水”及空气泡组成的；当温度继续下降后，还陆续有各种盐类结晶而混于其中，致使海冰与纯水冰的物理性质多有不同。

海冰的盐度是指将海冰融化成液体后的盐度，它与冻结前海水的盐度、冻结的速度以及冰的年龄等有关。新生海冰的盐度为 3

～25，低于海水，原因是在结冰时已把大部分盐排到周围的海水中。这一过程对海水增密的影响是很大的：首先，因为盐分的增加直接增加了单位体积海水的质量；其次，水温接近冰点时，盐度对体积膨胀系量的影响变得更明显。据计算，在 101325P_a 条件下，$S=35$ 的海水由 20℃升高 1℃所致密度的减小，与盐度降低 0.39 的效应相当，但当水温为冰点时，温度下降 1℃所致密度的增大则与盐度增加 0.035 的效应相等。况且盐度的增大将使海水的冰点更降低（见表 1－9），一般海水的盐度大都高于 24.695，故 $\theta(max)$ 比 θ_f 降得更快（图 1－7），因而在结冰之前，随着水温的下降，表层海水的密度会继续增大，这就有可能导致表层冷水的下沉。这一过程对南极底层水团的形成，是有重要意义的。

纯水冰在 0℃时密度为 917kg·m^{-3}，海冰中因有气泡，密度通常低于该值，新生冰大致为（914～915）kg·m^{-3}，冰龄愈长，由于卤水从海冰中渗出，密度亦愈低，到夏末甚至可降到 860kg·m^{-3} 左右。因为密度小，所以海冰都浮在上面，即使巨大的冰山，也有 1/7（平顶冰山）至 1/3（尖顶冰山）露出海面。

海冰覆盖于海面之上，可使潮汐、波浪能量的相当一部分，消耗于搬运、破碎海冰的过程中，因而使某些海区的潮位涨落，潮流速度和波高、波流等，冬季明显小于夏季。然而海冰的堆积和冰山的漂移，也会对航运和海上石油开采等造成灾害。1912 年 4 月 11 日夜，46000t 的豪华客轮泰坦尼克号（Titanic）在北大西洋上与冰山相撞而沉没，1715 人罹难，是世界航海史上最大的悲剧。我国渤海和北黄海也有结冰现象，1936 年和 1969 年渤海出现的严重冰封，也造成较大的损失。

2. 海冰的比热容、热导系量和反射率

纯水冰的比热容为 2000J·kg^{-1}·K^{-1}左右，随温度的变化不大。海冰的比热容则随温度有较大的变化，特别是当温度接近冰点附近时。这是因为，海冰盐泡中的卤水随温度的升降有相变——降

温使卤水中的纯水结冰析出，升温则使冰融化进卤水之中。因为伴随有结冰和融化，致使海冰的比热容远大于纯冰，甚至大数倍到数10倍。小野延雄(1968)给出了温度$\theta \geqslant -8.2$℃时的海冰比热容的计算公式，考虑到SI的规定，改写如下：

$$
\begin{aligned}
c_i = 2.114334 \times 10^3 + 7.53624\theta \\
- (3.34944 - 8.3736 \times 10^{-2}\theta \\
- 1.80513882 \times 10^3\theta^{-2})S
\end{aligned}
\quad (1.8-1)
$$

式中S为实用盐标，c_i的单位是$J \cdot kg^{-1} \cdot ℃^{-1}$。

海冰的热导系量比纯冰小，原因是海冰中有气泡，而空气的热导系量是很低的(表1—7)。对于-2℃和$S<10$的海冰而言，其热导系量约$(1.5\sim2.5)W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}$，虽然比海水的分子热导系量大，但远小于海水的涡动热导系量。因而，海面有冰就限制了海洋向大气输送热量，而且也使蒸发失热大为减少，犹如给海洋盖上了一层“保温被”。

因为海冰上部的气泡比下部多，所以海冰的热导系量随深度——冰层顶面向下的距离——的增加而增大，在北冰洋的实测资料已证明这一点。从Neumann等(Neumann G. and W. T. Pierson, 1966)给出的不同深度上的热导系量看，超过1m以后海冰的热导系量就与纯冰相差无几了。

海水对太阳辐射的反射率较小，平均只有0.07，海冰的反射率却大得多，即使浑浊的冰面反射率也有0.45～0.5，在干净的冰上则可达0.6～0.65。海冰的总体积虽然比陆冰少(不到陆冰总体积的2×10^{-3})，但海冰的覆盖面积却超过了陆冰，因而其反射的能量相当大。正因为如此，极地大面积的冰覆盖，对气候的影响就为人们特别重视。在研究这一影响机制时，有人提出存在所谓“正反馈过程(*Positive feedback*)”，认为海冰覆盖海面增大了反射率，使海水吸收的辐射能减少，从而降低了气温；而气温的降低又会导致形成新冰增加覆盖面积，将使太阳辐射的反射损失更多，结果是温

度越来越低。基于这种过程所建立的气候模式，已用于解释古代冰期的形成以及推测未来的气候趋势。当然，海洋——海冰——大气系统之间的过程，绝非仅此简单的“正反馈”，很可能还存在其他的“负反馈”过程，所以现今的海洋与气候能保持相对的稳定。

1.8.2 海水的其他物理性质

1.表面张力

在水的自由表面上，水分子之间的吸引力所形成的合力，使自由表面积趋向最小，这就是表面张力。常温下的液体物质，除水银之外以水的表面张力为最大，纯水在0℃时的表面张力达$7.564\times10^{-2}N\cdot m^{-1}$，随着温度的升高而降低。海水的表面张力也随温度的增高而减少，但随盐度的增高而增大，然而两者变化的幅度都不大，倒是杂质的增多会使海水的表面张力减小。

表面张力对水面毛细波的形成有很重要的作用，此时，表面张力几乎是唯一的恢复力，重力倒显得无关紧要了，因此这种波又称为表面张力波。因为表面张力波的位相速度正比于表面张力的平方根，所以水面上的表面张力波，比水银之外的其他液体表面上的毛细波速度要大得多。

2.渗透压

如果在海水与淡水之间放置一个半透膜——水可以透过，但盐类不能透过——淡水一侧的水便会通过半透膜而渗向海水一边。渗透的结果是使海水一侧的压力增大，直至达到平衡状态。已达平衡状态时，膜两侧的压力之差，称为渗透压。海水的渗透压随盐度的升高而增大，低盐时随温度的变化不大，而高盐时随温度的升高渗透压增幅较大。例如盐度为27的海水，由0℃至25℃，渗透压增加$1.6\times10^{5}P_a$，而盐度接近38时由0℃至25℃渗透压增幅可达$3.1\times10^{5}P_a$。

海水渗透压对生活于海洋中的生物有很大的影响。生物的细

胞膜就是一种半透膜，但不同生物的细胞膜性质有差别，所以它们各有不同的适盐范围，这是渔场海洋学所关注的问题。

根据渗透的原理，亦可设想利用海水与淡水之间的渗透作用，形成水位差（理论值可达 250m）而发电。

3. 粘度

运动中的海水，其各层速度不会是完全相同的，于是相邻水层会出现相对运动。由于分子的不规则运动，在相邻水层之间便有动量的传递，从而产生切应力。设垂直于剪切面的方向上海水的速度梯度为$\frac{\partial u}{\partial z}$，则切应力

$$\tau_{x,z} = \mu \frac{\partial u}{\partial z} \tag{1.8-2}$$

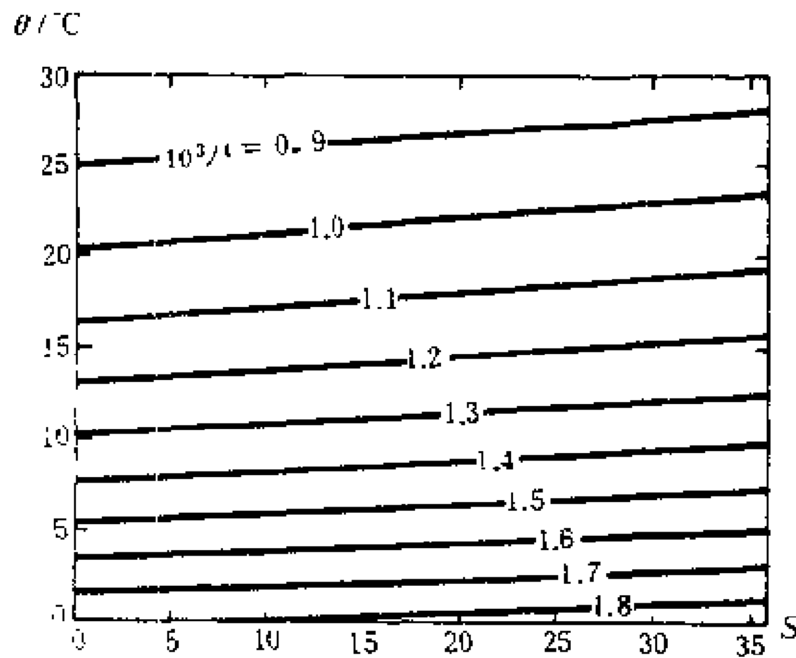


图 1—17　气压为 101325Pa 条件下，$\mu\times10^3$ 随温度和盐度的变化(据 Dietrich 等，1980)

式中 μ 称为粘度(*Viscosity*)，亦称动力粘度(*dynamic viscosity*)，单位是“帕/秒”。相应地，运动粘度定义为 $\nu=\mu/\rho$，单位是 m^2/s。

μ 随盐度的增加略有增大，但随温度的上升 μ 值的下降却相当迅速，如图 1—17。

在讨论大尺度的涡动状态下的海水运动时，要考虑比 μ 和 ν 大得多的湍流粘度或涡动传递系量 A_M 以及动量湍流传递系量 A_M/ρ。

4. 电导率

海水中溶解了许多物质，其中大都是强电解质，它们以离子形式存在于海水之中，从而使海水具有比纯水大得多的导电能力，即使比湖水或河水也可大 10^3 倍以上。导电能力的大小可用电导 G 来衡量，$G=1/R$，单位是西[门子](*Siemens*)，依SI记为 $S=\Omega^{-1}$，是电阻 R 的倒数。(由于电阻的单位是欧[姆](*ohm*)，故电导的单位西[门子]在美国称为姆[欧](*mho*)，并记为℧。)

截面积为 $1m^2$，长度为 1m 的海水柱的电导，定义为该种海水的电导率，记为 γ 或 κ，单位是西/米(S/m)。

海水的电导率与海水中离子的种类及其浓度、海水的温度和压力等因素有关。在海水的主要离子中，Cl^- 和 Na^+ 含量最多，对海水电导率的贡献也最大。例如，对 $S=35$，$\theta=23$℃的海水而言，Cl^- 的贡献占 64×10^{-2}，Na^+ 的贡献占 29×10^{-2}，二者合计占 93×10^{-2}，若再加上其他几种主要盐类的离子，总贡献可占 99.984×10^{-2}(中国大百科全书，1987)。因此可以说，海水的电导率基本上取决于溶解盐类。实测证明，在压力和温度不变的情况下，海水的电导率与盐度有一定的函数关系，鉴于此，便可依精确测定的海水电导率，计算出海水的盐度值。这就是电导测盐的根据。

需要指出的是，海水电导率也是温度和压力的函数。压力的影响不如温度那样显著，平均而言，压力增大 1×10^4Pa，海水电导率增大 1×10^{-5}S/m，已有精度相当高的经验公式计算其具体量值。相比之下温度对电导率的影响则显著得多，所以在盐度新定义和1978年实用盐标的定义中，都特别指定15℃条件下的电导比 R_{15} 和 K_{15} 做标准。关于温度对电导率的具体影响，也已进行了详尽的研究，如UNESCO海洋科技文献NO. 37(1981b)中，有布莱德肖等(Bradshaw A. L. *et al*)、多菲尼等(Dauphinee T. M. *et al*)以及波伊森(Poisson A.)等人的研究成果。

第二章　世界大洋热量、水量平衡和温、盐、密度场

海水的温度、盐度和密度，是极为重要的三个物理参数，世界大洋中的水温、盐度和密度的分布，与物理海洋学所研究的许多重要问题，都有很密切的关系。热量、水量平衡则是制约大洋水温、盐度和密度分布的重要因素。

§2.1　海面热收支

海洋中的热能几乎完全是通过海面而接收的太阳辐射能。海水内部放射性物质以及生物、化学和海水运动释放的能量，相比之下其量甚微。通过底边界由海底热流所输送的热量（§1.2），除在热活动强烈的局部海区外，影响也不大；对整个世界大洋而言，与通过海面而进入的太阳辐射能相比，无疑属于小量，在考虑海洋热量平衡时，一般也忽略不计。

近代海洋研究表明，整个海洋的平均温度多年来几乎没有什么变化。调查资料更进一步证实，大洋深处60～70年前的水温值与现今的重测几乎相等。因此，如果不是研究超长期变动的话，那就可以假定通过海面输入和输出的热量相等。

通过海面的热收支，主要有太阳辐射、海面有效回辐射，蒸发耗热以及海—气之间的感热交换，即

$$Q_0 = Q_s - Q_b \pm Q_e \pm Q_h \qquad (2.1\text{—}1)$$

式中 Q_s 表示通过海面进入海洋的辐射能；Q_b 是海面有效回辐射，Q_e 为海水蒸发消耗的热量或凝结时释放出的热量；Q_h 是海—气之

间因温度不同而发生的显热交换。虽然平均而言，在总体上海洋热能是平衡的，但在局部情况下，仅此四项却不一定达成平衡。如所周知，对同一地点来说，夏季通常是海洋通过海面吸收热量而使水温升高，冬季则损失热量而降温。换言之，即 Q_0 并非时时处处总为0，海洋有热量净收入时 $Q_0>0$，反之有净支出时 $Q_0<0$。

2.1.1 通过海面进入海洋的辐射能 Q_s

太阳辐射是地球能量的来源，其中除可见光以外，还有红外和紫外波段等辐射，分布于从X射线到无线电波的整个电磁波谱区内，但是 99×10^{-2} 的太阳辐射能集中在 0.17μm～4μm 的波段内。单位时间射达大气上界的单位面积上的太阳辐射总能量，称为太阳常数，常以 S 表示，也有人写为 S_0。世界气象组织1981年10月在墨西哥召开的仪器和观测方法委员会第八次会议上通过，S 取值为 $(1.96\pm0.01)\text{cal}\cdot\text{cm}^{-2}\cdot\text{min}^{-1}$，换算为SI单位制即 $(1367\pm7)\text{W/m}^{-2}$。太阳辐射在通过大气层的过程中，紫外线内 $\lambda<0.29\mu\text{m}$ 的部分被臭氧吸收；红外线中的一部分被水蒸汽和二氧化碳吸收，但吸收的数量少影响不大。与此成强烈对照的是，水蒸汽和二氧化碳对地球向大气的长波辐射却吸收较多，从而使大气变暖，此即所谓“温室效应”。

未被吸收的太阳辐射，以直达辐射和散射辐射两种形式射达海面，二者之和即为到达海面的总辐射。它与太阳高度（太阳光线与地球表面观测点切线之间的夹角）、大气透明度和云量、云状的关系很密切，不同地点（纬度）和不同季节也有明显不同。平均而言，到达海面的总辐射，只有太阳辐射来的能量的一半。其实，这些能量也未能全部进入海水中，因为其中的一部分又被海面反射回大气和天空。真正能进入海水中的辐射能，即式(2.1—1)中的 Q_s，有经验公式计算，例如下式（吉尔，1988；友田好文等，1990）

$$Q_s = Q_{s0}(1-0.7C)(1-A_S) \qquad (2.1\text{—}2)$$

式中 Q_{s0}为晴空时到达海面的总辐射，C 为云量，A_s 为反射率——从海面反射的辐射与入射到海面的总辐射之比——它与太阳高度和海面状况有很大关系。一般而言海面的反射率是较小的，尽管在高纬海区有可能大于 10×10^{-2}，但整个海洋平均起来却只有 7×10^{-2}左右，因而达到海面的总辐射，大部分还是进入了海洋中。当然，在高纬海面有冰覆盖时反射率增大，海水得热便相对减少，这对海洋热状况的影响也是相当大的。由于低纬海域的太阳高度，平均而言比高纬海域大得多，所以平均的太阳总辐射，低纬海域明显的大于高纬海域。从日照时间来看，冬半年低纬海域又比高纬海域长得多，因而太阳辐射的这种经向差异，冬半年比夏半年更显著。

进入海水之后，Q_s 的一部分被海水吸收，另一些则被海水散射。散射的大部分辐射能，几经周折也被海水吸收，只有一小部分返转射出海面。海水吸收的辐射能，就转化成海水的热能。

2.1.2 海面有效回辐射 Q_b

世界大洋的水温虽然因时因地而异，但却高于热力学温标 0K；表层则更高一些，三大洋平均约为 17.4℃，即 290.55K。因此也要向外辐射。当然，与太阳辐射相比，其辐射量小得多，而且由于温度较低，所以主要是长波辐射。辐射能最强者，波长约为 10μm，而 9×10^{-2}以上的辐射能，集中在(4～80)μm 的波段内。

大气中的水汽和二氧化碳，对长波辐射的吸收能力很强，海面长波辐射的$(75\sim95)\times10^{-2}$即被其吸收。大气的温度也高于 0K，同样会放出辐射能。其中向上的辐射进入太空；向下的辐射——称为大气逆辐射，则几乎全部被海水吸收。海面辐射与大气逆辐射之差，称为海面有效回辐射，即式(2.1—1)中的 Q_b。计算大洋的有效回辐射，常用莫勒(Möller，1953)给出的经验公式，现改写为：

$$Q_b = 5.67051\times10^{-8}T^4[1-(0.210+0.174\times10^{-2.055}e_0)(1-0.765C)] \qquad (2.1—3)$$

式中 T 为海面的热力学温度(K),e_0 为海面上的水汽压(Pa),C 为云量,所得 Q_b 的单位是 W/m^2。中国科学院海洋研究所海洋气象组(1979)在计算西北太平洋及我国近海的 Q_b 时,所用公式,可改写如下:

$$Q_b = 0.94\sigma T^4(0.39 - 0.005\sqrt{e_a})(1 - kC^2) + 3.76\sigma T^3(\theta_w - \theta_a) \quad (2.1\text{—}4)$$

式中 T 为空气的热力学温度;θ_w,θ_a 是海面水温和海上气温(℃);Stefan--boltzman 常数 $\sigma = 5.67051 \times 10^{-8} W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$;$e_a$ 为空气水汽压(Pa);C 为云量,k 为云的阻拦系数,其经验公式为

$$k = 0.59 + 0.005(\varphi - 20°) \quad (2.1\text{—}5)$$

式中 φ 为地理纬度。用以上量及相应单位算得 Q_b 的单位是 W/m^2。

张淮等(1983)则依海面有效回辐射的定义和大气辐射理论,导出海面有效回辐射的一般表达式,借助对海洋大气的铅直结构的分层描述,对该表达式进行运算得出简化分析式,以便用常规观测资料来估计海面有效回辐射。用海洋站的资料计算表明,在一定的海气温差和湿度差下,晴天与阴天的量值相差较大,晴天的有放回辐射甚至比阴天大 80×10^{-2}。分析还表明,海面粗糙度对有效回辐射的影响与云层类似。

2.1.3 蒸发耗热 Q_e

每年从海面平均蒸发掉 126cm 厚的一层水(Budyko,1974),而海水的比蒸发潜热又很大,所以海洋因蒸发而损失的热量是很多的。据计算世界大洋因蒸发而耗去的热量,可占入射到地球上的总辐射量的 23×10^{-2}。当然大洋不同海域的蒸发耗热是有差异的,原因是各处的蒸发量多寡悬殊。

直接观测海面蒸发量是困难的,因之多借助于间接计算。为此,许多作者循理论分析或经验统计,提出了计算蒸发量和潜热损失的公式。如 Sverdrup 等(1949)提出计算大洋上年平均蒸发量的

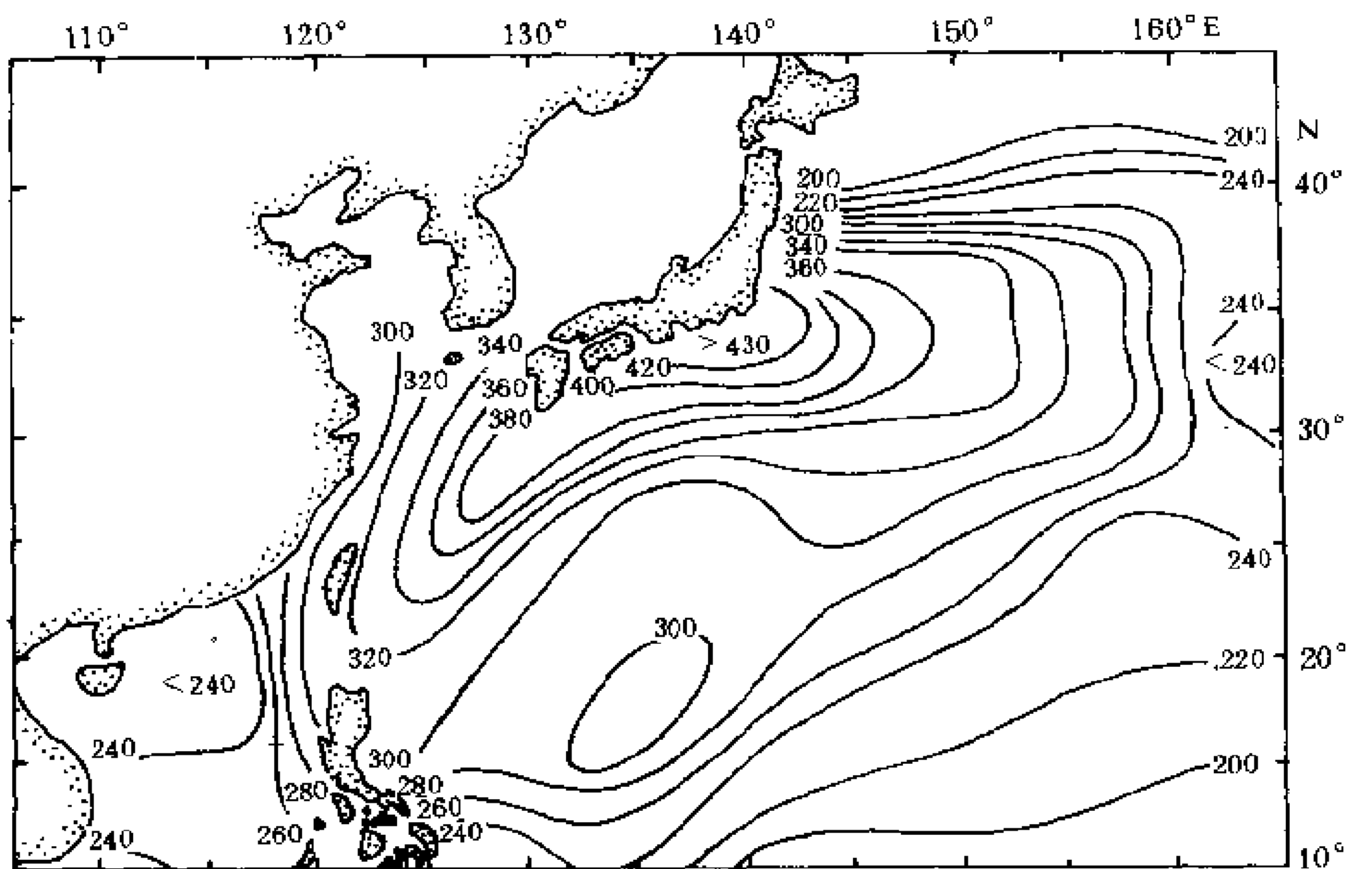


图 2—1　黑潮流域 1 月份蒸发耗热(W/m²)分布

经验公式，后来，舒莱金(Шулейкин В. В. 1959)用印度洋、太平洋及其附属海的大量观测资料，建立了计算蒸发耗热的经验公式，与斯韦尔德鲁普的计算很一致。布德科(Будыко М. И)1945～1978 年先后 3 次计算了世界大洋热平衡各组成项。从其大洋年蒸发耗热分布图可见，在副热带和信风区，由于蒸发量大，是耗热高值区，而在湾流和黑潮区则出现极大值。其原因显然是，暖流北上到达中纬度海域后，水温远高于气温，特别是冬季又盛行干冷的偏北风，使蒸发特别强烈，所以耗热量更大。图 2—1 为黑潮流域 1 月份蒸发耗热分布，在日本南方黑潮流经区，最大耗热可大于 436W/m²。所用计算公式如下：

$$Q_e = 6.93 \times 10^{-5} \times (597 - 0.6\theta_w)(e_w - e_a)V \quad (2.1-6)$$

式中 e_w 为依海面水温 θ_w(℃)计算的饱和水汽压(Pa),e_a 为空气水汽压(Pa),V 为海上 8m 高处风速(m/s)。需要注意的是,当大气层结稳定时,考虑到其抑制作用,尚需加以相应的订正(中国科学院海洋研究所海洋气象组,1979)。

2.1.4 感热交换 Q_h

由于海洋表层水温和气温一般是不相等的,所以两者之间通过热传导也有热量的交换。这一热交换过程主要受制于两个因素:海面风速和海—气温差。风的作用表现在空气的运动能促进海—气之间的热交换,而海—气温差的量值和符号则决定着热量传导的多寡和方向。当气温高于水温时,近海面的大气层结是稳定的,热量的传递是向下,但因主要是分子热传导,所以传导的热量不多。反之,当水温高于气温时则不然,因为近海面大气层结不稳定贴水层空气获得来自海水的热量后,产生热力湍流和对流,能把所获得的热量迅速地向上输送。与此同时,表层海水由于失热降温而增密,也产生了对流,其效应是把下层海水的热量再输运到表层,从而使这种热交换过程得以继续不断地进行下去,直至两者的温度相等。

计算感热通量 Q_h 常用块体公式(*bulk formula*):

$$Q_h = c_p\rho_a C_h(U_z - U_w)(\theta_w - \theta_z) \qquad (2.1—7)$$

式中 C_p 为比定压热容,ρ_a 为空气密度,C_h 为块体交换系数,U_z 和 θ_z 为海面上高度为 z 处的风速和温度,而 U_w 和 θ_w 为海面上的风速和温度。

由于蒸发和感热交换都是在海—气边界层内进行的,也都受制于边界层内的层结和湍动过程,所以从鲍恩(Bowen J. S. ,1926)开始,许多人把蒸发和对流热传导这两个过程联系起来探讨。例如,类似于式(2.1—7),将蒸发耗热写成如下形式:

$$Q_e = L\rho_a C_e(U_z - U_w)(q_w - q_z) \qquad (2.1\text{-}8)$$

式中 L 为比蒸发潜热，C_e 为水汽输送系数，q_w 和 q_z 分别为海面上的饱和比湿及高度 z 处的比湿；对于系数 C_e 和 C_h，依各种不同的边界层模式，所求得的量值有所不同，但差别都不大，若假定 $C_e = C_h$，则鲍恩比为

$$\frac{Q_h}{Q_e} = \frac{c_p(\theta_w - \theta_z)}{L(q_w - q_z)} = R \tag{2.1-9}$$

在大洋上，鲍恩比平均为 0.1，也就是说，感热交换仅为蒸发耗热的十分之一。于是，若已知蒸发耗热 Q_e，便可依鲍恩比计算 $Q_h(=RQ_e)$。关于波动海面的感热和水汽通量计算，张淮(1981)基于大气边界层的动量、感热和水汽通量的基本方程，利用空气动力学理论讨论了贴海面动量、感热和水汽输送的参数化问题。

2.1.5 海面热收支随纬度的变化

世界大洋年平均海面热收支各分量，随纬度的变化如图 2－2。显见，通过海面进入海水的净辐射($Q_s - Q_b$)，随纬度的变化很大。在北纬 10°～20°海域年平均高达 157W/m² 以上，在 20°S～25°N 范围内均高于 140W/m²。纬度再增加时，净入辐射值则急剧下降，纬度高于 50°以后，便降到 50W/m² 以下了。蒸发耗热的量级与($Q_s - Q_b$)相当，在中、高纬度的变化趋势也相似；但在低纬热带海域，因热带洋面上湿度大，蒸发量显著低于亚热带，致使 Q_e 随纬度的变化呈双峰形式。由图还可知，Q_h 的量值既小，且随纬度的变化也不大。

海面热收支的余项 Q_0 在各纬度带上的年平均值，差别也很明显，并且有引人注目的正值区和负值区。前者(图中竖直影线区)在低纬海域，表明海洋有净的热量收入，最大值出现于 0°～10°N，可达 41W/m² 以上；后者在中、高纬度海域，表明海洋有净的热量支出，在 50°～70°N 支出最多，接近 35W/m²。

全年平均有净收入的海域，由于热量的积累，水温应不断升

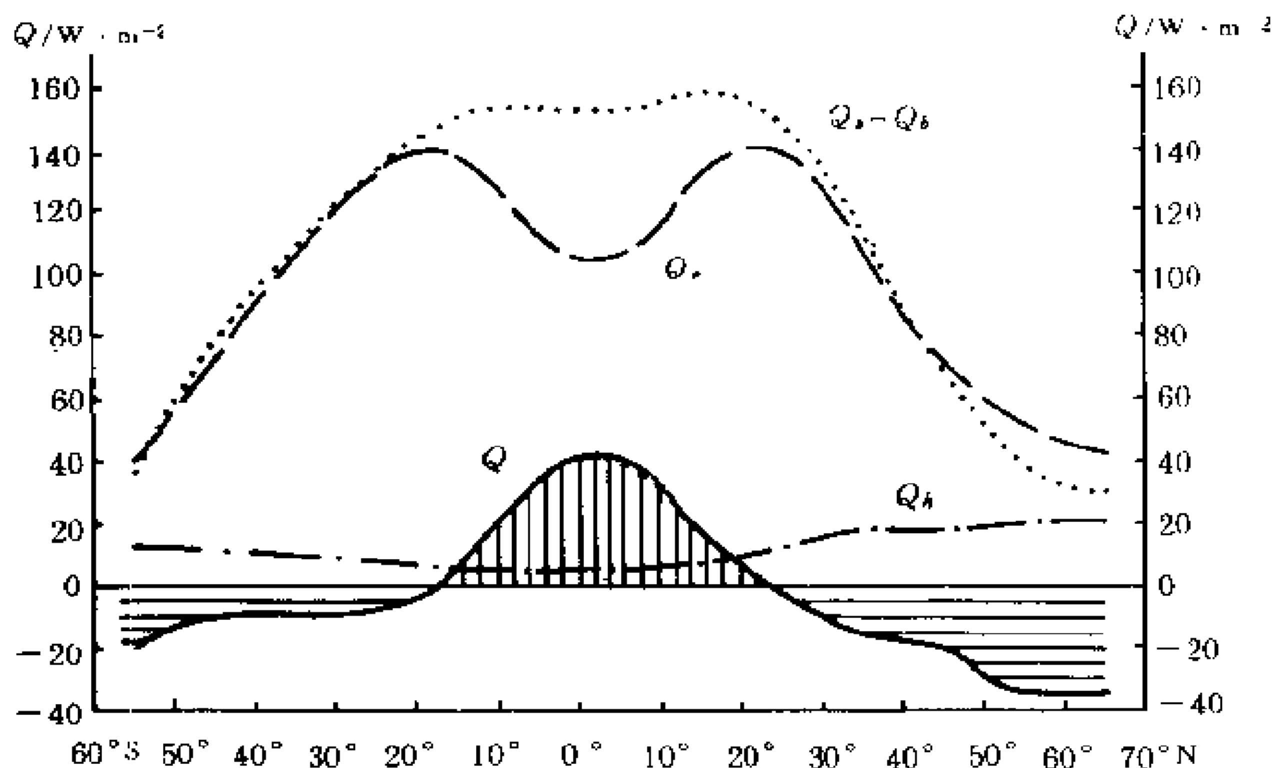


图 2—2　世界大洋各纬度带年平均海面热收支

高，反之在热量净支出的海域水温会不断降低。若照此推论，低纬海面应年复一年地增温，而中、高纬度海面水温则逐年下降。事实并非如此。虽然热带海域表层水温比温带、寒带水温明显高，但它们各自的年际变化都不大，换言之，它们不是在逐年递增或递降，而是基本上维持在多年平均值附近。据布德科等对整个世界大洋年平均海面收支计算的结果，热量的收入与支出也是平衡的。既然如此，不禁要问：低纬热量的净盈余没用于升温而用于何处？高纬热量净亏损而水温不降又是靠哪来的热量所维持？这就启示我们：要考虑海面之下是否有热量从低纬向高纬海域传输。

§2.2 三维海洋的热收支

只着眼于海面的热收支，不能完满解释海洋的热状况，因为海洋存在于三维空间中。虽然海洋的深度与其水平尺度相比很小，但因海水的比热容很大，故海深尽管有限，其热容量却大得惊人。所以，必须通盘考虑三维海洋的热收支。

2.2.1 海面辐射的向下输送与透射辐射

海水对辐射的吸收是很强的，由图1—13知，除在可见光波段内吸收系数有极小值外，在其他波段内吸收系数都很大，尤其在红外波段更大，所以辐射能进入海水之后将很快地被吸收。据杰尔洛夫(1981)计算，对最洁净的大洋水而言，1m厚的水层可使进入海面的辐射能损失55.5×10^{-2}，10m可损失77.8×10^{-2}，100m可损失99.47×10^{-2}。在浑浊的沿岸水中损失当然更大，1m厚的水层可达$(63\sim82.4)\times10^{-2}$，5m即达$(86\sim99)\times10^{-2}$。如果这些辐射能全部转换为热能而用于增温的话，那么，洁净的大洋水0～1m增温的幅度，约为1～2m增温幅度的9.3倍，而为2～3m增温幅度的20倍；对浑浊的沿岸水，这种"跃变"将更明显。然而实际观测却未发现近海面薄层内如此急剧变化。分析其原因，一方面是海面吸收的热量并未完全用于增温，诸如蒸发、有效回辐射和海—气感热交换等等，要消耗相当多的热量；另一方面，除去上述耗热之后所余热量，用于增温时也不是仅仅限于海表皮一薄层，风、浪和流引起的涡动混合，还能把热量向下输送，混合的结果便使一定厚度的水层内温度趋于均匀。图1—12、1—9和图1—11表明，均匀层的深度可达数10m至100m以深。也就是说，吸收的辐射能是用于整个混合层内海水的增温，所以不会在紧靠海面的水层出现上述那种跃变。然而，升温后的均匀层，与混合作用所不及的下层之间，

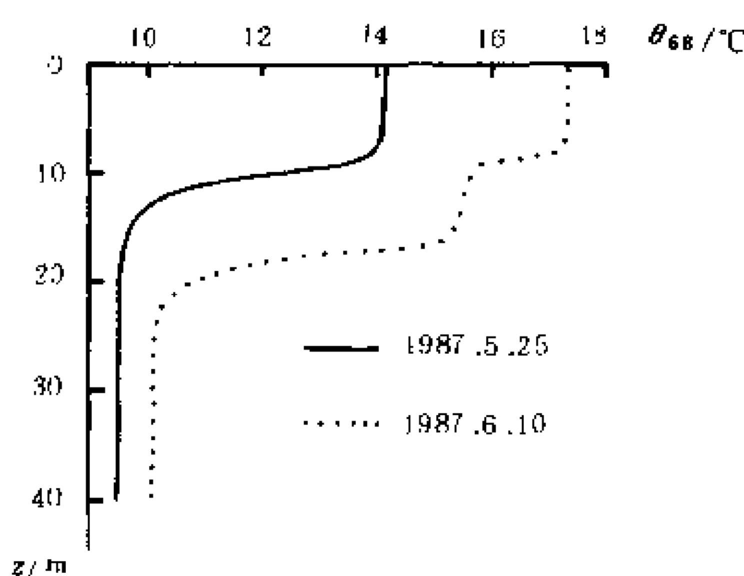


图 2—3　黄海(35°N,121°E)大风前后跃层的变化

其温度差异还是很明显的,而且由于这种差异被压缩到下界附近的一薄层之内,致使该层内水温铅直向梯度特别大,从而形成了温跃层。在海面吸收辐射继续增加的情况下,若海面风力的加强足以使混合可达更深层时,跃层的深度即随之加深,从而进一步把热量再输送到更深的水层中。图 2—3 就是一个比较典型的例子,图中实线是"东方红"号调查船 1987 年 5 月 25 日观测的水温铅直分布曲线,跃层在 10m 附近;时隔 16 天之后,于 6 月 10 日重测,则如点线所示。(0～10)m 层水温统统升高了 3℃多,显然是太阳辐射增强所致;(12～17)m 层几乎"同步"地升高 6℃,而这显然不是仅靠吸收辐射能就可达到的。因为如前已述,下层仅靠吸收辐射所能增加的温度,比上层小得多。真正的成因是这期间有两次大风:6 月 1～2 日为江淮气旋(中心气压 992×10²Pa),6 月 5 日又有冷锋过境,伴有气旋波生成,黄海风速可达 15m/s 左右,因此使混合深度加大。结果使热能再度向下输送,亦即使(12～17)m 水层大幅度地升温,乃至同表层一样都升达 15.5℃左右。大风过后,混合的深度又恢复到 9m 左右,通过海而净收入的辐射,仅使 9m 以浅的水层升温,从而形成了双跃层。

在大洋中因温跃层较深,如图 1—11 可超过 100m,再往深层透射率(§1.7.5)已微乎其微,故仅考虑混合层内的辐射吸收即

可。浅海则不然，因温跃层较浅，从海面进入的辐射，除大部分在上混合层内被吸收外，还有小部分可透射到跃层之下。因此，在研究上混合层内的热收支时，还应考虑这一透射的影响（Ivanoff A.，1977）。尤其在春夏季沿岸陆架区跃层较浅，透射的影响更不可忽视（杨殿荣等，1990）。图 2—3 中 18m 至底层的增温，与透射作用就有关系，当然也应考虑底层潮混合的作用（杨殿荣等，1990）。在我国近海表层水温数值预报的研究中（王赐震等，1991），对于通过海面进入上混合层的辐射 Q_s，计算中就扣除其透射到深层中的辐射，因为它对上混合层的增温是没有贡献的，故将计算式改写为：

$$Q_S = Q_{S0}(1-0.61C)(1-A_S)(1-t_r e^{-\alpha h}) \quad (2.2\text{—}1)$$

与式（2.1—2）相比，C 前的系数改为 0.61，这是依我国沿岸实测资料计算的年平均值；t_r 为透射率（§1.7.5），α 为透射辐射在海水中的衰减率；h 为水深；在实际计算中，取 $t_r=0.45$，$\alpha=0.1\text{m}^{-1}$，关于 A_S 的值，在高纬海域取 0.08，而中、低纬度海域取 0.07。

2.2.2 埃克曼抽吸和大风卷吸对上混合层的影响

夏季的水温跃层强度较大也较稳定，故在上层海洋模式中常以跃层为“刚底”，使问题简化而成二维层模式（王赐震等，1990）。当然，若局部海域风应力（及其旋度）的强迫作用达到一定强度时，卷吸和抽吸作用也会破坏“跃层刚底”，使下层冷水涌入上混合层，从而减缓上混合层的升温（如图 2—3）。当风应力及其旋度达到更大强度时，涌入冷水更多，还能使上混合层局部海域出现短时剧烈降温。如图 2—4，大风过境后使（0～18）m 水层温度下降 1℃多，而跃层深度下沉（7～8）m。热带风暴和台风经过的海面，常常留下一条“冷尾迹”，则是因强烈的气旋式风场使表层海水辐散，导致下层冷水上涌，即所谓埃克曼抽吸（*Ekman pumping*）而造成的。

在海洋上混合层水温短期数值预报中，大风卷吸和埃克曼抽

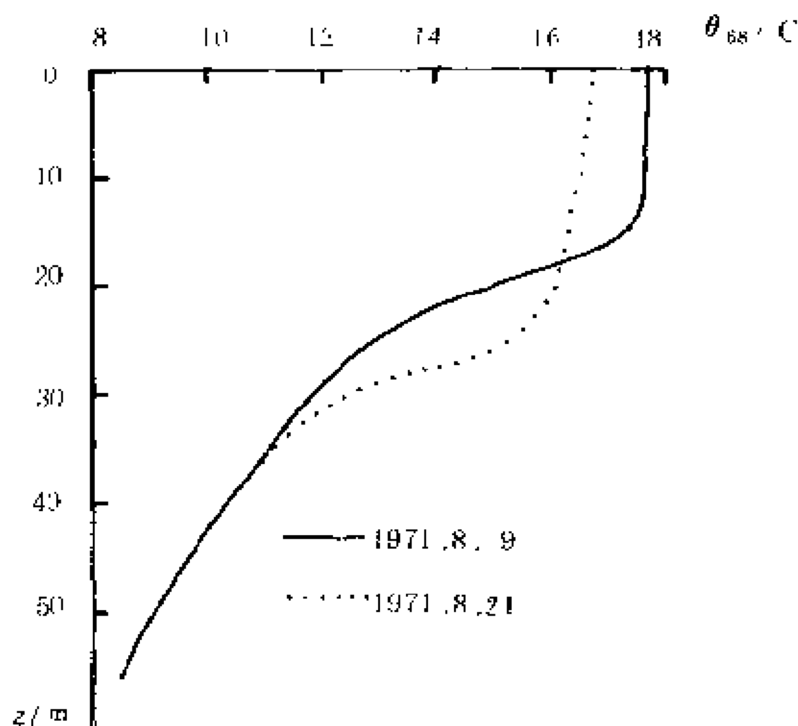


图 2—4　东太平洋(47°34′N,128°17.2′W)大风前(1971 年 8 月 19 日)、后(8 月 21)的水温铅直分布
(据 David Halpern,1974)

吸对上混合层热收支的影响是必须考虑的,因为跃层强盛的夏季,也正是热带风暴和台风最活跃的时节。令人遗憾的是,此类天气系统过境期间,恰恰缺乏现场观测,因而对这些过程的认识,特别是定量描述进展迟缓,目前多以参数化的形式计算其影响。至于研究较长时间内的热收支,对此类天气式过程并不过分注意。

2.2.3　表层冷却对流与温跃层的消衰

由春季到夏季是季节性温跃层形成和增强的时期。太阳辐射的增强,进入海面辐射的增多,使表层海水积累了较多的热量。热量也向下输送,但以涡动混合为主。涡动混合所及层深就是跃层的上界。由图 2—5a 可见,4～8 月是季节性温跃层形成并渐次加强的时期,高温的上均匀层厚度可达 20m 之多,贮存了相当可观的热量。

与此相反,由秋到冬则是季节性温跃层削弱和衰亡的时期。由于太阳辐射减弱,特别是进入海面的辐射逐渐减少,干冷空气的吹掠,不仅促使海面增加了向大气的感热输送,更重要的是使蒸发旺

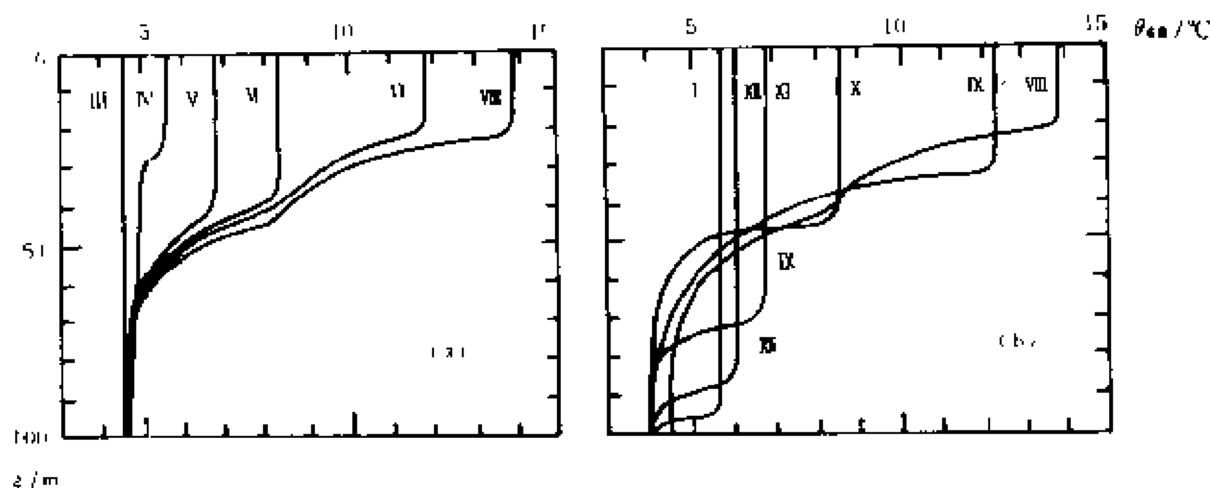


图 2—5　季节性温跃层的形成与消衰(50°N,145°W,1956)

(据 Dietrich *et al*, 1980)

盛,从而加速了海面的失热。表层海水被冷却后密度增大,导致海水层结不稳定,遂产生对流混合。对流混合的效应是把上层海洋前期贮存的热量陆续输向海面,消耗于蒸发和感热交换。降温和对流的加剧,可使季节性温跃层强度逐步削弱、深度渐次下移,直至消亡(图 2—5b)。在浅海,对流甚至可直达海底,使整层水温趋于均匀,渤海和黄海秋末即如此;东海北部陆架区亦然,只是对流达到底层的时间有所推迟。在图 2—6 中,跃层之下水温的逐月变化,不象图 2—5 那样有规律,这与该站位于不同水团和流系的交互作用区域有关,由于侧向混合与冷、暖平流影响,增加了水温变化的复杂性,8 月份还出现了“冷中间层”现象。

2.2.4　升降流和平流热输送

由于海洋表层流的辐散或辐合,会使表层以下的海水形成铅直向上或向下的流动——升降流。其速度一般都不大,只有$(10^{-6}\sim10^{-4})$m/s,但是,当海洋上、下层的温差较大时,由升降流

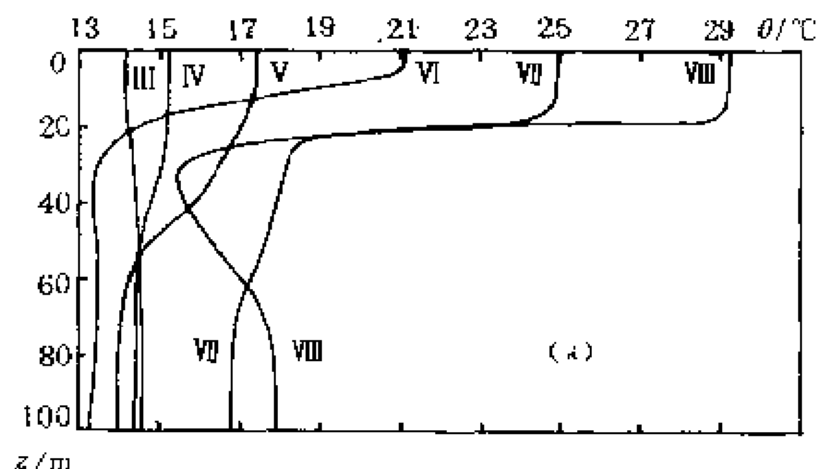
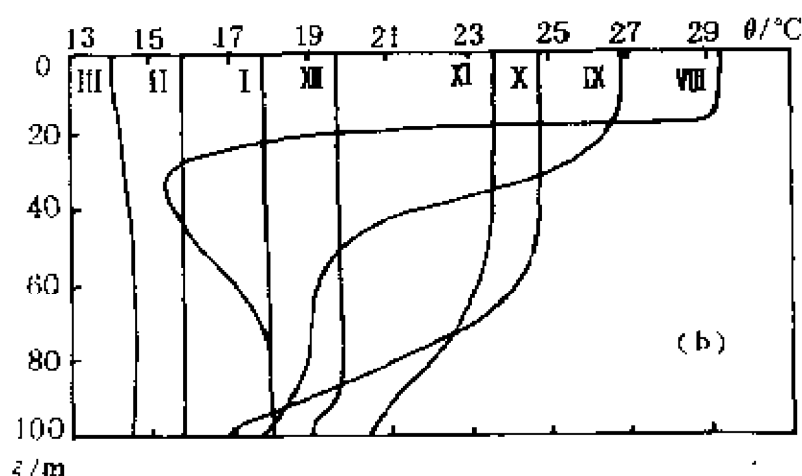


图 2—6 东海北部(31°N,127°E,)温跃层的形成与消衰
(1979)



(b)

所传输的热量也是相当可观的，并能导致升降流区水温分布出现许多不同的特点。据报道，北美加里福尼亚外海的上升流，每月可上升 20m，南美西岸的上升流，每月可达 200m。来自下层的海水显然水温低，于是在断面图上呈现向上伸展的“冷水舌”，而在上层的大面图上则出现相应的“冷中心”。我国海南岛东北方夏季上升流可升达海面，故能在海表层水温分布图上形成低温中心；某些海域

的上升流，不一定升达海面，但下面相应层次上亦可发现低温中心。世界上最强的上升流，是在印度洋的索马里和阿拉伯半岛沿岸，那一带海面水温分布，就出现大片的低温区(参看图 2—10)。

因表层海流辐合而形成的下降流也屡屡可见，例如赤道逆流和南赤道流的北半球部分之间(§3.4.1 及表 3—1)，因辐合而形成的下降流，可将温暖的表层水输送到次表层中去。

伴随升降流而进行的铅直方向的热输送，不论就其输送热能的数量，还是所能送达的深度，一般都比抽吸和卷吸大得多，至于透射辐射更相形见绌。然面，就世界大洋而言，更大规模的热输送，还应属冷、暖平流。

一些著名的强劲海流，水平流速大，流量更可观。据计算，黑潮在 27°～37°N 之间输送的水量为 $2.22\times10^7 m^3/s$，湾流更多，可达 $3.25\times10^7 m^3/s$。伴随水量输送面携运的热量，当然更浩大，据估计，湾流每年向西北欧每 1km 海岸输送的热量，大约相当于燃烧 6×10^{10}kg 煤所放出的热量。

平流热输送，除与海流的流速、流量有关外，还与沿流向海域的水平温度梯度，以及流域温度的成层性有着更密切的关系。试想，若海流经过的海域，本来不存在水温水平梯度，而且海流流过之后也未发生什么变化，那么，海流携带的热量再多，也只是"走过场"而已，不会对该区域的热状况和气候产生什么影响。但是，若在流经的海域中，通过与流向垂直的两个断面的水平热通量之差不为 0，则将产生平流热输送：

$$Q_A = Q_{v1} - Q_{v2} \qquad (2.2-2)$$

式中 Q_{v1} 和 Q_{v2} 分别为两个断面的热通量。在暖流作用下 Q_A 为正值，称为暖平流，即海流给该海域输入热量。反之 Q_A 为负则称为冷平流，使该海域失去热量。冷、暖平流也通称为热平流或平流热输送。

如果该海域只有上述两个断面存在热交换面其他界面没有热

交换，那么 $Q_A>0$ 时，将使研究海域内热量聚集，导致水温升高；反之 $Q_A<0$ 则使热量散失水温降低。换言之，Q_A 即等于研究海域内热含量的改变量

$$Q_A = Q_\theta' \qquad (2.2\text{-}3)$$

这里 Q_θ' 表示研究海域内热含量的改变量。

事实上，其他界面，例如海面也存在热交换，即如§2.1所讨论的那样。假如热平流产生的热效应，不是用于改变研究海域的热含量，而是用于和铅直方向的热交换达成平衡，那么，研究海域的水平热通量之差，就应等于铅直热通量之差。设在深度为 z_1 与 z_2 的水层内的热平流为 Q_{A12}，上、下界面的铅直热通量分别为 Q_{w1} 和 Q_{w2}，则有

$$Q_{A12} = Q_{w2} - Q_{w1} \qquad (2.2\text{—}4)$$

在湾流和黑潮等强劲暖流流域，暖平流之量是异常巨大的。然而相应海域的水温并未持续不断地一直升上去，就多年平均而言，水温的变动还是相当小的。原因就在于，这些海域的蒸发旺盛、耗热甚多(图2—1)，再加海面有效回辐射和感热交换等等，大都是海洋失热，基本上就把暖平流所增加的热含量消耗殆尽了。也就是说，从水平方向给该海域所增加的热量，与铅直方向通过海面失去的热量大体相抵。可见热平流在海洋热平衡中，的确扮演了重要的角色。据巴森(Bathen K. H.，1971)对北太平洋(0～250)m的计算，热平流的贡献占 63×10^{-2}，而海面进入的净热通量仅占 29×10^{-2}，足见热平流的影响之大。

正因为热平流对海洋以至对整个世界气候有重要的影响，所以几十年来许多学者对穿越纬度线的海洋热平流的计算进行了探讨。遗憾的是，广漠海洋中的观测资料，无论数量还是质量都有很大问题，因而使计算的误差相当大。利用人造卫星观测的向上和向下辐射，可以计算大气和海洋输送热量之和，而大气输送的热量又可以用气象探空资料计算出来，于是便可求出纯粹由海洋输送的

热量。用这种方法计算所得结果比以往，如塞勒斯(Sellers，1965)的计算约大1倍，证实了海洋热平流的作用比过去传统的估算结果大得多。导致以前估算过小的原因，除海洋资料本身的问题外，还有两点是显然的。一是以往过高地估计了热带海洋的海面反射率，致使计算进入海洋的辐射量的值偏小，这就导致对赤道向极地的热平流的估算也偏低。二是过去对大气的输送作用估计过高，把大气当成了由赤道向极地热输送的主角而视海洋为配角，其实这是偏颇的。根据无线电探空的新资料计算，大气的热输送作用并非那么大，恰当地比较，其作用和海洋应该是同等量级的。但是，如高野所说，迄今为止的一些大洋环流数值模式，计算所得的由赤道向高纬的热平流量，仍然比人造卫星的结果小一半左右(友田好文、高野健三，1990)。

2.2.5 海洋的全热量平衡

讨论海洋的全热量平衡，需从式(2.1—1)表述的海面热收支再扩展到3维的海洋，加上一项Q_A，即通过对流、平流以及混合等过程，与研究区域之外进行交换时所获得或失去的热量，于是

$$Q_0 = Q_s - Q_b \pm Q_e \pm Q_h \pm Q_A \qquad (2.2-5)$$

该式通常被称为海洋热平衡方程。等号右边各项称为热平衡的各分量，其代数和Q_0就是海洋与外界进行热交换之后所盈余($Q_0>0$)或亏损($Q_0<0$)的热量。一般而言，不仅对某一时刻，而且对日平均或月平均来说，Q_0不会为0，亦即海洋的热量收支并不平衡，因而海水的温度，特别是海表温度处于不停的变化之中。但对整个世界大洋的年平均来说，却基本上是平衡的，这是布德科等许多学者的计算所得出的共同结论。世界大洋的平均水温多年来几乎没有什么变化，证实了以上计算的正确性。

虽然基本上是平衡的，但计算和研究热平衡并未因此而变得徒劳无用，更不属多此一举。研究的意义首先是，使我们在分析海

洋表观的水温空间分布和时间变化的特点与规律时，能把握住主要矛盾。其次，在对局部海域研究时，还可以平衡方程为基础，通过估算热平衡的各分量，弄清制约该海域热状况的主要因子，进而对水温预报等以有益的启示（乌格留莫夫，1984；格拉哥列娃等，1982）。第三，如果对研究海域计算热平衡各分量后，发现 $Q_0 \neq 0$，且又排除了计算的误差，那就提醒我们去研究和发现新问题。例如舒莱金（Шулейкин В. В.，1932）在计算喀拉海的热平衡时，由于当时还不知道大西洋暖流能进入该海区，未计入这项热平流，结果出现了"不平衡"。于是他推测应有来自大西洋的暖流进入喀拉海，这一预言在 3 年后果然为直接观测所证实——海区北部深层的确有来自大西洋的暖流水。

§2.3 海洋中的水量平衡

2.3.1 海洋水量平衡与热量平衡的异同

类似于海洋的热收支，海洋的水量也有收支，即海洋与外界也不断进行水量的交换。海洋的水量收支也存在类似于热平衡的水量平衡关系。但地球上的水量平衡与热量平衡却有质的不同。这是因为，地球上热量的来源基本上只靠太阳辐射这一外部热源的输入，在各种过程的制约下，地球以及海洋的热量收支得以达成某种平衡；水量平衡却不然，水的来源则几乎完全靠地球自身，又在地球系统自身之内周游而循环（图 2－7），所以也称为水循环。相比之下，尽管海洋热收支中有些过程，如蒸发与凝结，辐射与逆辐射等，似为可逆，但是不象地球系统内的水循环那样可周而复始，所以讨论地球或海洋的热量收支时，只能称为热量平衡而不能称为"热量循环"。

两者相似之处也是显然的，所以常常相提并论，例如都有收入

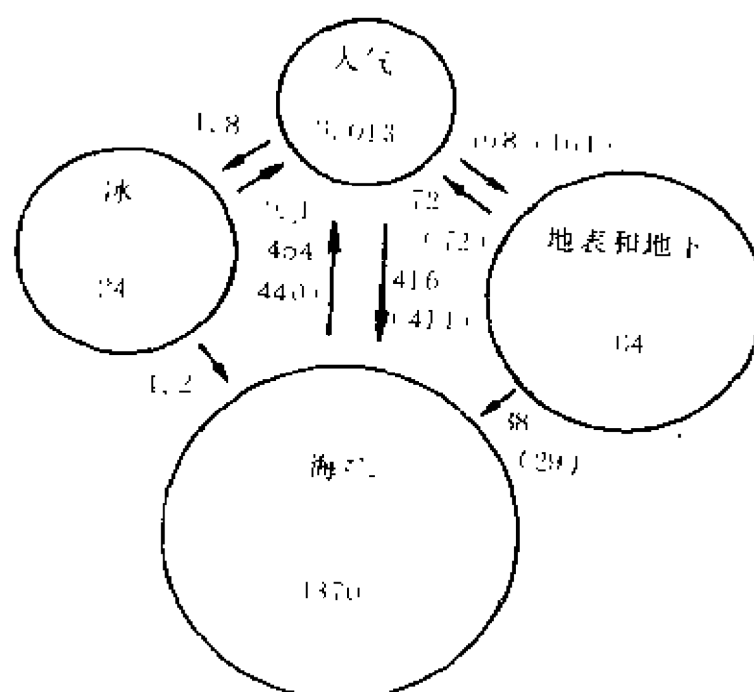


图 2—7 地球上的水循环(圆内单位为 10^6km^3,圆外单位为 10^3km^3)
(据 Szesztay,1971 数据;括号内数据为 Lvovitch,1970 年数据)

与支出,并可达成某种平衡,两者也分别影响水温的分布或制约盐度的变化,因而各有许多学者深入研究作了大量工作。在水量平衡的研究中,劳维希(Lvovitch,1970)、斯捷洋诺夫(Степанов,1976、1977)、布尔科夫(Бурков,1980)都有贡献,联合国教科文组织曾发表过专门报告(UNESCO,1970),斯捷洋诺夫还就世界大洋水总循环研究中存在的问题进行了评述(Степанов,1983)。

2.3.2 海洋的水量平衡

海洋中水的收入主要靠降水、陆地径流和融冰,支出则主要是蒸发和结冰。

蒸发是海洋热平衡中的重要分量,前面已介绍它使海洋耗失巨额热能,与此同时也使海洋支出了巨额水量。据计算,每年海洋因蒸发而失去水量约$(440\sim454)\times10^3km^3$(图 2—7),如果海洋得

不到水量补充的话，世界大洋的水位将下降(124～126)cm。然而蒸发在海洋上的分布是很不均匀的，如图 2－8 所示，在南北亚热带海域出现两个极大值，海面年蒸发量可达 140cm 左右，在热赤道附近下降到 110cm 左右，至两极最低，不到 10cm。

以固体冰形式被冻结在陆地上的水量约为 $24\times10^6km^3$，如果这些冰全部融化并流入海洋，会使海平面上升 66m。但就目前所处的地质年代而言，从年平均情况看，结冰与融冰的量基本上是平衡的。至于温室效应能否加速极地冰盖的融化，目前众说不一难于定

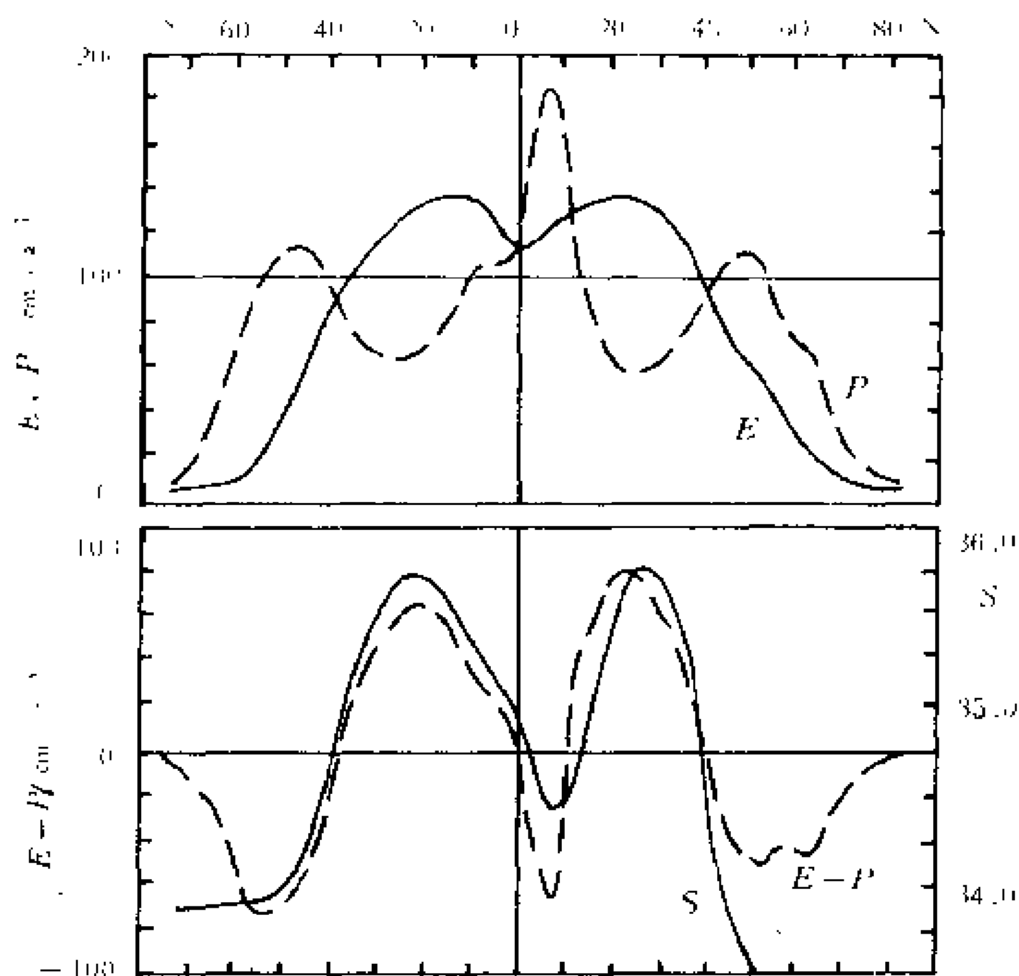


图 2－8　世界大洋表面的蒸发(E)、降水(P)、蒸降差(E－P)和盐度(S)的经向分布(据 Wüst，1954)

论。当然，对个别海域或某些季节，不平衡的情况也应予以考虑。

海洋水量收入以降水最为重要，由大洋接纳的年降水总量可达(411～416)×10^3km^3，但其分布不均匀。由图2—8可知，不仅低纬与高纬海域降水量差别大，而且随纬度的变化比蒸发更复杂。有趣的是，除纬度大于50°的高纬海域外，蒸发与降水的曲线，几乎恰好是反位相的。它们又都是海洋水量支出与收入的最主要的项，可想而知，对大洋表层盐度的分布，必有巨大的影响。

大陆径流及地下水入海，是海洋水量收入的另一重要的项，估计年总量(29～38)×10^3km^3，其中又以大陆径流为主，这就是"百川汇海"。世界上径流量最大的河流是亚马孙河，几乎占全世界总径流量的20×10^{-2}，其次是刚果河，但它仅为前者的23.3×10^{-2}。考虑到北美洲还有密西西比等大河，欧洲也有许多河流注入，致使大西洋的入海淡水量高居各大洋之首；若将这些淡水均匀展布于整个大西洋，可使洋面上升23cm。太平洋则相形见拙，注入的最大河流是我国的长江，虽也有世界第3位的径流量，但仅及亚马孙河的18.9×10^{-2}，更兼太平洋洋面广袤，年入洋淡水量只能使水位提高7cm。由图2—7知，还有1.2×10^3km^3的水量，是由陆冰滑落入海融化而汇入海洋的，这一过程主要发生在两极海域。南极大陆是世界上最大的冰山源地，冰川由南极大陆腹地以每天1m的速度向低处推进，断裂入海后则形成巨大的冰山，有的长逾100km，宽达数10km。例如，英国捕鲸船"Balcana"1953年2月在罗斯海60°S、150°W处见到一座冰山，长145km，宽40km，高出海面30m；1966年美国观测到的一座冰山更大，长333km，宽96km。据统计，南极大陆周围的洋面上，经常有20多座大冰山漂移。北极海域的格陵兰岛也是冰山的发源地，仅仅随拉布拉多寒流漂游到大西洋的冰山，每年就多达388座。这些冰山终将融化，对局部海域的水量平衡也有不可忽视的影响。

2.3.3 水量平衡方程

海洋水量的收入与支出，对局部海域而言，不一定随时都能达成平衡。不平衡则导致水位的上升或下降，这又会引发海水产生相应的流动，从而使水位、水量得以调整。与讨论海洋的全热量平衡类似，也可把影响水量收支的各因素，引入所谓水量平衡方程式

$$q = P + R + M + U_i - E - F - U_0 \qquad (2.3-1)$$

式中 P 为降水，R 为大陆径流，M 为融冰，U_i 为海流及混合使海域获得的水量，E 为蒸发，F 为结冰，U_0 为海流及混合使海域失去的水量，余项 q 为研究海域在给定时间水交换的盈余($q>0$)或亏损($q<0$)。

对整个世界大洋而言，U_i 和 U_0 完全相互抵消，M 和 F 也大致相等，则有

$$q = P + R - E \qquad (2.3-2)$$

该式对某些特定海域有时也是适用的，例如在大多数海域中可不考虑 M 和 F 的影响，而在具有封闭环流系统的海域内，U_i 和 U_0 也基本上趋于 0，故可引用式(2.3-2)。

式(2.3-2)表明，大陆径流、降水和蒸发 3 项，就基本上决定了整个世界大洋的水量平衡。表 2-1 引自布德科的计算(Budyko，1974)，括号中的值引自 Zubenok(1956)的，以资参考比较。就世界大洋总平均而言，$R=12$cm/a，$P=114$cm/a，$E=126$cm/a，故 $q=0$。当然，对某个大洋若只考虑这 3 项，就不能保持 $q=0$。如太平洋因降水与径流之和大于蒸发(虽然其蒸发超过大西洋而径流小于大西洋，但其降水却是 4 大洋中最大的，尤在东部赤道海域，年降水量可达 3000mm 以上)，水量有盈余，可向大西洋输出。大西洋则因 $E>P+R$，每年可导致水位损失 12cm，要靠太平洋、北冰洋来补充。北冰洋水量的盈余，主要是因蒸发小而径流多所致，流入北冰洋的河流不乏世界上名列前茅的长河，如叶尼塞、勒拿、鄂毕等河，

虽然其总流量只及亚马孙河的 1/3，但因北冰洋面积小，折算为水位就与大西洋的径流效应相当，而其蒸发量折算成水位则不到大西洋的 0.1。所以北冰洋水量盈余多而盐度低。盐度低又可使海水冰点升高，从而使海水较易结冰，对比图 2—9、10 的冰界线，这一影响看得很清楚。

表 2—1　大洋的水量平衡（据 Budyko，1974；Zubenok，1956）

大洋	平均深度	降水量	蒸发量	陆地径流	向周围海域的流出量 U_0	
	z/m	P/cm·a^{-1}	E/cm·a^{-1}	R/cm·a^{-1}	U_0/cm·a^{-1}	qV/10^{4}km^3·a^{-1}
太平洋	4282	133 (121)	132 (114)	7 (6)	8 (13)	(2.0)
大西洋	3868	89 (78)	124 (104)	23 (20)	-12 (-6)	(-0.5)
印度洋	3963	117 (101)	132 (138)	8 (7)	-7 (-30)	(-2.1)
北冰洋	1526	(24)	(12)	(33)	(35)	(0.5)
世界大洋	3795	114	126	12	0	0

在大洋的东边界和西边界，由于流向相反，它们对盐度的影响经平均后基本可以抵消；而在广漠的中大洋，径流的影响则很小，因而海表面盐度随纬度的平均变化，就基本上受制于蒸降差（$E-P$）的变化了。伍斯特（Wüst G.）早在 1954 年就发现，60°S～40°N 大洋表面盐度的经向分布，与蒸降差的经向分布非常相似（图 2—8），并给出如下经验公式计算大洋表层盐度：

$$\left.\begin{aligned} S &= 34.47 + 0.0150(E\text{-}P) \qquad 10°\text{N} \sim 70°\text{N} \\ S &= 34.92 + 0.0125(E\text{-}P) \qquad 60°\text{S} \sim 10°\text{N} \end{aligned}\right\} \qquad (2.3—3)$$

2.3.4 海水的平均滞留时间和海水的年龄

世界大洋海水的总体积约为$(135\sim137)\times10^7km^3$，年平均蒸发约$(44\sim45)\times10^4km^3$，若将大洋海水全部蒸发出去则需3000多年，这就是海水的平均滞留时间。鉴于海水平均滞留时间如此长，以往又认为大洋深、底层流很弱，故有人曾想把深海沟作为污染物废弃的场所。这种主张一提出即遭反对，因为调查已发现深海并不乏强流；再者由海面加热或冷却以及风应力所引起的大尺度的海洋环流，其铅直分量要比上述蒸发效应大得多，换言之，海水的更新一般并不要那么长时间。

用箱式模型可以估算海水的更新期(瑞斯，1983)。即使象地中海那样相当封闭的海区，虽然只有直布罗陀海峡与大西洋沟通(通过苏伊士运河与印度洋的水交换其量甚微)，但由于海峡上下两层的入、出流促进了水交换，其平均滞留时间也大为缩短。

所谓海水的"年龄"，是指它离开海面下沉后所经历的时间。用同位素^{14}C或^3H等可以直接测定海水的年龄。资料分析表明，大西洋北部深层的水相当年青，而南大西洋西部深层的水年龄可达1000年。太平洋深于1000m的层次，处处都有"老龄"水，而东部深层水更老，有的可达2100年。这就表明太平洋和大西洋，在海水下沉运动方面有很大的差别(详见§3.3～§3.4)。

中纬陆架浅海如渤海和黄海，冬季强烈的冷却对流可直达海底，海水的年龄不会超过1年。强劲北风驱动下的沿岸流输出水量，主要以补偿形式而相伴加强的黄海暖流水北上流入，更促进了这些海区的水交换。

§2.4 世界大洋的温度场

世界大洋总体平均的水温为3.8℃，位温是3.59℃；太平洋的

这两种平均值分别为3.7℃和3.36℃,大西洋为4.0℃和3.73℃,而印度洋为3.8℃和3.72℃。当然,世界大洋和各海区水温的实际分布,比这种平均结果要复杂得多。

海水的温度因时因地而异,即$\theta=\theta(t,x,y,z)$,虽然写成场函数的形式,但其解析表达式却难于具体给出,因此人们常借助于分布图概略但能形象地描述其时间变化或空间分布。最常用的水温大面分布或断面分布图,就是固定上式中的时间t和一个空间分量,从而给出固定时间(或某一时段平均的)等温面的分布;大面图上的等温线,是等温面与等位势面(通常即作为平面)的交线,断面图上的等温线,则是等温面与海洋中某铅直剖面的交线。

2.4.1 海洋水温的大面分布

世界大洋表层水温[①]冬季(2月)和夏季(8月)的分布,可参看图2-9和图2-10。由图易见,无论冬夏最高温度都出现在西太平洋和印度洋的近赤道海域,可达(28~29)℃,只是28℃线包络的面积,在西太平洋夏季更大,位置也更偏北一些。若将表层水温经向变化的极大值点,用点虚线连起来——称为热赤道——冬夏位置的这种变动就更清楚了。大西洋亦有这种变动规律,不过其最高水温值超过28℃的范围小一些。由热赤道向两极,水温渐次降低,到极圈附近已降至0℃;在极地冰盖之下水温更低,接近于对应盐度下的冰点温度,如南极冰架之下曾有-2.1℃的水温记录。大洋表层的等温线沿纬向伸展,特别在40°S以南,等温线几乎与纬线平行,且冬季比夏季更明显,这与太阳辐射的经向变化特点是密切相关的。

---

① 海洋顶层存在称为"海洋冷膜"的薄水层,厚度为几毫米至数百毫米,Paulson等(1981)称为大洋的冷表皮。习惯上用的表层(或表面层)是指常规海洋调查的层次(0~3m)。为区别,一般将前者称为"表皮"。

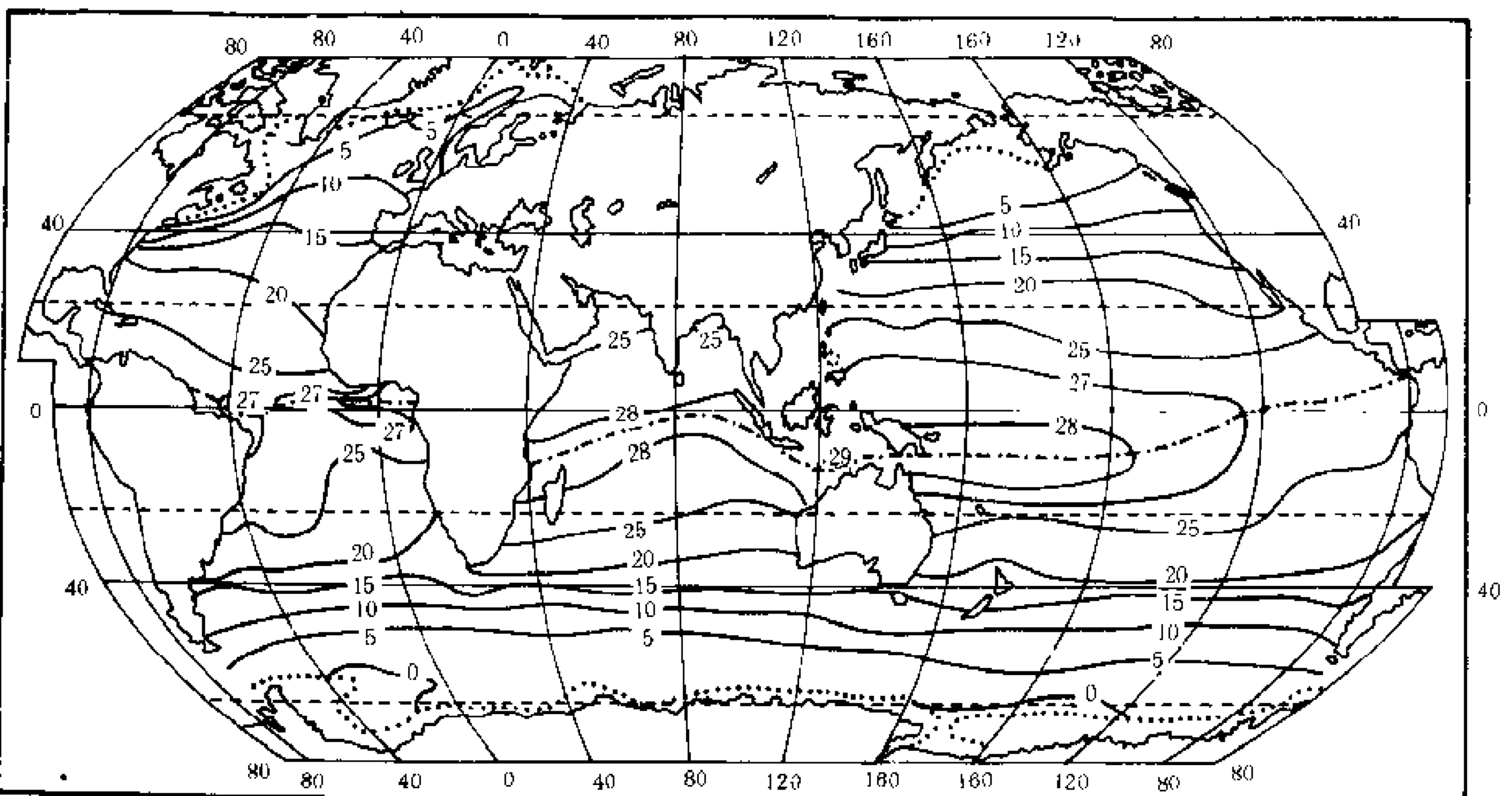


图2—9 冬季大洋表层水温分布(据 Степанов, 1974)

点线表示海冰边界，点虚线为热赤道

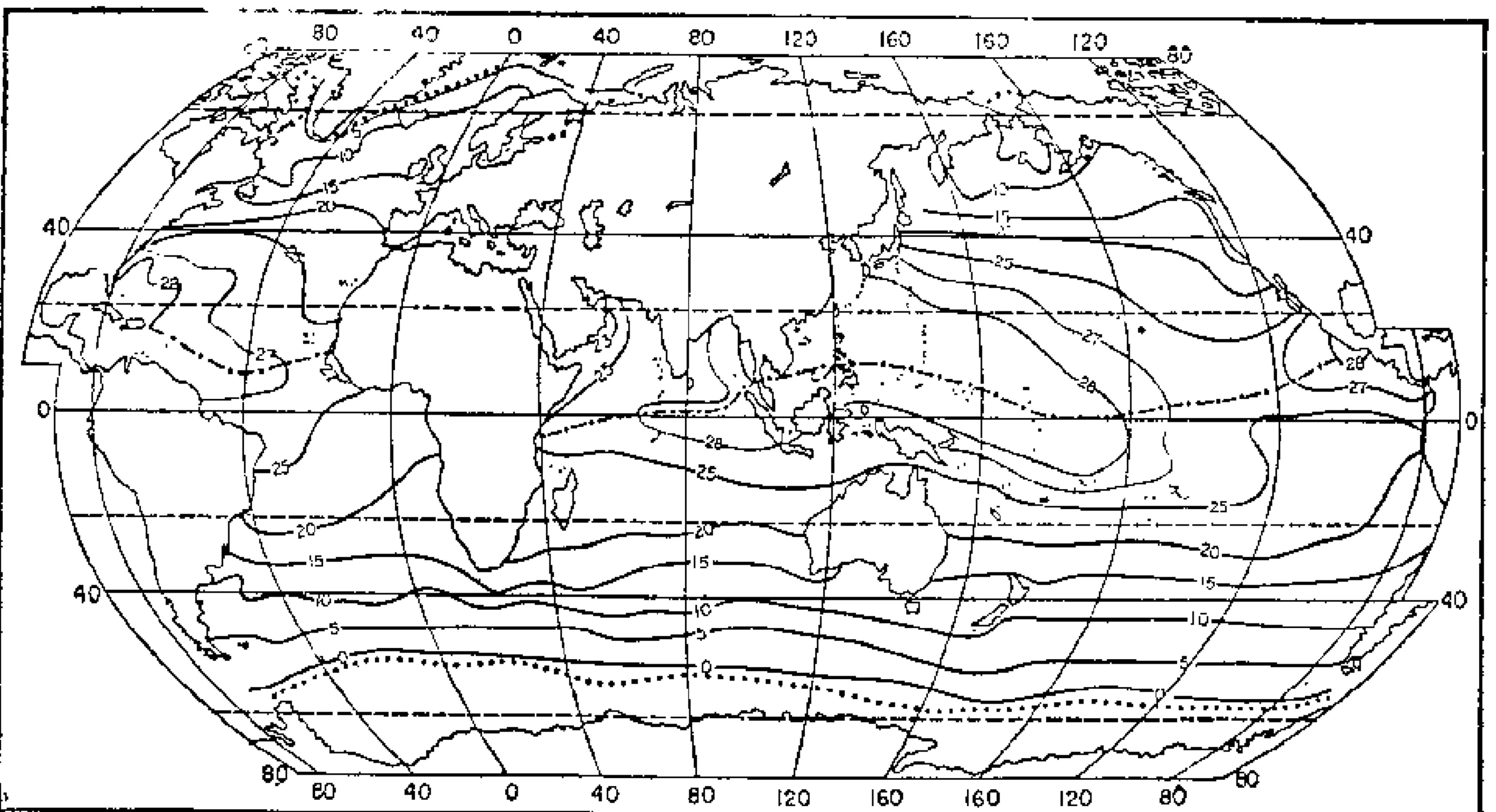


图 3-10 夏季大洋表层水温分布(据 Cremnon, 1974)

点线表示海冰边界,点虚线为热赤道

在北半球从亚热带至温带海域，等温线由西向东逐渐发散，形如横置的“扫帚”，于是在太平洋和大西洋北部便形成如下的水温分布格局：在亚热带至温带海域，西部水温高于东部，而在亚寒带至极地海域，则东边高于西边。两侧水温的这种差异，大西洋比太平洋更明显，夏季有6℃左右，冬季可达12℃之多。这一分布特点的形成，与平流热输送息息相关。两大洋西侧的低纬至中纬度海域，有大洋中最强的暖流——湾流和黑潮，东侧分别有加那利寒流和加里福尼亚寒流；在高纬海域，西侧是拉布拉多寒流和亲潮，而东侧则是湾流和黑潮延续之后的暖流。在南半球的中、高纬度海域，三大洋连成一片，有著名的南极绕极流横贯全球，所以各大洋东西两侧的水温，没有北半球那样显著的差异。

海流对水温分布的另一个重要影响是，使寒、暖流交汇处的等温线特别密集，亦即水温的水平梯度显著增大，这在黑潮与亲潮、湾流与拉布拉多寒流之间表现得很明显，所谓极锋(*the polar front*)就在这一带水温水平梯度特别大的海域。在大洋的边缘海区，如黄、东海，由于海流的影响也出现水温锋，只是季节变化大，不象极锋那样明显而稳定。

由于太阳辐射的直接影响，仅达厚度不大的海洋上层，所以大洋次表层之下的水温分布，天文性的带状特征已不复存在，海洋环流对水温分布的影响表现得更明显。图2—11为大洋500m层水温分布，显见水温的经向梯度大为减小，而在大洋西部边界流的相应海域，则出现明显的高温中心。大西洋和太平洋的南部高温区可高于10℃，太平洋北部可高于13℃，而北大西洋最高，达17℃以上。在1000m深度上水温的经向变化更小，但因高温高盐的地中海水溢出直布罗陀海峡后下沉，使北大西洋东部出现大片高温区；红海和波斯湾(据报道，夏季表层水温曾达35℃以上)的高温高盐水下沉，也使印度洋北部出现相应的高温区。到4000m以深，温度分布更趋均匀，整个大洋的水温差不过3℃左右。至于近底层的水

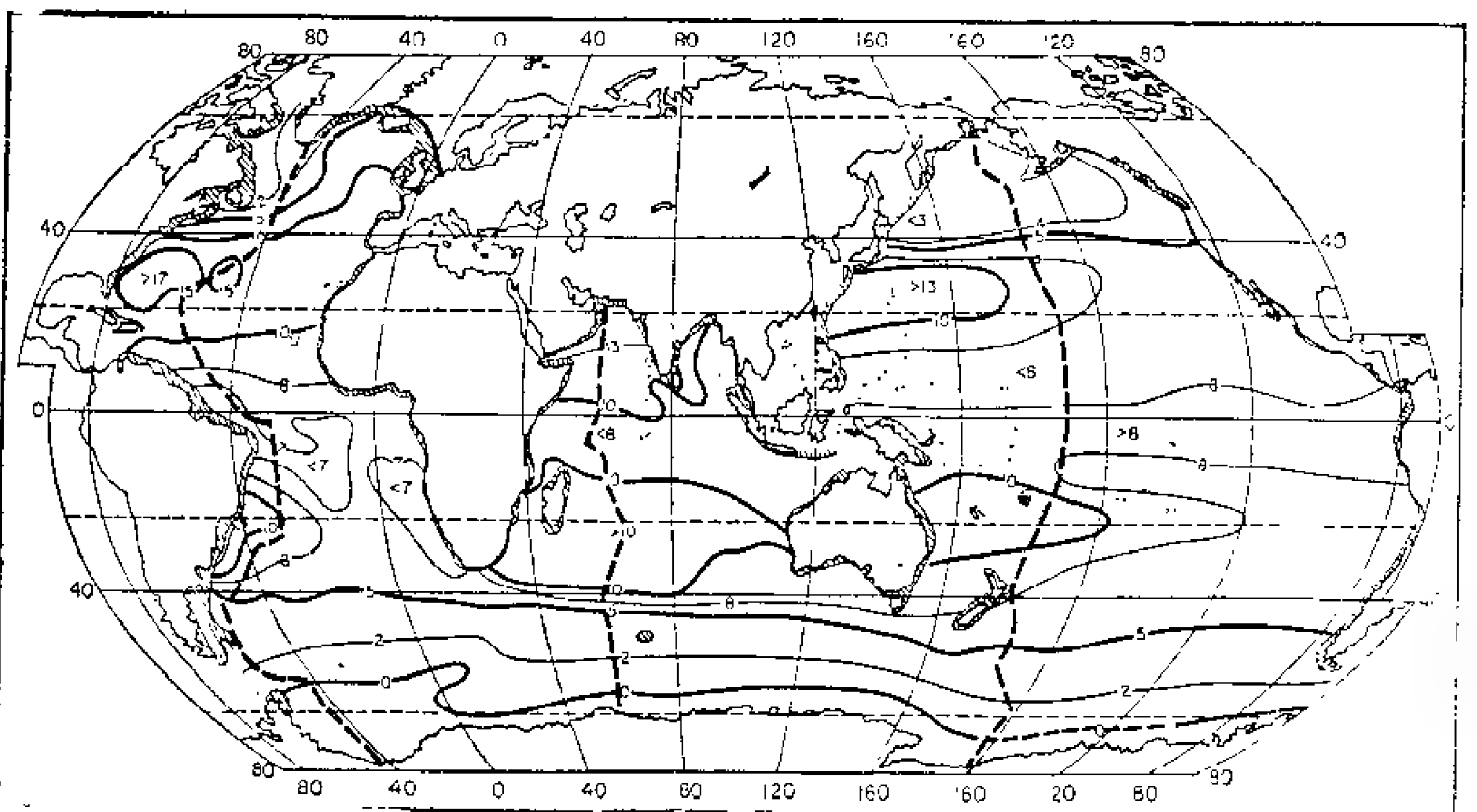


图 2—11　世界大洋 500m 层水温分布(据 Степанов, 1974)
粗虚线为纵贯大洋的断面(图 2—12, 2—22 及图 2—23)位置

温分布，则主要是受南极底层水团的影响（§3.3～§3.4）。

2.4.2 海洋水温的铅直向分布

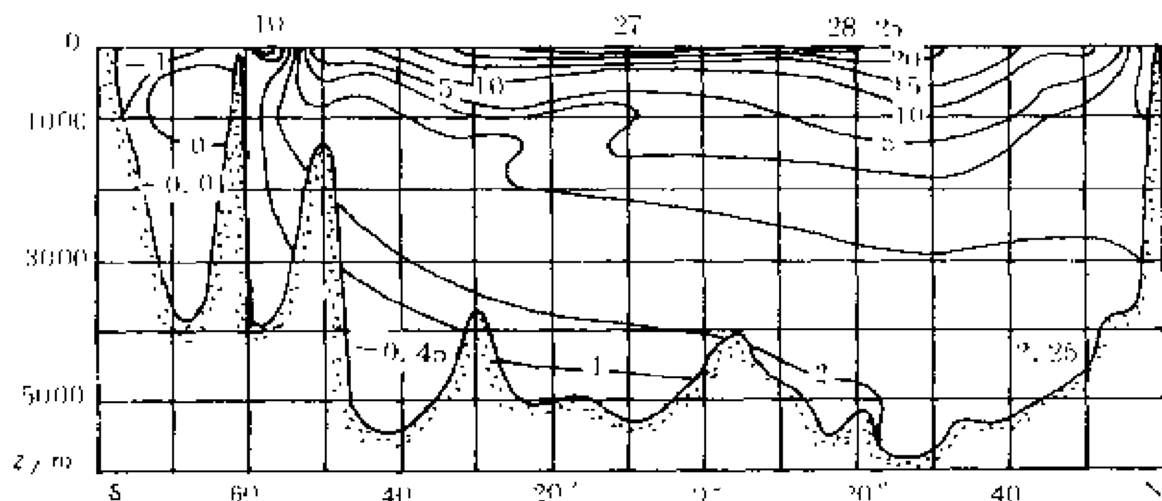


图 2—12 大西洋准经向断面水温分布（位置见图 2—11）
（据 Некрасова 及 Степанов，1973）

分析水温在铅直方向的分布，最常用的工具图是断面图和铅直分布曲线图，前者能形象地给出海水等温面与海洋铅直剖面的交线的分布，后者则形象地给出 $\theta=\theta(z)$ 的函数变化曲线。图 2—12 为大西洋准经向断面水温分布。低纬海域的暖水只局限于薄薄的近表层之内；其下便是水温铅直梯度较大的跃层，在不太厚的水层中水温由 17℃降到 7℃。此层一般称为大洋的主温跃层（利涅依金等，1989），相对于深度更浅的季节性温跃层，又称为永久温跃层。主温跃层之下，水温愈来愈低，但铅直梯度并不太大。在大洋深处水温更低，如大西洋深于 1200m 的各个区域，水温普遍都低于 7℃（在太平洋，3000m 层平均水温仅 1.6℃）。若以 12℃等温面作为主温跃层的"核心"，可以看出主温跃层并不随纬度变化面单调地升降。它在赤道海域上升面在亚热带下降，到中纬度海域复又

上升，至亚极地可升达海面，形成极锋(Dietrich，1980)。因之主温跃层深度的经向分布，大体形状犹如"W"字。关于主温跃层的更深入地论述，可参阅专著"海洋温跃层理论"(利涅依金等，1989)。

以主温跃层为界，可把大洋水体分为两部分：其上为水温较高的暖水区，其下水温很低，铅直梯度也很小，称为冷水区(Defant，1961)。主温跃层之上的暖水区，由于受动力(如风力和波浪的搅拌)和热力(如蒸发增盐或降温增密)等因素的作用，促进了上层海水的铅直向混合。混合的结果，使表层及其下一定厚度的水层内温度趋于均匀，从而形成了大洋的水温准均匀层。准均匀层的厚度在不同海域或不同季节是有差别的。例如夏季在中纬和亚极地海域，季节性温跃层之上的均匀层很少超过(60～70)m，而在亚热带和热带，上均匀层厚度可达100m甚至更大(图1—11)。冬季由于蒸发增盐、降温增密，对流混合所达深度更大，如大洋的亚热带海域上均匀层厚度可达(150～250)m(Fuglister，1960)，中纬度海域的上均匀层厚度更达(300～400)m(Joseph，1961)，象地中海等某些内海，甚至直达海底。在极锋向极的一侧，虽然已不属暖水区，但也有上层的准均匀层，冬季对流混合所达深度还更大。威德尔海、格陵兰海和拉布拉多海中的对流下沉，对深层和底层水团的形成是有重要意义的(§3.3)。

大西洋水温分布的特点，在太平洋和印度洋也存在。综合分析各大洋不同气候带的水温铅直分布，可见在热带、温带和寒带海域，既有共同的特征，如中、深层水温的铅直向梯度均较小；也有各自不同的特点，尤其是在上层。由图2—13可知，在热带和温带海域，近海面的水温均匀层之下，有很强的正温跃层(图1—9，11)，而寒带海域则出现逆温层。许多观测资料证实，夏季在寒带海域表层增温后，也能形成正温跃层，但由于混合深度不及冬季对流深度，故在此正温跃层之下，往年冬季冷却下沉的冷水仍能保持，从而形成"冷中间层"或称"中间冷水"(Зубов，1929，1945；Леонов，

1960)。在冷中间层之下，因逆温分布又形成“暖中间层”(或称“中间暖水”)，这大多是由于暖平流所致。例如在北冰洋中，因为来自大西洋的暖平流较强，所以暖中间层分布很广且强度较大。

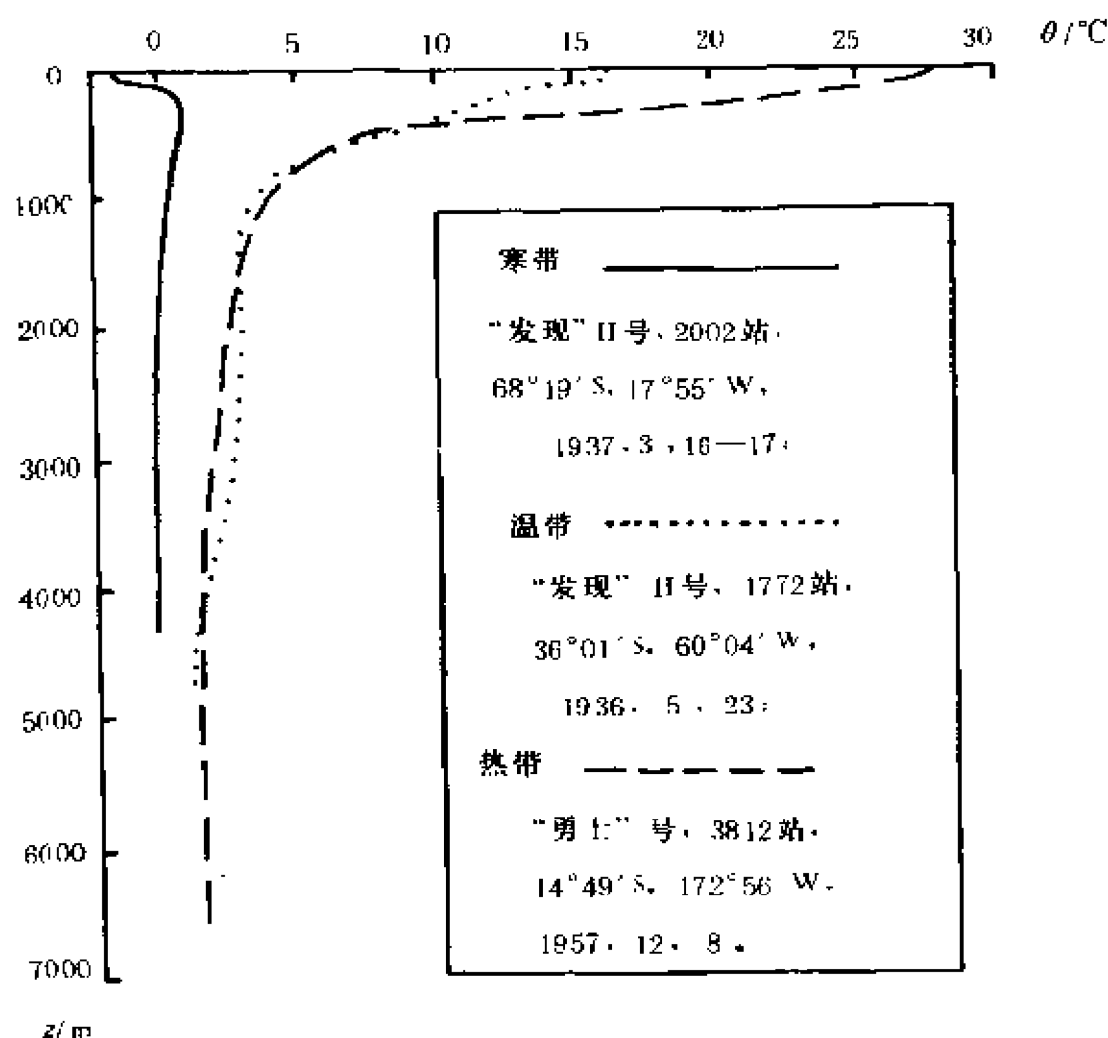


图 2—13 热带、温带和寒带海域水温的铅直向分布

中间冷水不仅在高纬海域出现，其形成原因也多种多样，符拉基米尔采夫(Владимирцев，1963)归纳为 3 种类型：平流成因、对流成因以及对流—平流混合成因。

我国近海某些区域如浙江外海和济州岛附近，春夏之际也常出现中间冷水，图 2—14、15 就是例子。中间冷水的温度与对应海区冬季的温度（由于对流混合，铅直方向温度基本呈均匀状态）有很好的相关性。上层春季增温后涡动混合深度一般达不到往年冬季对流混合的深度，于是在涡动混合的下界处形成了正温跃层，跃层的形成又阻碍了上层热量的向下传输，所以中层仍能保持冬季的低温特征；下层则因台湾暖流和黄海暖流水增温的影响，又形成正温梯度，结果中层呈现为低温冷水。从成因看，应属对流—平流混合型。

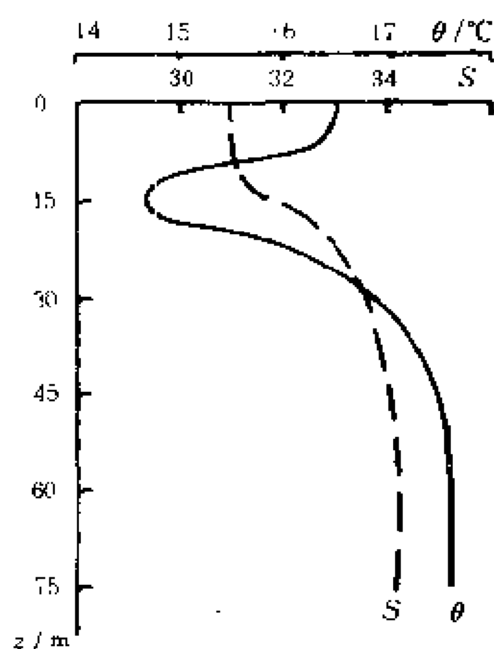


图 2—14　浙江外海（29°N，123°30′E）温盐铅直分布
（1982，5，9）

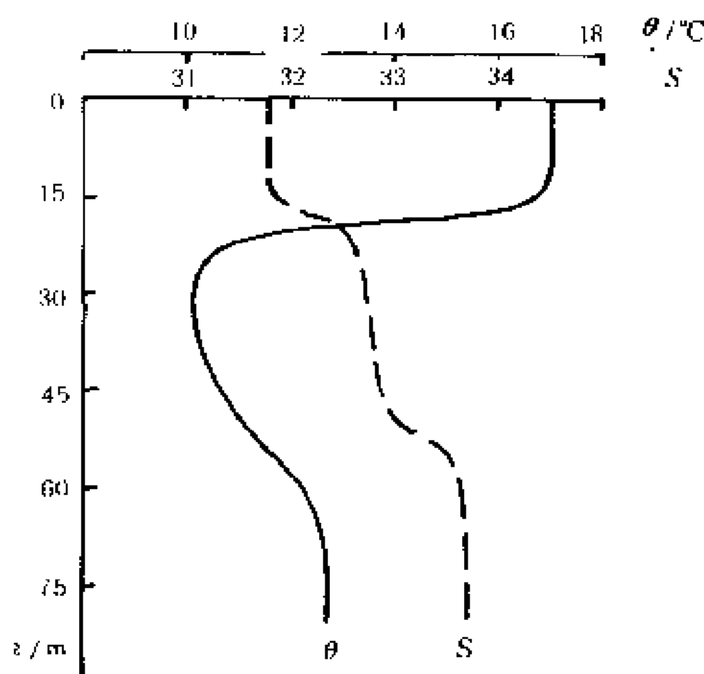


图 2—15　济州岛附近（33.5°N，125°3′E）温盐铅直分布
（1987，6，8）

2.4.3 水温随时间的变化

在 $\theta=\theta(t,x,y,z)$ 中，若固定地点 $x=x_0,y=y_0,z=z_0$ 而讨论水温随时间的变化，即有 $\theta=\theta(t,x_0,y_0,z_0)$。式中的 t 若延续 1 年，则为固定地点水温的年变化，若 t 的时段取为日，则可讨论水温的日变化。

1. 水温的日变化

许多实测资料及研究表明，大洋水温的日变化是不大的。依"实践号"调查船 1979 年 7 月 1 日 12 时至 7 月 4 日 12 时(世界时)在中太平洋西部(平均位置 0°8.8′N，169°37.4′E)的调查资料，可给出图 2—16。水温日变化基本上呈正弦曲线形式，日较差小于 0.5℃，最高温度出现在下午(地方时约 15～16 时)，最低温度出现在早晨(地方时 5～6 时)。由 §2.1 及 §2.2 热量平衡的讨论，很容易解释这一变化规律。

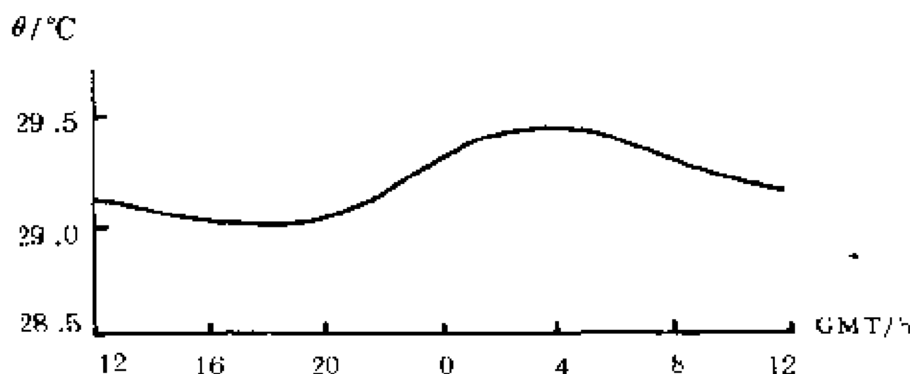


图 2—16 太平洋西部赤道区表层水温日变化

低纬海域的水温日较差一般都很小。德凡特(Defant，1961)对大西洋中 12°15′N～21°30′S 的 4 个测站的水温日较差平均，得表层为 0.25℃，50m 为 0.04℃。依"实践号"和"向阳红 09 号"1979

年的调查，对5个连续站的平均见表2—2，虽然与德凡特的结果

表2—2　太平洋低纬海域的水温日较差

调查船	实践号		向阳红09号			平均
平均站位	7°59.5'S；173°16.8'E	3°50.8'S；173°17.3'E	0°11.8'N；164°59.9'E	3°10.9'N；165°12.7'E	5°N；165°11.1'E	
观测时间	1979.5.11～12	1979.5.18～19	1979.4.30～5.1	1979.5.7～8	1979.5.10～11	
0m	0.27	0.50	0.08	0.45	0.17	0.29
50m	0.04	0.17	0.11	0.05	0.11	0.10
100m	1.27	0.72	1.35	0.65	1.59	1.12
150m	1.62	0.67	2.89	1.74	1.97	1.78

同样表明50m的日较差平均小于表层，但却不能一概类推下层日较差都比上层小。原因是跃层内波可导致表层之下的水温日较差超过表层，由表2—2可见，100m和150m层的日较差都远远超过表层。更有甚者，在2°N，160°E于1979年5月23日观测到，200m层的日较差竟达4.23℃。

浅海和边缘海中的日变化更为复杂。仅就表层而言，不但受制于太阳辐射的日变化，还与潮流等多种动力或热力因素有关，因此日变化曲线不限于一峰一谷的正规形式，不同海区不同月份的水温日较差也不大有径庭。由表2—3可见，就海区而言，以渤海最大，南黄海最小；就季节来说，除长江口外，都是春季最大而秋季最小，长江口附近则是春夏季大而冬季小。

表2—3　中国近海各海区表层水温的平均日较差(据汤明义，1987)

月份	渤海	黄海北部	黄海南部	长江口附近
1～3	1.4	0.8	0.7	0.7
4～6	2.3	2.3	1.3	1.4
7～9	1.8	2.1	1.0	1.5
10～12	1.3	0.7	0.6	0.9

图2—17为南黄海的水温—时间剖面图，表层水温的日较差达1.3℃，变化形式亦非正弦，(10～25)m为跃层，因内波等影响，

变化相当复杂，15m 层的日较差可达 5℃以上。由于跃层的“屏障作用”，(30～50)m 水温低(<10.5℃)且几乎没有明显日变化，日较差很小，特别是(40～45)m 层日较差仅 0.1℃。近底层则因黄海暖流水的作用，使其水温有所上升；又因测站位于黄海冷水团的边缘附近，冷、暖水的互相角逐、彼进此退，导致近底层水温日变化趋于复杂，65m 层的日较差可达 2.0℃上下。然而，从其周日变化的态势看，潮流的影响还是比较明显的。

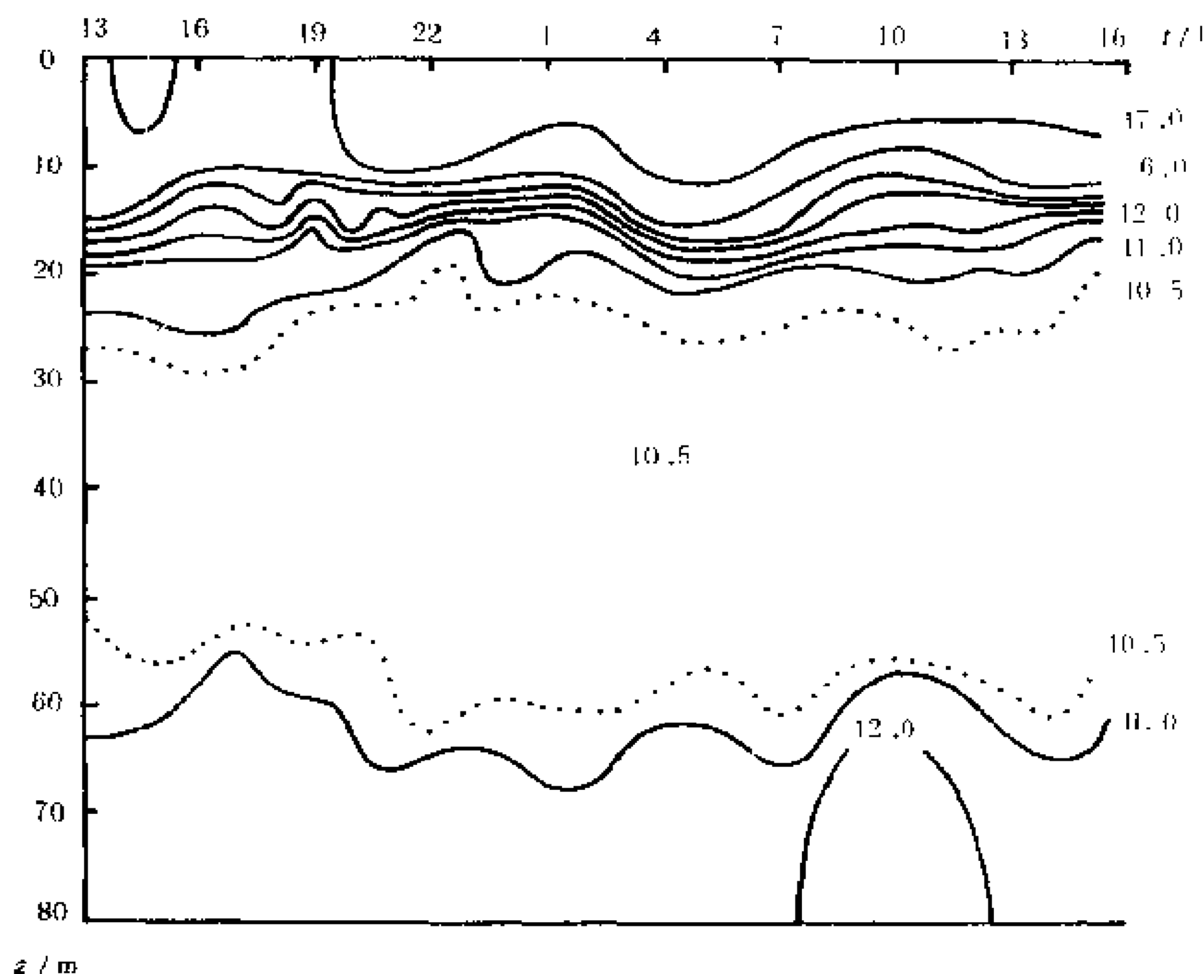


图 2－17　黄海(33°6.8′N，124°59.5′E)的水温-时间剖面图
(1987 年 6 月 8 日～9 日)

2. 水温的年变化

由于地轴的倾斜及日一地距离的变化，太阳辐射能有明显的年变化，故海洋水温相应也有年变化。大洋表层水温受太阳辐射的影响最直接，因而具有正弦曲线式的年变化特征，尤在中、高纬度海域更明显；热带海域由于一年内太阳有两次当顶直射，故有半年周期变化。至于最高、最低水温的出现时间及年较差的大小，则因不同海域还受到盛行风和海流、结冰融冰等影响，因而变化万千。

赤道海域表层水温年较差小于 1℃，这与该海域太阳辐射年变化较小有直接关系。南极大陆周围海域表层水温的年较差也小于 1℃，则与结冰与融冰的影响有关。冬季结冰既放出结晶热，而冰的热导性差（§1.8）又减少了海水热容的散失，所以可使水温的下降变缓；夏季融冰时要吸收大量的融解热，则减少了夏季增温的幅度。亚热带海域特别是温带海域，表层水温年较差相当大，这与当地四季交替明显有关。由于受寒、暖流的影响，水温锋区的年较差更大。如湾流和拉布拉多寒流的锋区年较差达 15℃，在日本东北部可达 17℃。与此成鲜明对照的是，南半球的对应海域由于洋面宽阔，南北向洋流不象北半球那么强，故年较差不大。

在边缘海、浅海和内海、表层水温年较差也相当大，如日本海、黑海和渤、黄海都可达 20℃，即使南黄海中部和东海北部也不小于 15℃，而北黄海中部可达 21℃以上（图 2－18a，b，c），渤海大于 28℃，在某些沿岸浅水区甚至可达 30℃。黄、东海都在 8 月达最高温度，而最低水温一般推迟到 3 月份，即升温占 5 个月，降温占 7 个月，因而年变化过程曲线并非正规的正弦曲线。

表层之下水温的年变化，情况更为复杂。如果说，大洋的上均匀层年变化尚属正弦形式，甚而在浅海季节性温跃层之上还能略见正弦变化端倪的话（尽管不正规，如图 2－18 中的 0m 和 10m），那么，在跃层内及其下，年变化过程曲线可就千姿百态了，如图 2－18 中的 30m、50m 和底层。其原因就在于，这些层次的升温，基

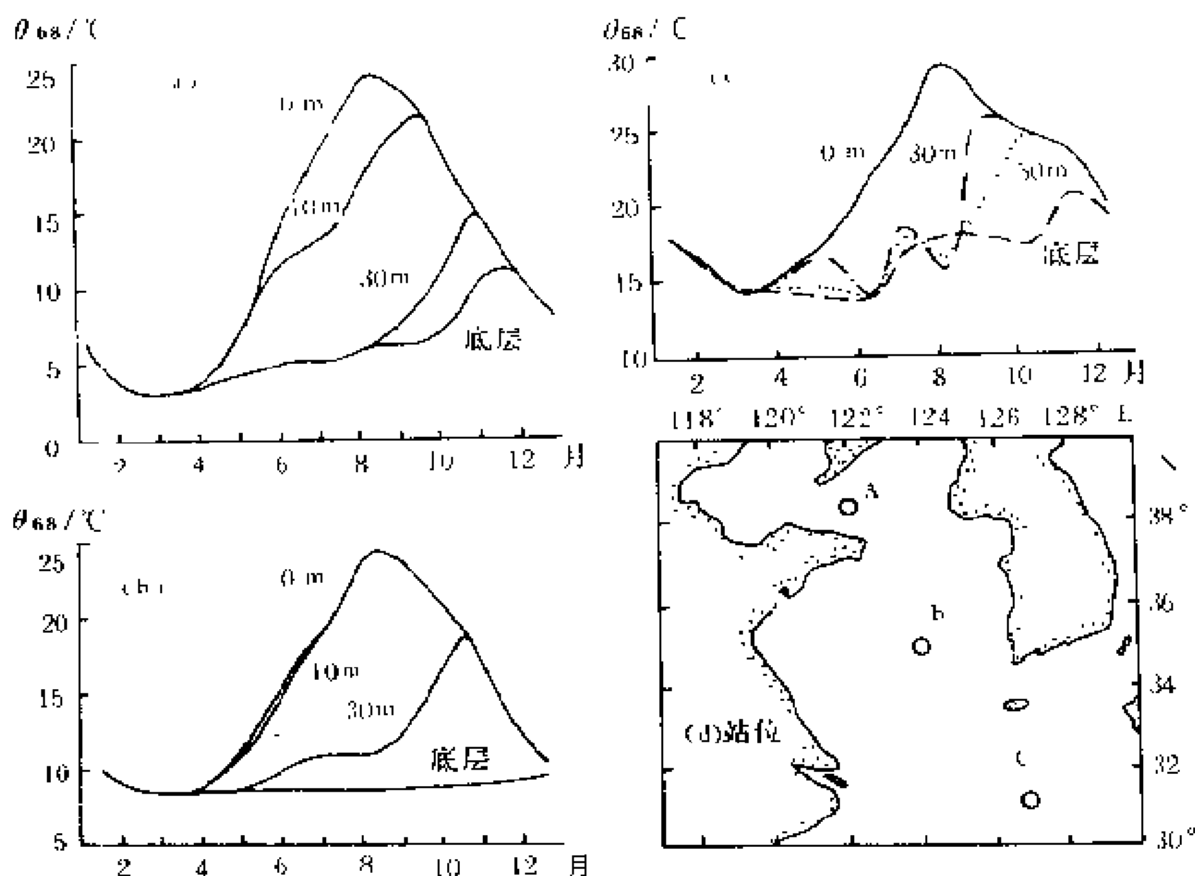


图2—18 黄海和东海水温的年变化

(a)A站,1980年;(b)B站,1980;(c)C站,1979年;(d)站位

本上不是直接靠太阳辐射,而主要靠混合及平流。图2—18a、b中30m以深各层的升温,都在秋季表层开始降温之后,显然是对流混合在起主导作用,图2—18c中30m以深各层水温年变化的复杂,则与该站所处海域有关,因水系复杂,侧向混合或平流作用对该站的影响是相当显著的。

§2.5 世界大洋的盐度场和密度场

和水温类似,盐度与密度也是空间和时间的函数,借助于空间分布图和时间变化图,可分析盐度和密度分布与变化的特点及规

律。

2.5.1 海水盐度的大面分布

世界大洋的总盐量约为 49×10^{18}kg，若将其全部析出均匀铺满地球，其厚度可达 150m。各大洋的盐度平均值以大西洋最高，为 34.90，印度洋次之，为 34.76，太平洋则只有 34.62。但是海洋表层盐度，各处相差却很悬殊，在某些边缘海和内陆海，可测到很高的盐度值，如地中海为 39.10，红海可超过 42.00；而在另一些内海或海湾盐度却很低，如黑海为 15～23，波罗的海为 3～20，在孟加拉湾和几内亚湾也很低。究其原因，盖因水量收支影响，前者盐度大，因蒸发大于降水且径流量少，红海几无河流汇入；后者则因降水大于蒸发，或兼有大河注入。

就大洋表面盐度的多年平均而言，其经向分布与蒸降差（$E-P$）有极为相似的规律，即如图 2—8 所示的驼峰形分布。若将大洋表面盐度的区域分布（图 2—19），与年蒸降差的地理分布（图 2—20）相对照，也发现它们分布规律极为相似。例如南北两个亚热带海域，蒸降差呈明显的高值带状分布，大洋表层盐度也有对应的高值带状区，南、北太平洋分别达 35 和 36，大西洋更高达 36～37；在赤道海域蒸降差为低值，也对应于大洋表层盐度的低值带状分布。大洋表层盐度明显偏离带状分布的区域是印度洋北部和太平洋西部，而这些地方盛行季风，蒸降差也与上述带状分布有偏离。中美和南美洲西岸、几内亚湾和孟加亚拉湾，由于降水远远超过蒸发，则是显著的低盐区。

大西洋的蒸发超过降水和径流（表 2—1），故其表层盐度平均值居四大洋之首，可达 35.50；太平洋相反，故平均盐度最低，南太平洋为 35.20，北太平洋仅 34.20。

靠近极地海域，盐度值降到 34.00 以下，除了蒸降差为负值可予解释外，融冰的影响也是存在的。大西洋东北部的挪威海等处，

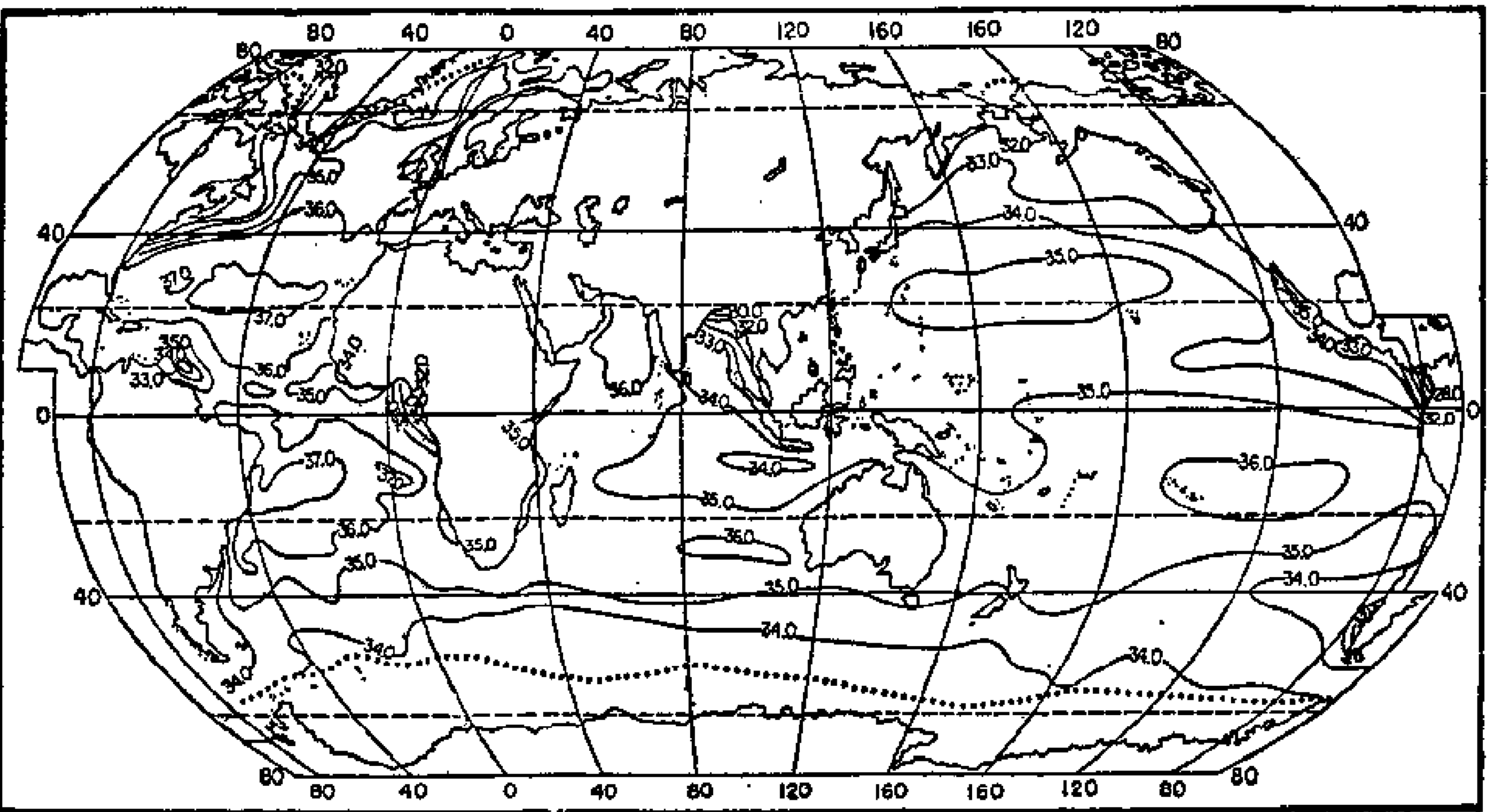


图2—19 世界大洋8月份表层盐度分布

(据Степанов，1974)

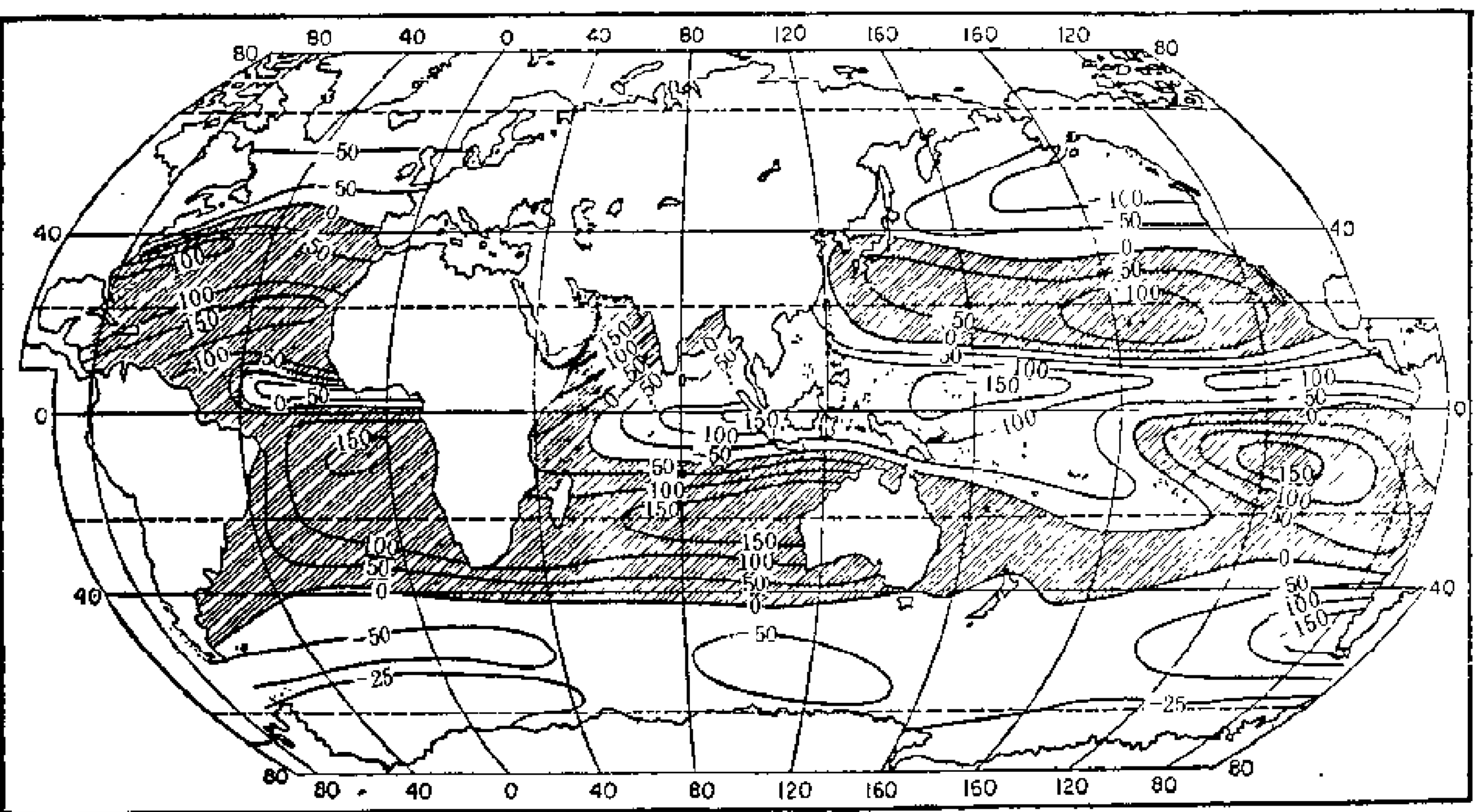


图 2—20　年蒸降差(g/cm²)分布

(据 Степанов，1974，改绘)

虽已靠近极地，但盐度值却相当高，这是由盐量的平流输送造成的，即北大西洋流和挪威海流，把高盐海水携运到这些海域来的结果。

盐度水平梯度特别大的海域，多在径流冲淡水域或寒、暖流的交汇之处，这显然是因为它们的盐度性质相差悬殊而造成的。图2—21为长江口外盐度分布，其他大河冲淡水域也有类似分布。

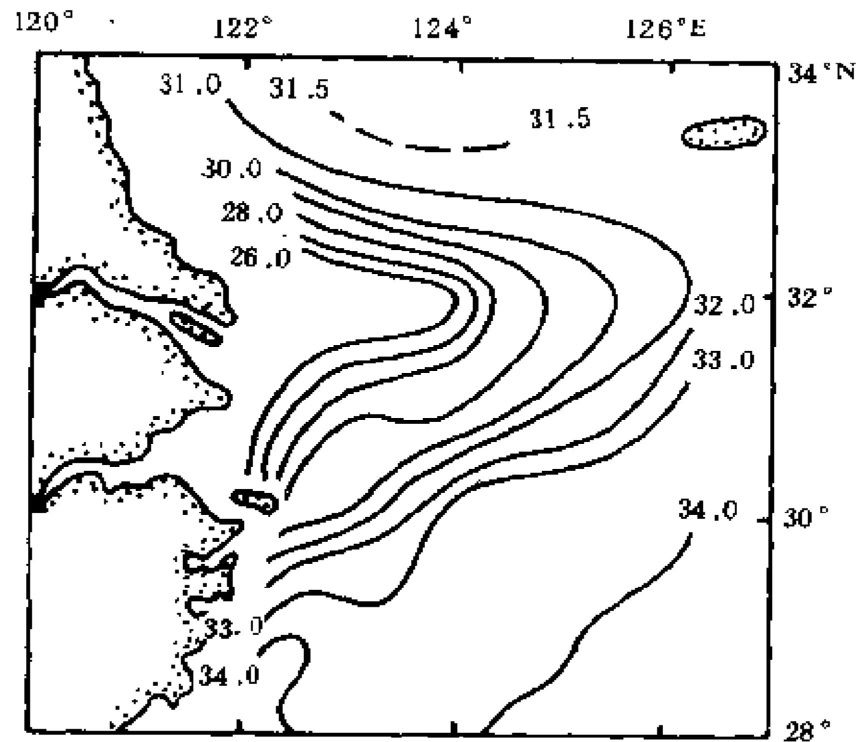


图2—21 长江口附近海域表层盐度分布

（1979年8月）

大洋表层盐度的冬、夏分布，不象水温那样差异明显，只是在季风影响特别显著的海域，如孟加拉湾和南海北部海区才有较明显的差异。这些海域夏季降水量很大，盐度甚低；冬季降水量减少而蒸发增强，所以表层盐度有所增加。

表层之下盐度的分布，因蒸发、降水和径流等等影响逐渐减弱甚至消失，区域性的差异也逐渐变小，层次愈深，差异也越小，例如

在 500m 层，整个大洋的盐度差下降到 2.3 左右，至 2000m 则只有 0.6，充溢于大洋深层和近底层的海水，其盐度基本上是均匀的。

2.5.2 海水盐度的铅直向分布

从太平洋和大西洋经向断面的盐度分布（图 2—22，图 2—23），可以了解世界大洋盐度铅直向分布的主要特征。

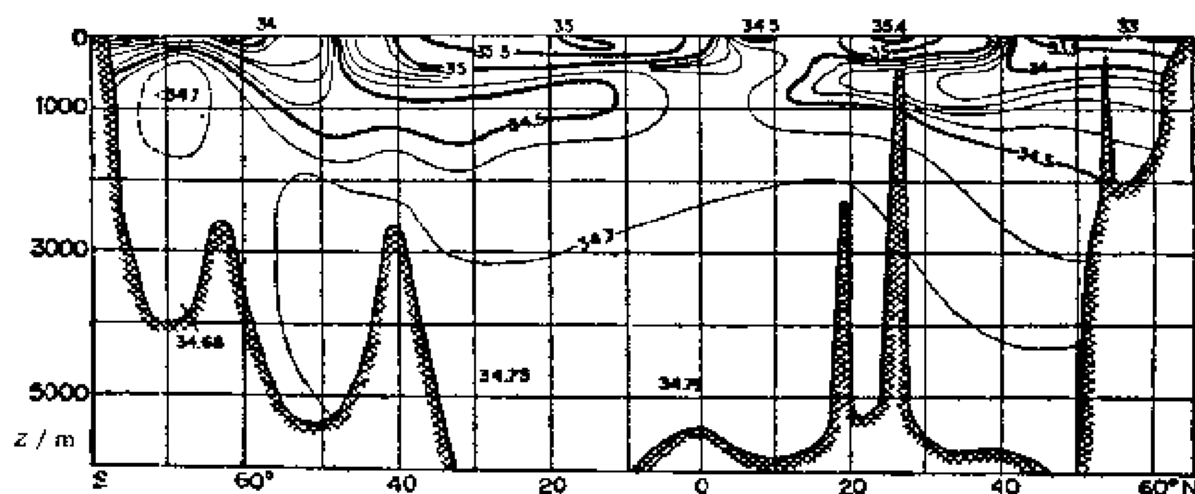


图 2—22 太平洋准经向断面的盐度分布（据 Некрасова 及 Степанов，1963）断面位置见图 2—11

大洋表层之下的盐度分布，与表层有很大的不同。低纬海域表层的低盐水只涉及不大的深度，其下方便是厚度相当大的一层高盐水。从图 2—22 及图 2—23 看，这一高盐水体和从南半球亚热带海面向下伸展的高盐水舌，是连在一起的；高盐水舌可以越过赤道，直到北纬 5°左右。相比之下，北亚热带向下伸展的高盐水舌则逊色得多。高盐水舌的核心，南大西洋高达 37.20 以上，南太平洋也可达 36.00。从高盐核心层向下，等盐线相当密集，形成铅直方向上的盐度跃层，跃层中心大致在（300～700）m 的深度上。跃层上下的盐度差，在南太平洋和南印度洋可大于 1.0，南大西洋则高达 2.5。盐度随深度降低虽能使海水密度减小，但由于水温随深度的

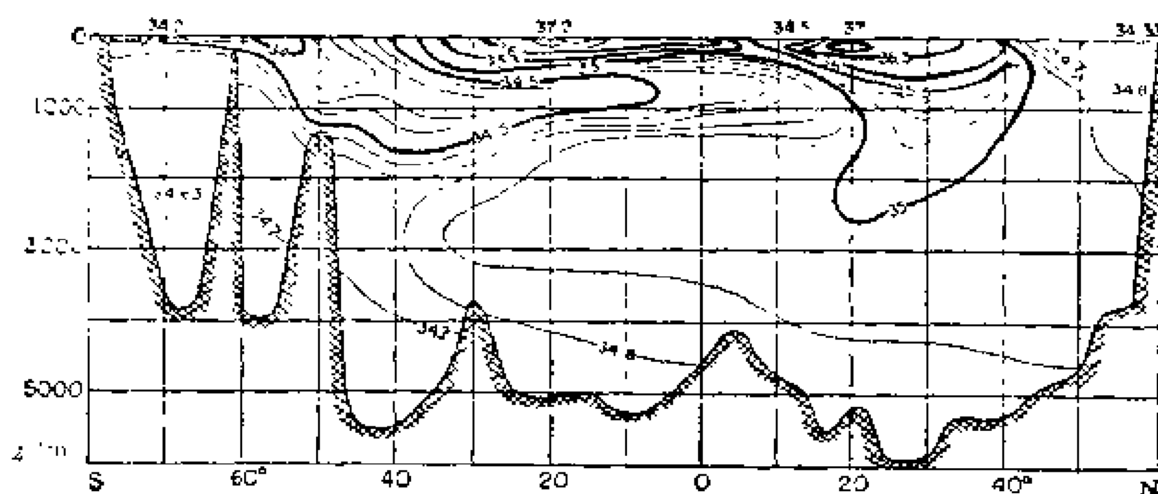


图 2—23　大西洋准经向断面的盐度分布((据 Некрасова 及 Степанов,1963)断面位置见图 2—11

降低而增密,所以这一盐度跃层仍能保持其稳定性。

盐度跃层之下又出现一个低盐水层,逆低盐水舌伸展方向而溯源,可追溯到亚极地海面。约在南纬 45°～65°围绕南极的南大洋海面,这一低盐水体下沉,继而在(500～1500)m 的层次中向北扩展,进入三大洋的中、低纬度海域。在大西洋,它可以越过赤道直达 20°N;在太平洋亦可到达赤道附近。在印度洋则只限于 10°S 以南,因为源于红海、波斯湾的高盐水,下沉之后也在(600～1600)m 的水层中向南扩展,从而阻止了南极中层水——低盐中层水(最低盐度仅 34.00,最高也不过 34.60～34.70)的北进。在北大西洋的中层,也有相应的低盐中层水和高盐中层水,前者在纬度位置上虽与南极中层水的源地相当,但其势力却弱得多——范围小而盐度值高;后者则为地中海高盐水,它与印度洋的红海水相当,也是世界大洋中最显著的中层高盐水。地中海水在北大西洋的影响范围相当广阔,东北方向可达爱尔兰,西南可到海地岛,因而,即使象图 2—23 那样偏西的断面,仍能明显看到这一中层高盐水。在北太平洋,也有相应的低盐中层水,尽管其形成机制与南太平洋不尽相

同；然而，却未发现有与地中海水、红海水相对应的高盐中层水。

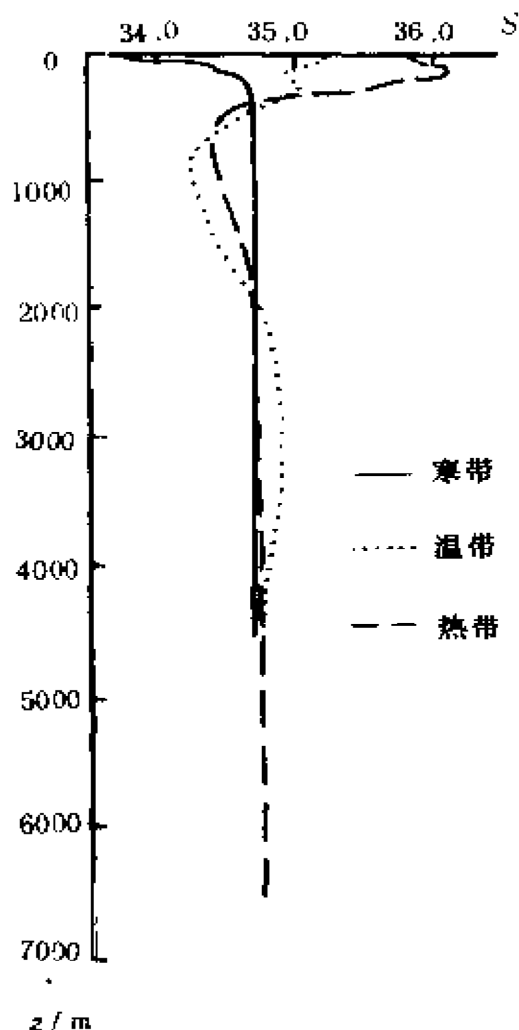


图 2—24 寒带、温带和热带海域盐度的铅直向分布

（资料来源同图 2—13）

在低盐中层水之下，海水盐度值稍有升高，如北大西洋深层水可达 34.90；深度再增加后，盐度复又缓降；充溢于各大洋底部的底层水，盐度在 34.70 以下。由于这些水体温度很低，甚至降到 0℃以下，密度并未因降盐而减多少，所以能稳定地潜居于深邃的大洋底层。

从大洋不同纬度带海面上，分别有高盐和低盐水下沉并能在不同深度的层次散布，关键在于其自身密度的大小，当然也受大洋环流的制约。盐度不同的海水，在不同纬度带的海面下沉，又散布于深度不同的层次上，这就使得盐度的铅直向分布，在不同气候带海域内形成了迥然不同的特点。图 2—24 中分别绘出了寒带、温带和热带海域盐度的铅直向分布曲线。显而易见，在 2000m 以浅，特别是在（0～1000）m 的海洋上层，3 条曲线形态各异差别很大。热带海域表层及近表层盐度低，但此层厚度不大；其下在（100～200）m 层便出现盐度的最大值；再向下盐度复又急剧降低，约在（800～1000）m 层出现盐度的最小值；深度再增加时，盐度又缓慢地升高

(图 1—11)。在寒带,表层盐度更低,但随深度增加盐度是递增的,约在 200m 层增至极大值,此后则基本无多大变化。温带海域表层及近表层因受季节变化影响,盐度变化随之有明显的季节性特征,既至中下层则与热带相似,但盐度在 1000m 层的极小值更突出。

2.5.3 盐度的日变化和年变化

1. 盐变的日变化

大洋表层盐度的日变化,在低纬海域较小,不超过 0.05(Defant,1961)。据"实践号"和"向阳红 09 号"的调查,也大体如此(表 2—4)。至下层因受内波影响,日较差大于表层者也屡见不鲜。

表 2—4 太平洋低纬海域盐度的日较差

调查船	实践号		向阳红 09 号			平均
平均站位	7°59.9'S; 173°16.8'E	3°50.8'S; 173°17.3'E	0°1.9'N; 164°59.0'E	3°0.9'N; 166°2.7'E	5°N; 165°1.1'E	
观测时间	1979,5,11～12	1979,5,18～19	1979,4,30～5,1	1979,5,7～8	1979,5,10～11	
0m	0.01		0.06	0.03	0.05	0.04
50m	0.08	0.12	0.07	0.02	0.23	0.10
100m	0.51	0.12	0.05	0.02	0.20	0.18
150m	0.12	0.06	0.14	0.09	0.08	0.10

在浅海区域,季节性跃层的深度更小,内波等引起的盐度日较差增大现象,可出现于更浅的水层中。如图 2—25,盐度跃层在(15～25)m,其日较差比表层大得多,表层只有 0.1,20m 可达 0.8,在(30～50)m 的冷中间层(图 2—17)内,盐度很均匀,日较差也只有 0.1。但在 65m 层出现了与潮周期有关的日变化,日较差也增加到 0.8。

近岸海水盐度的日变化,受潮流的影响很大,因此盐场很讲究"纳潮"时间的选择。

2. 盐度的年变化

由于降水、蒸发、结冰和融冰都有年周期变化,所以海洋表层盐度的年变化也有周期性。例如在白令海和鄂霍次克海等亚极地

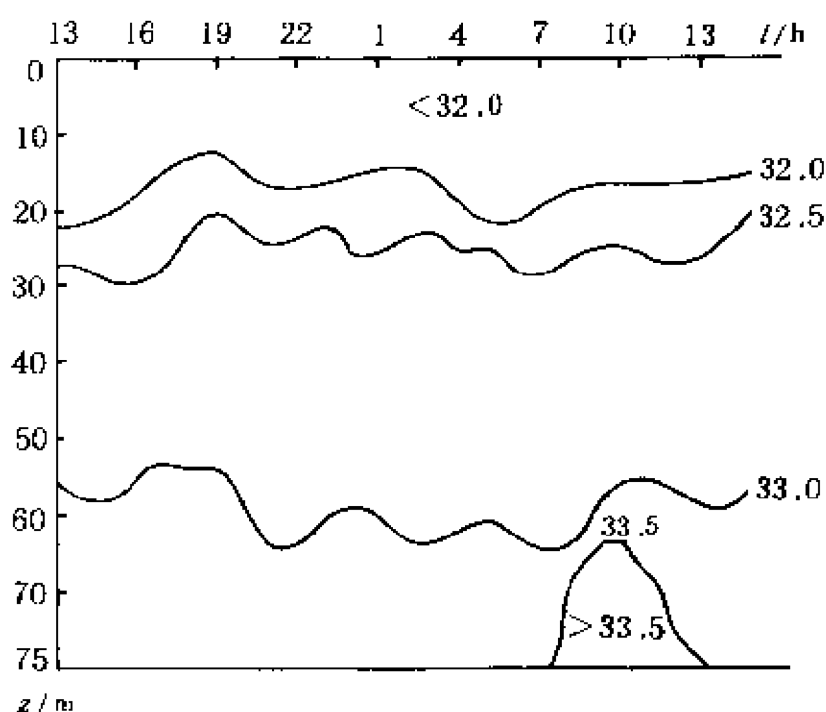


图 2—25　南黄海(33°6.8′N,124°59.5′E)盐度—时间剖面图
(1987 年 6 月 8 日～9 日)

海域,由于春季(大约在 4 月前后)融冰,表层盐度出现最低值,冬季季风引起强烈蒸发以及结冰排出盐分,则使近表层盐度达一年中的最高值。中纬度海域如黄海和东海,表层最低盐度值出现在降水和径流最大的夏季,东海(图 2—26d)在 7 月,而黄海(图 2—26b,c)推迟到 8～9 月,最高盐度值则一般在蒸发强而降水少的冬季出现。

表层盐度年变化过程曲线的形状,比温度(图 2—18)复杂得多。再加上季节性跃层盛衰升降的影响,下层盐度的年变化,更趋复杂多样。在黄海冷水团、黄海暖流水和对马暖流水所影响的海域,由于侧向混合及冷、暖水的彼进此退,更使中下层盐度的年变化,呈现出五花八门复杂奇特的形式(图 2—26c,d)。

2.5.4　海洋的密度场

海水的密度是水温、盐度和压力的函数,这些影响因素本身也

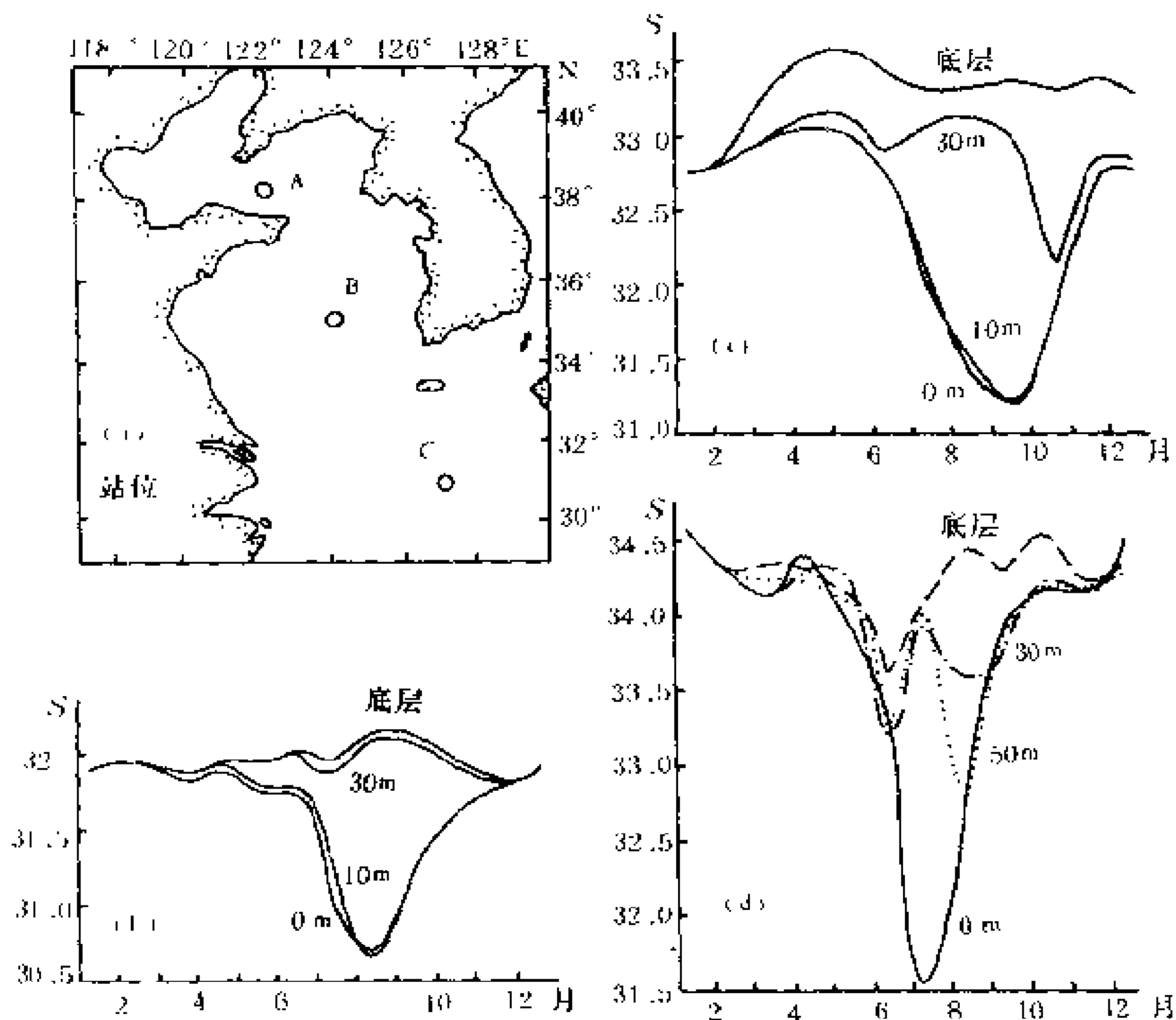


图 2—26 黄海和东海盐度的年变化

(a)站位分布;(b)A 站,1980 年;(c)B 站,1980 年;(d)C 站,1979 年

随时间和空间而变化,所以密度同样可表示为场函数,因而借助于分布图和变化图可了解密度分布和变化的规律。

1. 海水密度的空间分布

大洋表层密度的分布,主要受制于表层水温和盐度的变化,压力的影响是可以忽略的。由于大洋表层温度在赤道区域最高,同时盐度在此区域也是极小值,因而赤道附近海域表层海水的密度达最小值,密度超量 γ 不到 $23kg/m^3$。随着纬度的升高,水温逐渐降低,密度则逐渐增大。虽然在亚热带盐度出现极大值,但因温度下

降得不多，所以密度并未出现相应的极大值；在温带海域，虽然盐度剧降，但因水温下降的效应更显著，所以密度也未出现极小值，只是增密的速率有些减缓而已。图 2—27 为大西洋表面温、盐、密随纬度的变化。太平洋和印度洋也类似，不过象孟加拉湾等降水多、径流大的海域应属例外。

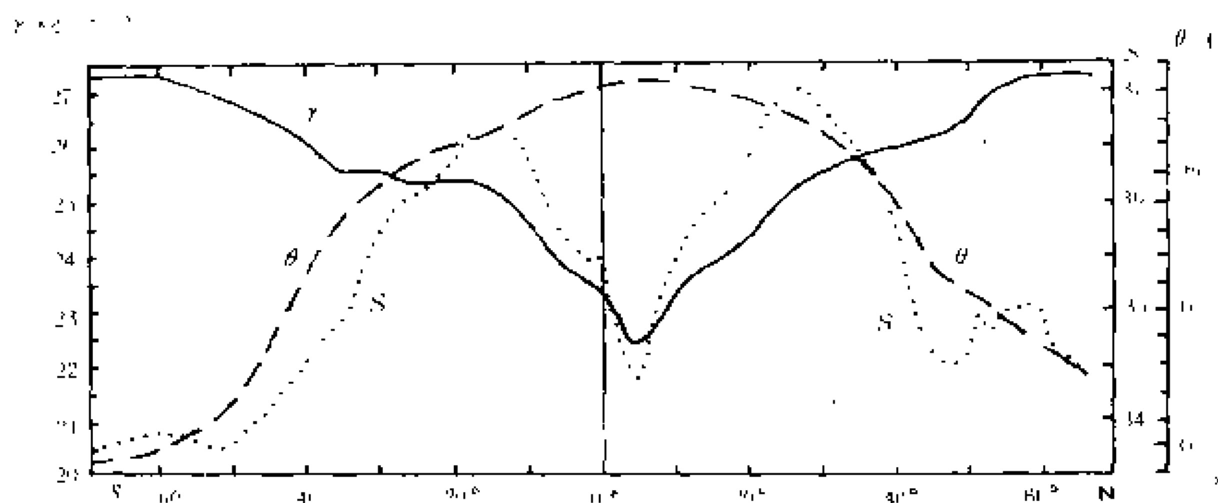


图 2—27　大西洋每 2°纬度带的年平均表面温度、盐度和密度

（据 Dietrich，1980，改绘）

在大洋的上混合层内，混合效应使得密度的铅直分布较均匀。主温跃层既然是密度跃层的所在，故在不同的纬度上也有相应的起伏。主温跃层之下，因整个大洋的水温、盐度愈趋均匀，所以密度的水平梯度也随之减小。当然，由于受下层环流的影响，也能形成密度分布的局地特征。如图 2—11，因受西部边界流的影响，大洋西侧水温高，密度相应地就要小一些。

环流对密度铅直向分布的影响，并不限于中下层，图 2—28 为东海黑潮主流区一个断面上的密度超量分布，等 γ 面的倾斜相当明显，密度较小的海水偏向主流的右侧。大西洋湾流区的密度超量分布，也有类似的特征。

虽然密度基本都随深度增加而增大，但因不同气候带上温度

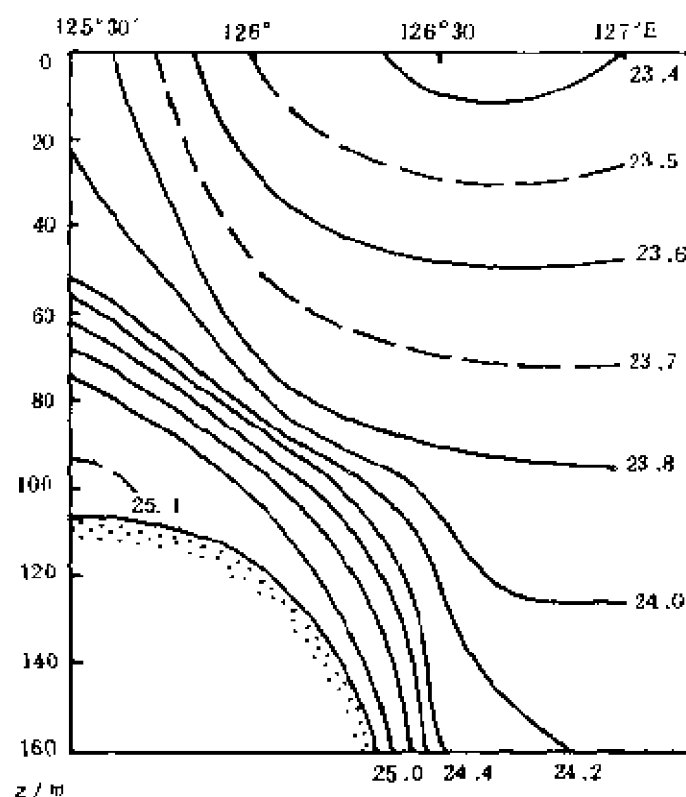


图 2—28 东海 28°N 断面上的密度超量(kg/m^3)分布
(1977 年 12 月)

和盐度的铅直向分布各具特色，所以不同气候带上密度的铅直向分布也颇有不同。热带海域跃层上方密度小而均匀，跃层的强度却很大；温带表层密度已增大，而跃层却大为减弱；寒带表层密度更大，但铅直向梯度却不大，除非夏季因融冰使表面一薄层密度减小，能形成浅而弱的跃层，冬季则产生大规模的对流和下沉。

海水下沉运动所能达到的深度，取决于它本身的密度及其下方的层结和环流状况。南极威德尔海和罗斯海，由于强烈冷却形成高密度(密度超量 γ 可达 27.9kg/m^3)冷水，故能沿大陆坡一直下沉到海底，并继而向三大洋底部散布。南极辐聚带的冷却次之，所形成的低温低盐水可下沉到中层，在 1000m 上下的水层中向北散布。亚热带辐散带的高盐水，因水温高密度较小，则只能下沉到次表层内散布。

由于下沉后的海水都有向低纬海域散布的趋向，因而低纬海域铅直方向上水温、盐度和密度的分布，就与赤道至极地间大洋表面水温、盐度和密度的经向分布，存在着相当密切的关系，两者的分布特征因之亦相似，从而也可在分析中互为印证。

2. 大洋密度的时间变化

大洋表层密度的日变化，主要受制于水温和盐度的日变化，后二者变化不大，因而前者亦小，而且该变化所能影响的深度也不大。如果有跃层和内波振荡，那自然另当别论。

大洋表层密度的年变化，受水温和盐度的季节性、局地性影响很大，所以较复杂。中、下层密度的变化，受水温的区域性差异影响较显著。

由于密度跃层的形成，往往以温跃层的形成为先导，因而季节性密度跃层就和季节性温跃层共生消共存亡，有着相同的生命史——春季形成，夏季强盛，秋冬衰亡。

§2.6　海洋温、盐、密度的细微结构

前面对海洋中温度、盐度及密度的铅直方向的分布的讨论，大多是基于常规仪器如南森(Nansen F.)采水器和颠倒温度表的观测结果。由于观测层距较大，那些铅直向尺度小于常规观测层距的细小尺度的层结现象，便有意或无意地被忽略了。如图1－9、11、12及本章所引用的一些铅直分布图，其实是把细小尺度的“扰动”过滤或平滑以后的概貌。60年代以来，STD和更精密的CTD的推广应用，揭示了铅直尺度小于1m的热盐结构，自由沉降式微结构记录仪则更精密，对于微结构观测，深度分辨已达厘米级、甚至毫米级的水平，从而使这一领域的研究日趋活跃。

在描述物理海洋场的铅直向不均匀特征时，对于那些尺度小于常规观测层距的小尺度结构，便给予“细微结构”的称谓；有的还

进一步再细分，把铅直向尺度大于 1m 的称为细结构，而小于 1m 者称为微结构（或精结构）。后来，格莱哥（Gregg，1975）和费多罗夫Федоров，1976）等，在对铅直向的不均匀性的尺度划分时，倾向于把具有成层特征的不均匀称为“薄结构”，而把与微湍流有联系的不均匀性称为“微结构”。这种分类的观点，不仅以尺度为准，也考虑了形成机制。由此可以设想，随着对形成机制的更深入的了解，也许会酝酿而提出更科学的分类标准。限于篇幅，本节只简略介绍一些有关的知识。

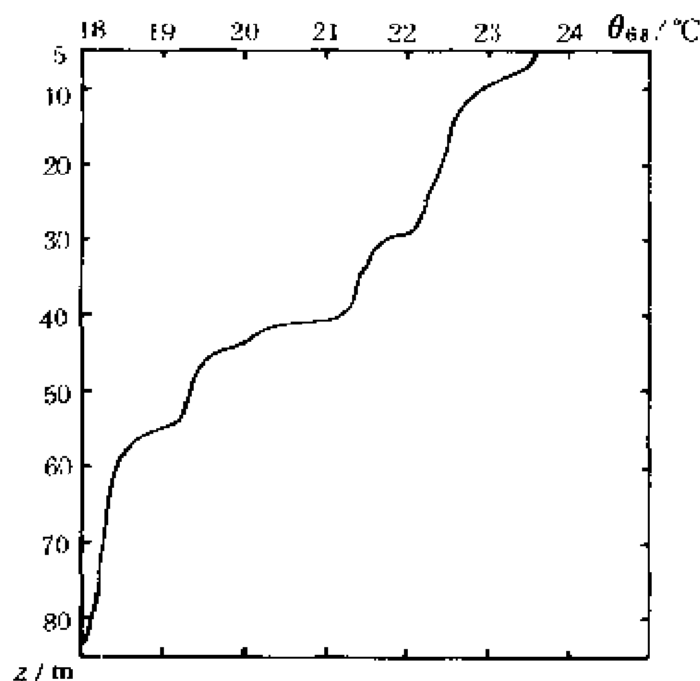


图 2—29　东海北部（29°47′N，127°24′E）温度的阶梯状结构（1987 年 6 月 7 日）

实测资料表明，海水在铅直方向上的结构是由许多尺度很小的水层构成的。在每层之内温、盐性质相对均匀，而在这些“均匀层”两两之间，则夹着厚度更小但梯度特别大的过渡层，有的“层”甚而只能称为“界面”。这些水层在准水平方向上的尺度，远远大于其铅直尺度，甚至可展布于相当大的海域，而且具有某种相对稳定性，就象“床单”或“薄页”被伸展开来似的。费多罗夫的统计资料表明，许多薄层的水平尺度可达铅直尺度的 1000 倍。

这种薄层结构通常有两种形式：一种是阶梯状结构，另一种是不规则的扰动型结构。图 2—29 是出现于上混合层中的阶梯状薄

层结构，其形成原因可能多种多样，但作为上混合层，海面风致混合的影响当然起作用，因此在§2.2.1中关于图2—3的讨论以及其他关于多重跃层形成机制的分析（杨殿荣等，1990）均可借鉴。然而，如图2—30所示的中、下层的阶梯状结构，就不能用海面风混合作用来解释。形成原因之一是双扩散对流（§1.4.5），即温度的扩散系量显著大于盐度扩散系量而造成的。当高温高盐水和低温低盐水叠置且呈稳定层结时，若上下密度差异小，则上层海水因失热较快而冷却下

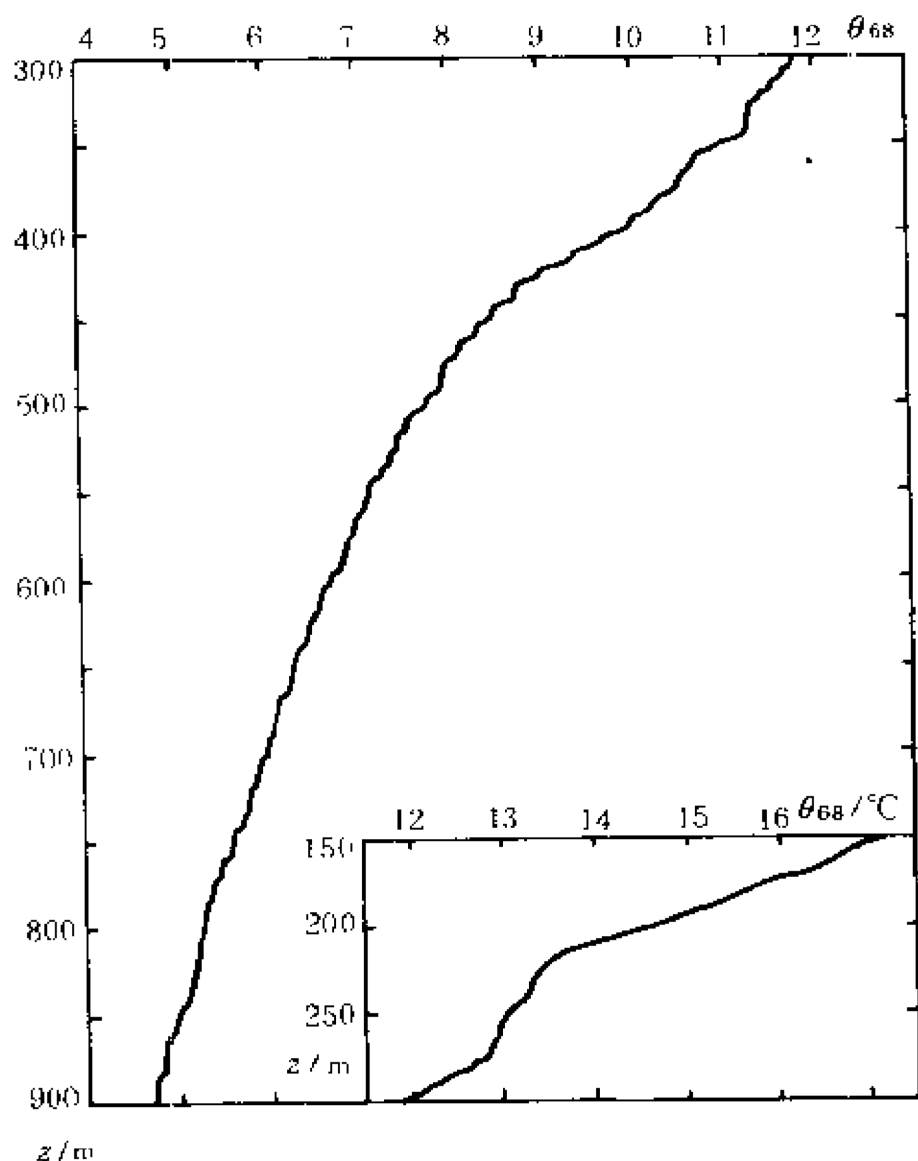


图2—30 东海黑潮区（29°24′N，127°48′E）中、下层水温的阶梯状结构（1987年6月6日）

沉，下层则因受热较快而增温上升，于是产生双扩散对流。这时会在界面上出现簇状小水柱，长度一般介于(20～30)cm，水柱间距离约1cm，通常形象地称为“盐指”。下降和上升的盐指，分别从界面的上、下表面沉降和升起，离升盐指生成处稍远的海水会来补偿，故使界面仍能保持原来的强梯度薄层状态。然而，界面上下的水层，却因升降盐指的搅拌而趋均匀，这种过程的继续，就形成了多层阶梯状结构。如果上层是低温低盐，下层是高温高盐又能维持稳定层结时，则可产生双扩散层结现象，即界面之上的低盐水因受热快而增温上升，界面之下的高盐水因失热较快而冷却下沉，对流的结果也能形成多层阶梯状结构。流入大西洋的地中海水的下部，属于前一种情况，而流入北冰洋的大西洋水的上部则为后者。图2—30中从150m至600m层的阶梯状结构，可以认为主要是由第一种双扩散对流所形成，因为该层次范围的水团叠置和热盐结构(李凤岐等，1989a，及本书图3—8、3—9)正符合其条件。至于600m以深则另当别论，诸如海水混合凝缩引起的增密对流，速度剪切和湍流等等，都可能起一定作用。

不规则扰动型薄层结构，也是相当普遍的，如东海对马暖流区(图2—31)就是一例。由于该海域水系复杂，不同水团在此交汇角逐(李凤岐等，1989a)，形成复杂的锋面，因而有助于不规则扰动型薄层结构的形成。

甚至就在温跃层(往往也是密度跃层)之中，也存在着细微结构。这的确有悖于传统的跃层模式；因为经典的跃层模式认为，在跃层之内温度是随深度单调而迅速地降低，从而使密度单调而迅速地增大，亦即铅直向梯度很大，所以限制了铅直方向的热量、动量和质量的交换。然而，实测和研究证实，在温跃层内也有一系列的薄层，既有厚度为数米的温度和密度相当均匀的薄层，而且在两均匀层之间也夹着厚度更薄的，例如只有(10～20)cm，但铅直梯度特别大的界面层，甚至还有逆温层。通常认为，在温跃层内层结

是稳定的，即使有逆温分布，也因为盐度随深度的递增而补偿，从而保持层结稳定性。然而现今发现，在温跃层内，的确有静力不稳定的水层，这可能与内波的破碎以及形成所谓"湍流斑"有关。

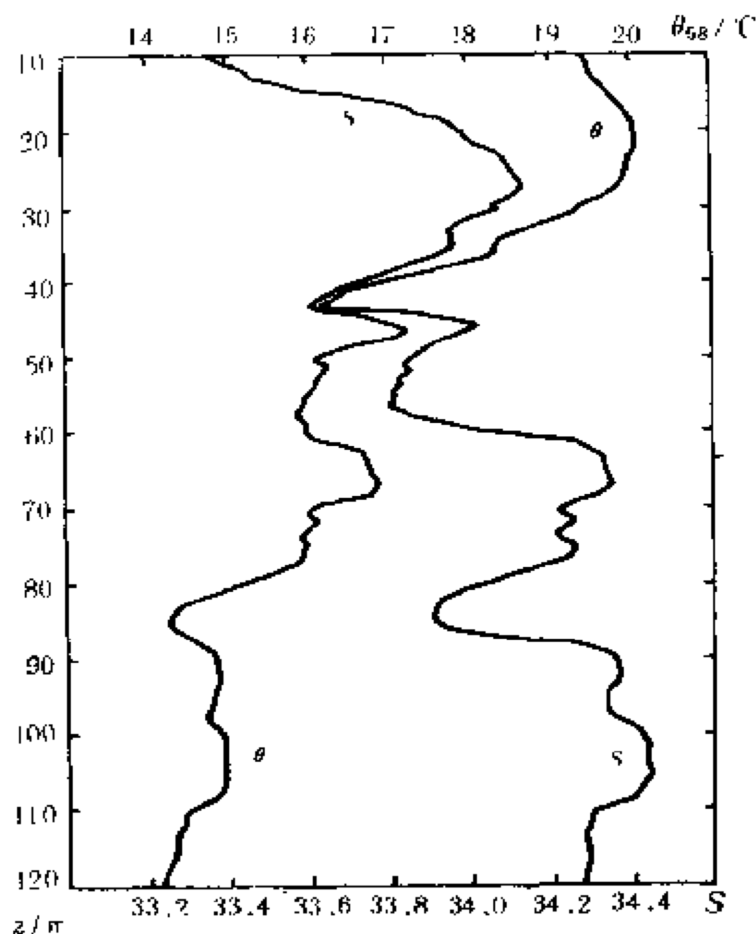


图 2—31 对马暖流区的温、盐不规则扰动薄层结构

(31°54′N，127°54′E；1987 年 5 月 31 日)

有关海水细微结构的形成原因，已提出的假说很多，归纳起来可分下面几种。着眼于不同水团侧向(准水平方向)侵入、平流和混合扩散的，可称为侧向热盐输送假说；着眼于内波破碎与湍流混合的，可称为内波作用假说；着眼于热、盐扩散系量的差别及"盐指"的，可称为双扩散对流假说。另外还有一种"海水混合凝缩(增密)假说"，则用混合后密度增大的效应，去解释高温低盐海水和低温高盐海水上下稳定叠置时，发生在界面上的小尺度对流现象。

由于海水温、盐、密度的细微结构，千姿百态甚为复杂，所以往往是多种效应或过程综合作用的结果。

第三章　世界大洋的水团和环流

世界大洋的水团和环流，一直是物理海洋学最关注的问题之一，有些海洋学家甚至宣称这是海洋学的“根本问题”和“归宿”。水团和环流两者相辅而相成，关系甚为密切，然而两者在概念和研究方法上又存在着明显的差别。

§3.1　水团的有关概念

海洋学研究伊始，就用到了水团这一概念，如1770年富兰克林(Franklin B.)研究“湾流水”，1906年科尼波维奇(Книповичъ H. M.)研究巴伦支海中的“大西洋水”等等，事实上已经孕育了水团的概念。不过，当时还没有正式使用“水团”这一名称术语。是海兰—汉森(Helland—Hansen B.)于1916年第一次把水团这一术语正式引入海洋学中。至于水团的定义，则经历了很长的补充、演化、修订的过程。

3.1.1　水团定义的演化

海兰—汉森最初建议，用一段温一盐曲线表示一个水团，这当然不是水团的定义。1929年德凡特首次明确给出定义：“水团是具有明确而比较恒定(或保守)的理化特征(如温、盐度)，体积有限或无限的水体。”1947年多布罗沃尔斯基(Добровольский А.Д.)给出了一个更为详尽的定义：“水团是指在大洋的某一确定区域——源地——内形成的较大的水体，它具有独特的理化特征和生物特征，这些特征几乎是长期恒定的连续分布的，并作为水团这一综合整

体的组成部分，随水团而集体移动”。

上述定义中，都把理化性质的恒定（或保守）作为鉴别水团的基本条件，对于大洋水团，这是可行的。然而，对大洋的表层水团来说，已显得过于严格，更不必说对浅海水团了。中国大百科全书（海洋科学卷，1987）关于水团定义是这样叙述的：源地和形成机制相近，具有相对均匀的物理、化学和生物特征及大体一致的变化趋势，而与周围海水存在明显差异的宏大水体。”。

剖析水团的各种定义，可以归纳为“内同性”与“外异性”原则。前者是指同一水团内的水体，其源地或形成机制相近，理化、生物等特征的空间分布相对均匀，而随时间的变化趋势大体一致。正因为这些水体具备内部同一性，所以它们可划归一个水团，这可以说是水团划分的必要条件。然而仅此条件还不充分，因为若将一个水团再分为若干部分的话，它们都仍然具有内同性，但是如此划分既无必要也无意义。因此还必须同时具备另一个条件，即：这些水体与该水团外部相邻的水体，在上述几方而存在着明显的差异——“外异性”，否则就勿需划分开来。有了这一条，就能充分避免把没有实质差异的水体勉强地割裂为几个水团。兼备这两条，水团的划分就能保证其充分必要性（李凤岐等，1986a）。

3.1.2 水型、水系及其与水团的关系

水型（*water type*）是斯韦尔德鲁普 1942 年定义并详加讨论的，其后为许多学者引用。它指的是温、盐度均匀，在温—盐图解上仅用一个单点表示的水体。海洋观测的一个水样——观测层点水体元的样品，其性质除温、盐两项外，还可以测试若干项；设共有 m 项，则可将一个水样的测值写成 m 维矢量（李凤岐等，1986a，b）

$$x_i = (x_{i1}, x_{i2}, \cdots, x_{im}) \qquad (3.1-1)$$

脚标 i 是水样的序号。在实际海洋中，水样是无穷多的，但现场观测只能取有限个，此时 $i=1,2,\cdots,n$。性质完全相同的水样，在测值

空间中便映射于一个点，因此，水型可以定义为性质完全相同的水体元的集合；从而，用特征函数

$$\nu_P(x) = \begin{cases} 1 & x_i \in P \\ 0 & x_i \overline{\in} P \end{cases} \qquad (3.1-2)$$

可对水型进行描述。需要指出的是，$x_i \in p$ 是要求第 i 个水样的所有 m 项性质与 P 的 m 项全部一一对应相等。

由内同性和外异性可知，水团可定义为性质相近的水型的集合，其特征函数为

$$\nu_A(P) = \begin{cases} 1 & P \in A \qquad (3.1-3) \\ 0 & P \overline{\in} A \qquad (3.1-4) \end{cases}$$

式(3.1－3)对应于内同性，而式(3.1－4)则体现外异性。该二式与式(3.1－2)结合，便有

$$\nu_A(x) = \begin{cases} 1 & x_i \in A \\ 0 & x_i \overline{\in} A \end{cases} \qquad (3.1-5)$$

可作为水团的特征函数。$x_i \in A$ 并不需要第 i 个水样的 m 项性质与 A 完全一一对应相等，而只是要求对应相近。依水团分析的传统观点和作法，也不苛求全部 m 项，但至少是同时考虑水温和盐度这两项性质的。

水系原是陆地水文学的术语，引入海洋学之后，长期未予定义，因而理解与用法很不一致。综合增译让太郎(1985)及我国海洋学界的用法，水系可定义为“符合一个给定条件的水团的集合”。换言之，水系的划分只考虑一种性质相近即可；当然，依水团分析的传统，更侧重于考虑温盐二者之一。例如只考虑水温，世界大洋中、低纬度的表层、次表层各水团可集合为暖水环流系，而大洋中、深层和高纬海域的表层、次表层各水团，则可集合为冷水环流系，这与德凡特(Defant，1961)的提法是一致的。在我国近海水团分析中，有所谓外海水系与沿岸水系的提法，就是只考虑盐度而划分的，前者指基本不受大陆径流影响而具有高盐特征的各水团的集

合，后者则指受径流影响较大而以低盐为特征的诸水团的集合（李凤岐等，1986a）。

水系的特征函数可写为：

$$\nu_Y(A|g) = \begin{cases} 1 & A|g \in Y \\ 0 & A|g \overline{\in} Y \end{cases} \qquad (3.1-6)$$

可见由水体元到水系，是层次递进的集合，显然它们之间的关系是

$$Y \supset A \supset P \supset x \qquad (3.1-7)$$

3.1.3 水团的核心、强度、边界与混合区

同一个水团中的水型性质是相近的，但不一定完全等同，因而，即使在同一个水团中，海水的温、盐等性质，也会因空间位置不同而变化。然而总有一部分水体，可作为该水团典型特征的代表，这部分水体就是该水团的核心。例如夏季盘踞于黄海底层的冷水团，就可用底层等温线闭合的冷中心，来代表该水团的突出特征"冷"。

一般而言，确定水团的核心比确定水团的边界要容易得多，而且核心部分特征性水平的升降，可以较好地反映对应水团特征性水平的升降，核心位置的变动，也往往能反映水团位置变动的趋向，因而可以通过核心来推断整个水团的情况。在大西洋的盐度断面图（图 2—23）上，由高盐核心层和低盐核心层很容易识别出高盐的次表层水团和低盐的中层水团，并可推断它们散布的大致方向和可能达到的位置。伍斯特（Wüst，1935）首先提出了水团分析的这种核心法（核心层法），在分析南极中层水团向北散布以及地中海水团在大西洋的散布时，都取得了很好的效果。

为了描述水团增强和减弱的情况，可以定义水团的 2 种强度。第一强度指水团所占据的空间范围，即水团的体积，体积越大表明水团越强大，反之则强度较弱。水团的第二强度指水团的特征水平，如高温水团，若水温升高表明其强度增强，反之则弱；但是对低

温(低盐)水团来说，温(盐)度的下降，则表明水团强度增大。

水团的边界是指兼备内同性与外异性的这部分水体的外包络面。由式(3.1—5)可知，边界是内同与外异的不连续面，所以在海洋学中往往把水团边界处理为"不连续面"。当然在现实的海洋中，水团的边界不是真正没有厚度的几何学的"面"，而是与水团本身尺度相比可视为小量的"域"，即水团与水团之间的过渡区。在过渡区中，来自不同水团的海水互相混合，故又称为混合区。混合区在大面图上的投影一般呈带状，因之又称混合带。宽度较小的混合带即为海洋锋。(广义的海洋锋定义为任一水文变量的梯度达到极大值的地方)。混合区在断面图上的投影，通常称为过渡层，若其理化性质的铅直向梯度达到一定的临界值，便称为跃层。顺便说一句，水平方向的"过渡区"已习惯称为"混合区"，但铅直方向上的"过渡层"却避免称"混合层"。这是因为"混合层"已作为"上混合层"的简称而习用(§2.2.1～§2.2.3)，通常专指由海面至跃层之间的准均匀水层。为避免误解，川合英夫建议将"混合区"称为"扰动水域(高野健三、川合英夫，1985)。

来自不同水团的海水，各自携运不同的营养盐类和浮游生物，在扰动水域交汇，致使饵料丰富，吸引了鱼类集群，往往形成良好的渔场。海洋锋和跃层对航运、水下通讯及军事活动影响很大，从海洋学角度看又与水团边界的划分关系密切，因而研究日趋活跃(Cheney *et al*，1976；蒲书箴，1985；鲍曼等，1986)。

3.1.4 水团的形成与变性

世界大洋和各海区的水团，理化、生物等特征迥异，形成原因、机制和过程各不相同，所处海域和深度差别也很大，似无共性可言；但是通过水团分析的实践，却发现它们的形成都有一个共同的特点：不同水团所独具的典型特征，是最初从海面获得的。这些特征的形成，取决于水团源地海域的地理位置、环境和气象条件，各

种外部因素综合作用，便使得不同水团所具有的典型特征终于得以形成。

大洋各海域的表层水团，从海面获得其初始特征，是不言而喻的事。次表层水团的高盐特征，由图2—22及23可以明显看出，则是因其原先位于亚热带海面时由强烈蒸发而获得。由图亦知，位于(500～1500)m的中层水团是以低盐为典型特征的，而作为低盐特征标志的低盐水舌，则与南纬45°～65°海面的低盐中心一脉相连；由于这一纬度带的降水大于蒸发(图2—20)，再加融冰水的影响，就使源于该海域的水团获得了低盐的特征。北大西洋的高盐中层水“地中海水团”和印度洋的高盐中层水“红海水团”，由其名称自然推知其源地，也是因源地海面强烈蒸发而获得高盐特征的。位于世界大洋最底层的水团，低温是其典型特征，溯其源乃是在南极陆架海面强烈冷却而获得的。

所谓典型特征的“形成”或“获得”，实质是指水团的第二强度达到了最高水平。象世间其他事物一样，运动和变化是永恒的，水团的特征当然也不会一成而不变。由于水团离开了形成源地，或者是外界环境发生了变化，都会使水团的特征发生相应的变化。水团特征由高水平向低水平过渡，并逐渐丧失其初始典型特征的过程，称为水团的变性。

缘于海洋外部影响的变性，属于第一类变性。例如海洋与大气之间的热量、水量交换或其他物质通量的存在，会导致海水温度、盐度或其他属性浓度的变化，从而引起水团变性。通常，这类影响只发生在海洋的表层，然后通过扩散及混合而影响整个水团。第一类变性又可分为两种：季节变性和区域变性。前者是指，因水团所处海域的外界条件，如太阳辐射、气温、蒸发与降水、结冰与融冰等等有季节性变化，从而导致水团特征相应变化所引起的变性。后者则指，因水团运动所处环境变化而引起的变性。

第二类变性过程纯属海洋内部的过程，主要是由扩散和混合

造成的。同一水团中，核心与其他部分虽性质相对均匀，但不见得绝对相同，因而势必发生扩散，导致核心部分特征水平的降低。特别是在不同性质的水团之间，扩散和混合更为强烈，从而加快了水团的变性。大洋表层之下各层次的水团，并不直接与大气等外界因素相作用，它们的变性即为第二类变性过程。其实，在表层水团中尽管第一类变性占优势，但变性的完成也需第二类过程相辅而相成，特别在表层水团的混合带与锋区，第二类变性也可能成为主角。

浅海水团尺度较小而环境影响更易奏效，所以变性显著。与具有较强保守性的大洋水团相比，显然有其特殊性，故有变性水团之称（苏育嵩，1980）。

§3.2 水团划分与分析方法

水团分析的第一步工作，应是对研究海区的水团予以识别并进行划分。在此基础上再进一步分析不同水团的特征与强度、来源与形成机制、消长与变性规律等等。正因为水团的划分是基础性工作，所以许多学者致力于这方面的研究。

3.2.1 定性的综合分析方法

早期的水团划分与分析，多是根据大面图、断面图等图表，进行定性的描述。在当时调查资料较少，计算工具又较原始的情况下，大抵也只能如此。伍斯特首创的核心法，使用断面图追踪水团“核心层”的扩展，取得了不少研究成果。斯韦尔德鲁普（1942）对世界大洋水团的划分与分析，主要使用的是温一盐关系图（图3－1），然而，其详尽的综合与精辟的分析，堪为水团分析之楷模。他对大洋水团分析的出色总结，尤其关于水团形成机制与特征的分析，许多观点至今仍被反复引用。赫崇本等1959年对黄海冷水团的分

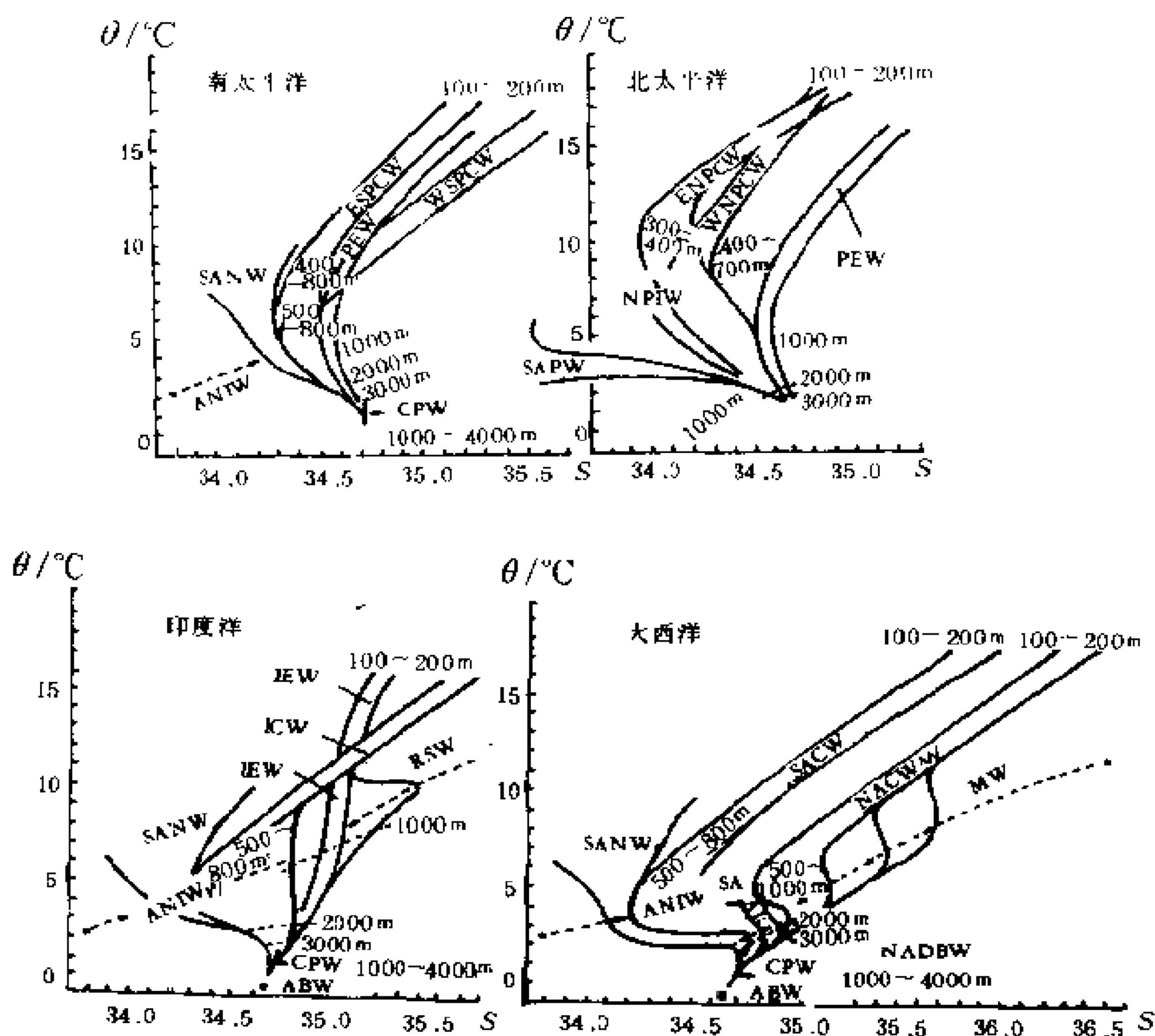


图 3—1　各大洋的温盐关系(据 Sverdrup et al.,1949)

ABW—南极底层水,AI—北极中层水,ANIW—南极中层水,CPW—绕极水,ENPCW—北太平洋东部中央水,ESPCW—南太平洋东部中央水,ICW—印度洋中央水,IEW—印度洋赤道水,MW—地中海水,NACW—北大西洋中央水,NADBW—北大西洋深层及底层水,NPIW—北太平洋中层水,PEW—太平洋赤道水,RSW—红海水,SA—亚北极水,SACW—南大西洋中央水,SANW—亚南极水,SAPW—太平洋亚北极水,WNPCW—北太平洋西部中央水,WSPCW—南太平洋西部中央水

析，是中国海洋学家应用综合分析法的最早的优秀成果（赫崇本等，1959）。

随着调查资料的增多和计算工具的进步，水团划分与分析已陆续引入和发展了许多新方法。但是综合分析法仍然倍受青睐，这说明它仍然具有生命力和实用价值，其原因如下：与其他复杂的划分与分析方法相比，这种方法显得简便易行见效快，在对分析结果不要求很精确时，它能较快地给出定性结论；综合分析的定性结论，是进一步定量计算的必不可少的基础材料；在验证定量计算的某些结果时，同样需要综合分析定性材料的配合；水团形成和变性本来就是内外各种因素综合作用的结果，因而综合分析是合乎事物发展规律和特点的。

3.2.2 浓度混合分析方法

1927 年 Jacobsen J. P. 首次用温－盐图解研究两个水团的混合问题，结论指出，当温、盐度各自均匀的两个水团（在温－盐图上各用一点表示）互相混合时，在温－盐图解上呈线性反比关系。这是用温－盐图解定量分析水团的开始。

从 40 年代开始。施托克曼（Штокман В. Б.）对浓度混合理论和分析方法作出了贡献。例如对浓度扩散方程解析求解，并扩展到两个以上水团的混合，建立了 $\theta-S$ 曲线的解析理论，在此基础上提出了水团划分与分析的 $\theta-S$ 图解几何学方法（Штокман В. Б.，1943，1944），极大地推动了水团分析的研究。前苏联的其他学者又相继对浓度混合理论予以发展，例如：将铅直向叠置混合的水团个数推广到更多，研究了水平方向多个水团的混合，考虑了温度扩散系量和盐度扩散系量不相等情况下的混合等等（（Иванов А. В.，1946；Тимофеев В. Т.，Панов В. В.，1962；Мамаев О. И.，1962）。季莫菲也夫与帕诺夫 1962 年出版的“水团划分与分析的间接方法”（Тимофеев В. Т.，Панов В. В.，1962）和马玛也夫的专著“世界大洋

水的温—盐分析”(Mamayev O. I. ,1975),对于浓度混合理论和方法,都有系统的总结和发展,并且给出了大洋水团和某些海区水团划分与计算分析的实例。其结论和分析方法的核心,与线性混合的反比关系是一致的。讨论两个各自均匀的水团的混合时,是在 $\theta-S$ 图解连接两个原始水型的直线上,按距离的反比关系计算它们的混合百分数,即“组成百分比”。三个温、盐度各自均匀的互邻水团的混合,则是连接原始水型的三点形成“混合三角形”,再计算混合百分数。Miller(1950)分析北美陆架海域水团时,提出了计算 4 个水团混合百分数的方法,即在 $\theta-S$ 图上将 4 个原始水型的点联成“混合四边形”,四等分每条边后,粗略确定各水团的 75×10^{-2}、50×10^{-2}、25×10^{-2}的混合百分数线而进行计算。

中国学者在有界水团混合理论和分析方法方面,进行了许多探讨。毛汉礼等(1964)引用线性反比的结论,另辟途径,给出了计算混合四边形内等组成百分数的方法,分析黄、东海夏季的水团很有成效。徐斯等(1965)则对有界水团的混合理论进行了探讨,得到一些成果;路季平则将上述“封闭系统的理想混合”,推广到空间流系中的水团不定常混合。

伊万诺夫(Иванов A. B.)对于温、盐扩散系量不等的混合曲线的研究,还为双扩散混合研究拉开了序幕。汤姆扎克(Tomczak M.)在这方面继续进行了新的研究,取得一些新的进展(Tomczak *et al*,1987 等)。

3.2.3　概率统计分析方法

鉴于海洋调查取样以及外界影响因素的随机性,概率统计方法也引入了水团的划分与分析之中,并取得了许多成果。早期的成果有 Cochrane(1958)和 Montgomery(1958),应用温—盐组偶的频率分布,计算了太平洋与大西洋各主要水团的体积,例如,南极中层水、地中海水、红海水、大洋深层共同水(*Common Water*)和南极底

层水等。Pickard(1979)将这类图称为温度—盐度—体积图解([*TSV*] *diagram*)。增泽让太郎也应用类似的方法研究北太平洋的某些水团,如北太平洋中层水、亚热带型水、温跃层水等等(Masuzawa J.,1969)。

针对中国近海水团的复杂与变性,许多中国学者进行了研究与探索,从而使数理统计与分析方法在浅海水团分析中获得广泛的应用。例如,用奇异矢量分析法讨论东海水系的划分(甘子钧等,1984),用相似系数法确定黄海冷水团的边界以及分析黄海冷水团的变化特征(翁学传等,1983;1988)等等。多元分析的许多方法,引入水团分析之后,在我国近海水团划分和研究方面取得一系列成果。对应分析法已用于东海和山东近岸水团的划分(张启龙等,1985;李繁华等,1989)。聚类分析的引入水团分析(李凤岐等,1983),即依水体元性质相近聚合而划分水团的思路,与"内同性"原则互相呼应,因而很快推广。将系统聚类和改进后的逐步检验聚类法,广泛应用于中国近海各海区的水团划分,都收到了较好的成效(苏育嵩等,1983;张元奎等,1983;邱道立等,1984;刘树勋等,1984;苗育田等,1987),而且推广应用于荷兰近海的水团分析(Li Honghai *et al*,1989)。基于"内同性"和"外异性"原则,计算水团内的离差平方和以及水团间的离差平方和,利用 F—检验而判别水团的划分是否符合统计学所要求的差异显著性(李凤岐等,1987d;1989a),从而使水团的划分更具客观性,也为水团分析增添了新内容。

利用统计学方法对水团及其特征进行预报,已有良好的开端,除用阶段回归方法试验(张元奎等,1981)之外,还将逐步判别方法引入水团预报(李凤岐等,1987b),可以自动挑选因子,组合成多级预报方程。

3.2.4 模糊数学分析方法

设在研究海域中取了 n 个水样，即

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \qquad (3.2-1)$$

x_i 为 X 中的任一水体元，它对水团 A 的关系，依式(3.1—5)用特征值表示则非 0 即 1，二者必居其一，且仅居其一。这种二值逻辑用在边界两侧无可非议，但对于解释水团特征性水平逐渐降低的变性过程，就显得"力不从心"。变性的过程，实质是水团第二强度——特征性水平逐渐降低的过程。核心部分"毫无变性"的水体，从属性上说是"百分之百的属于该水团"，而有少许变性的水体，从属性上讲应有所降低，但还不至于变得已"完全不属于该水团"。因此，可用隶属函数

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: X \rightarrow [0,1]$$
$$x \rightarrow \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) \qquad (3.2-2)$$

来描述任一水体元 x_i 对水团 A 的隶属程度 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x_i)$。显然，在水团 A 核心处，毫无变性的水体元的隶属度肯定等于 1。传统的水团分析在定核心范围时，不见得仅限于极值点，因此用模糊集合定义水团时，可把强截集

$$A_{0.9+} = \{x | x \in X, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0.9\} \qquad (3.2-3)$$

定义为水团 A 的核心。而把强截集

$$A_{0.5+} = \{x | x \in X, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) > 0.5\} \qquad (3.2-4)$$

定义为水团 A 的本体。水团 A 的边界，是对 A 的隶属度等于 0.5 的水体元的集合：

$$A_{0.5} = \{x | x \in X, \mu_{\underset{\sim}{A}}(x) = 0.5\} \qquad (3.2-5)$$

因模糊集合的截集是普通集合，故截集 $A_{0.5+}$ 有特征函数

$$\nu_{\underset{\sim}{A}_{0.5+}}(x)=\begin{cases}1 & \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)>0.5\\0 & \mu_{\underset{\sim}{A}}(x)<0.5\end{cases}\qquad(3.2-6)$$

这正是水团内同性和外异性的体现。

用上述定义能较好地描述水团由核心到混合区的水体变性的全过程(李凤岐等,1986a)。在水团的核心部分,水体元甚少变性或毫无变性,故隶属度为 0.9～1.0;由核心向外,水体变性渐多,隶属度降得比 0.9 低;但在 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(x)>0.5$ 的区域,仍不失为水团的本体;到边界,隶属度降至 0.5;出了边界变性更甚,隶属度更低,终至完全丧失对应水团初始的典型特征,而使隶属度趋于 0。显见,对各水团的隶属度均小于 0.5 的水体元的集合,乃是水团之间的混合区。

水团的划分,也可借助于模糊聚类或模糊软划分方法。基于欧氏距离标定而进行模糊聚类,在应用于黄、东海和南海后,已取得明显成效,在确定研究海区内应划分水团个数方面,引用 F—检验也取得了成果(李凤岐等,1987e;1989a,b)。利用模糊目标函数聚类划分东海黑潮区水团也有成果(卢中发,1989)。关于模糊密度聚类法,模糊积分法以及模糊 F—统计方法在水团划分和分析中的应用,也进行了试验并取得新的进展。

模糊数学的一些分析方法,已经移植并应用于水团变性和相互关系的分析之中。例如,计算水团的模糊熵,用以定量比较水团变性的强弱和不均匀性的程度;计算水团之间的贴近度,用以定量比较各水团之间的相互关系;用模糊熵和贴近度的定量分析划分水系(李凤岐等,1987e,1989b);利用模糊关系方程分析影响水团的因素(王从敏等,1986)等等,都使水团分析的内容更丰富更新颖。

隶属函数是模糊集合的数学描述,其本质是客观的。但拟合具体水团的隶属函数,还要综合分析者和前人的经验与成果,亦即需

要灵活与技巧。关于变性水团隶属函数具有何种解析形式，借助于混合变性过程的讨论，已给出了较好的解释，并提出了具体拟合时的一些实施原则和技术性措施(李凤岐等，1986b)。在综合分析变性水团 $\theta-S$ 点集特征的基础上，提出了变性水团隶属函数的椭圆拟合法以及离散拟合法(李凤岐，1987a，c)，对于沿岸冲淡水团、黑潮中层水团和深层水团等，也提出了具体拟合方法，计算了它们的隶属函数并进行了模糊分析(李凤岐等，1989b)。关于多元隶属函数的建立，已提出了椭球拟合法等三种方法(戚建华等，1991)。

关于水团的多元统计分析和模糊数学分析方法，“浅海变性水团分析和预报研究”专辑(青岛海洋大学学报，19 卷 1 期(Ⅱ)，1989 年)，可为读者提供一个概略轮廓。

3.2.5 其他方法及展望

水团内外的水体，不仅温盐性质明显差异，依内同性和外异性，其他物理、化学、生物、悬浮物质等等，也会存在明显差异，因而在识别水团时，还可以借用其他学科的理论和方法。

海水中的溶解氧含量，在鉴别深层水来源和分析海水的年龄方面，是一个很好的指标。因为从海面溶解大气中的氧，是海水中氧的最主要的来源(至于在表层借助光合作用生成部分氧，数量不多，且为局地性)，故离开表层而下沉的海水，由于生物的消耗，其溶解氧含量应愈趋减少。实测证明，在 4000m 以深的海水中，北大西洋氧含量高达 270μmol/L，向南渐次降低，在南大西洋已低于 230μmol/L，至印度洋再度降低；到南太平洋降至 200μmol/L 左右，到北太平洋则只有 140μmol/L(图 3—2)。故可以推测，世界大洋的深层水团，是由北大西洋下沉形成的，而后逐渐扩散到印度洋及太平洋，因此，北太平洋深层水团的年龄最大(§ 2.3.4)。在分析上升流或判断近岸海域底层水团向岸爬升时，溶解氧含量也是有用的指标。沿岸水和径流冲淡水富含 S_i 及陆源性悬浮物质，且总碱度

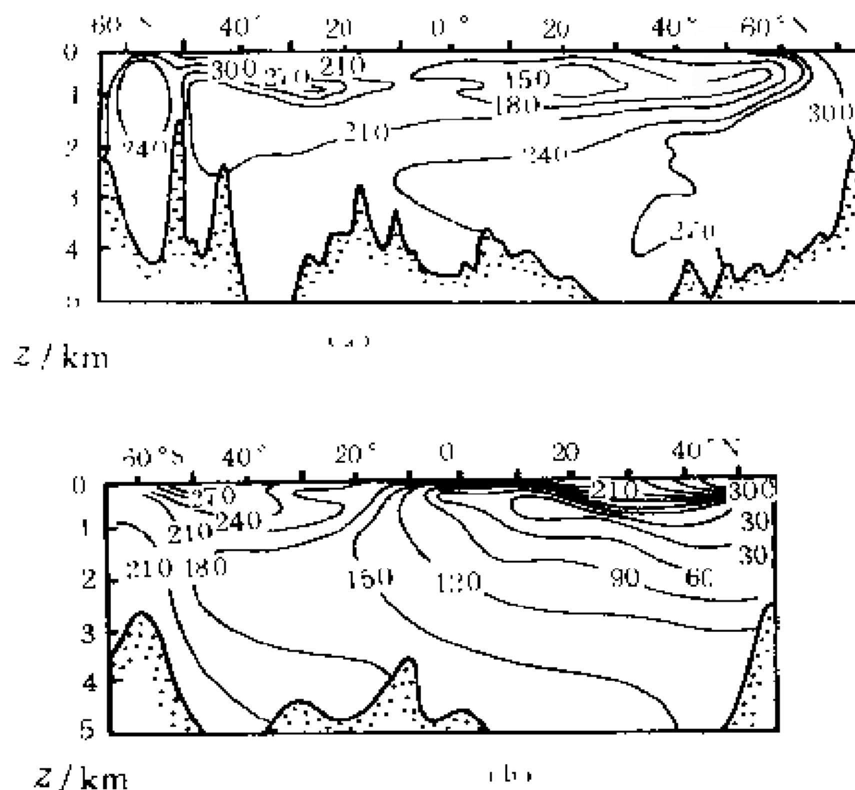


图 3 2 大洋经向断面溶解氧分布
(a)大西洋西部;(b)太平洋中部
(据中国大百科全书,1987)

Alk 值明显高,外海水则有明显不同,特别是比碱度 Alk/Cl,因之可作识别这两类水团的指标。

浮游生物的"随波逐流",也可提供水团扩散的"示踪"信息。例如湾流水常以帆水母、僧帽水母及银币水母作为指示种,黑潮的东海分支则以肥胖箭虫为指示种;在南黄海,黄海暖流水的指示种可用浮游动物细鳃樽,沿岸水团则以百陶箭虫作指示种;在北黄海和渤海,强壮箭虫可作为沿岸水的指示种。

光学方法也在水团分析中得到了广泛的应用,因为不同的水团其光学性质也有明显的差异。Joseph 指出,可以根据海水中的悬浮物和"黄色物质"(§1.7.4)含量,作为区分水团的光学指标,并且建立了衰减与水文要素(如盐度)之间的关系。也有人提出,可利

用散射指标作为识别水团的补充指标。水色和透明度能很好地表征径流入海后形成的冲淡水的扩展态势，如长江冲淡水、黄河冲淡水以及大西洋中的刚果河冲淡水等，与外海水团的水色、透明度差异都很显著。由于盐度和水色、透明度之间的相关系数相当大，所以水色、透明度也可用于识别盐度有明显差异的外海水团和沿岸水团。

水团的形成、散布及变性，又是和海洋环流息息相关、相辅而相成的，因此从环流的角度研究水团是顺理成章的。施托梅尔(Stommel H. M.)等在"论世界大洋的深层环流"的一系列论文中(1960～1972)，就从热盐环流角度，以箱式模型等方法，研究了世界大洋深层水团的形成和运动，例如北大西洋下沉的深层水，威德尔海及罗斯海下沉的底层水团等等。数值方法的迅速发展，也为水团分析开辟了新方向。高野健三在"物理海洋学"第2卷中写道："由于决定物质分布的因素是平流和扩散，所以如能查明海水的大规模运动(大洋环流)和扩散的结构，……给出这些条件和海面上的条件(风、热流量和盐流量)后，用数值分析就有可能搞清水团的来龙去脉"。事实上，不论是对全球尺度的大洋水团，还是区域性的水团，都已开始进行诊断或数值模式的研究(Bryan K. ,*et al*, 1979；袁业立，1979；Cox M. D. , 1989)。当然需改进之处还很多，除了资料的积累处理、观测和计算技术的改进之外，目前的水团分析工作也是必不可少的；因为这些研究既是建立数值模式的基础，又可作调整、改进模式的参考。况且，鉴于数值方法本身的局限性，有许多工作还是数值方法难以代替的，至少在目前如此。因此，将两者有机地结合是比较合理的，这样能互为补充相辅相成，必将推动水团分析的深入与发展。

§3.3 世界大洋的水团

继 Sverdrup 的巨著(1942,1949)对世界大洋的水团进行综合分析与出色的总结之后,许多海洋学家又继续进行了更深入的分析研究,取得了若干新成果,大量研究论文的发表和陆续问世的专著,使我们对世界大洋的水团特征、形成机制、分布和变化等等,有了更进一步的了解和认识。

3.3.1 水系的划分

按 Sverdrup 的提法,世界大洋的典型水团可分为 5 个最基本的层次,换言之,即在每个层次中可包括几种不同的水团。由§3.1.2 可知,这就相当于把大洋水团分为 5 个水系。这种划分主要着眼于水团所处的深度(层次),在中、低纬度海域,是很有典型意义的。

中、低纬度海域的表层水系,是位于海面及其下深度不大(尤指季节性温跃层之上)的各种不同水团的集合。次表层水系是位于季节性温跃之下、主温跃层之上的各类水团的集合,因海域及形成机制的不同,又可分为三类水团,即中央水团、赤道水团和亚极地水团(图 3—3)。中层水系是主温跃层之下到 1000 多米深的水层中的各水团的集合,也包括几类不同的水团,如低盐的南极中层水与北极中层水,以及高盐的地中海水团和红海水团等。深层水系位于中层之下直到 4000m 深的相当厚的水层中,三大洋的深层水团和南、北大西洋的深层水团也有不同的特点,有人还再分为上深层水和下深层水。底层水系指充溢于各大洋近底层的水团的集合,主要有南极底层水和北极底层水团。

大洋主温跃层并不是沿同一个等位势面展布的,待到中-高纬度海域它已上升至海面(图 3—4)。因此在中-高纬度海域表层和

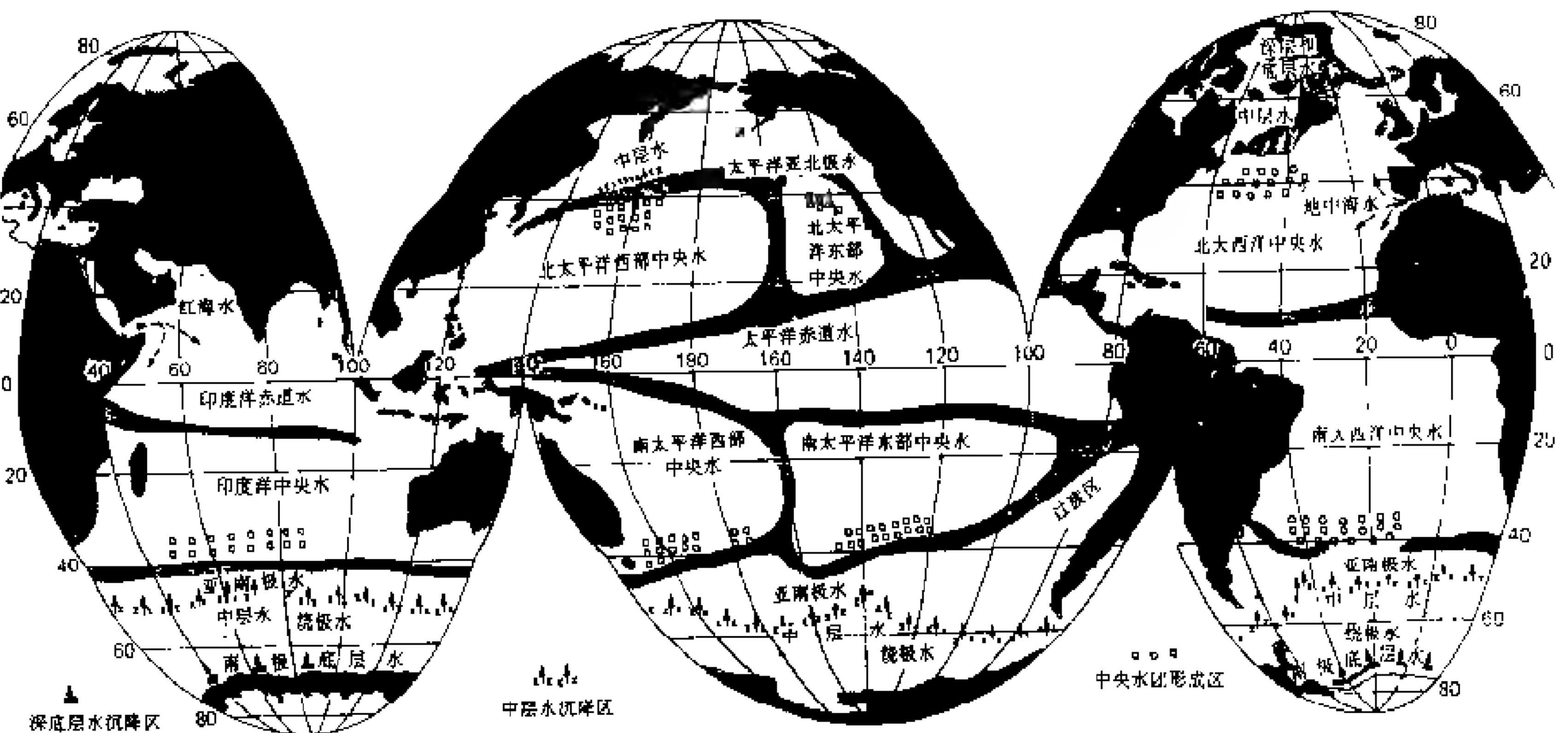
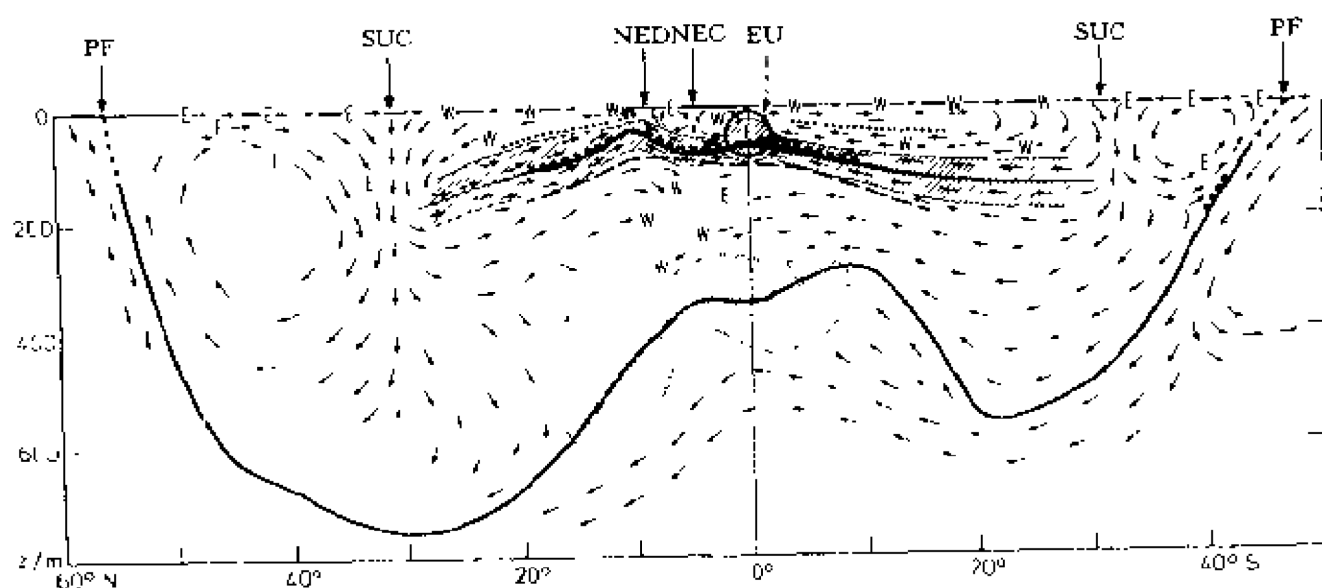


图 3—3 大洋次表层水团的分布

（据 Sverdrup *et al*., 1949）



—— 冷、暖水系边界

—— 最大密度梯度的位置
（线的粗细与梯度成正比）
顶层下边界

热带—亚热带不连续层
不连续层下边界

最低含氧量

········ 热带—亚热带最大盐度的位置

– – – 氧的不连续层

········ 顶层氧的最小值
（经向环流的轴心）

- - - 暖水系中运动的铅直向
和经向分量

图 3—4　沿大西洋中央轴线方向的暖水区内的环流结构

（据 Dietrich *et al*，1980）

E- 向东的流动，W— 向西的流动，EU—赤道潜流，NEC—北赤道辐聚带，
NED —北赤道辐散带，PF—极锋，SUC—亚热带辐聚带

次表层中的水团，已无主温跃层作为其下界，由图 2—22 及 23 看，它们和中层、深层乃至底层水系的某些水团一脉相 连，所以在次表层水团分布图上，出现了中层、深层和底层水团等标注(图 3—3)。

鉴于此，若以大洋主温跃层为界，把大洋的海水划分为冷水系和暖水系，讨论起来将更加方便。暖水系包括大洋中、低纬度海域的表层和次表层各水团，冷水系则是其余各水团的集合。这样划分水系，既能体现同一水系内水团形成机制的内在联系，又能给整个世界大洋的水团和环流总结构，勾画出一个概略而清晰的框架。

3.3.2 暖水系的水团

暖水系中的水团，因所处深度和海域不同，温盐性质彼此有所差异，表层水团的季节性变化也较明显。

1. 表层水团

因受太阳辐射和气象因素的直接影响，不仅区域性差异明显，而且同一海域水团的季节性变化也较显著，严格说来，与大洋水团定义要求的恒定性、保守性等等是有差距的。因之，许多专著或教材在论述大洋水团时，往往省略表层水团，即使论及，也大多简略带过。如图 3—5 即为一种粗略的划分：热带、亚热带和亚极地表层水。若与图 2—9 互相对照，可见基本上是以(26～27)℃和极锋为界而划分的。由图 2—19 知，亚热带表层水的盐度高于 35.0，在印度洋和大西洋可高达 36.0～37.0；热带水则低于 35.0，亚极地水更低，不到 34.0。在大陆径流强盛的河口和近岸海域，还有盐度更低的冲淡水，因其范围与大洋水团不能比拟，故未划出。如在太平洋西部边缘海，有图 2—21 所示长江冲淡水；在大西洋，有如 Дубравин 等对热带洋域表层水团的划分(Дубравин В. Ф. и др.，1984)等等。

2. 次表层水团

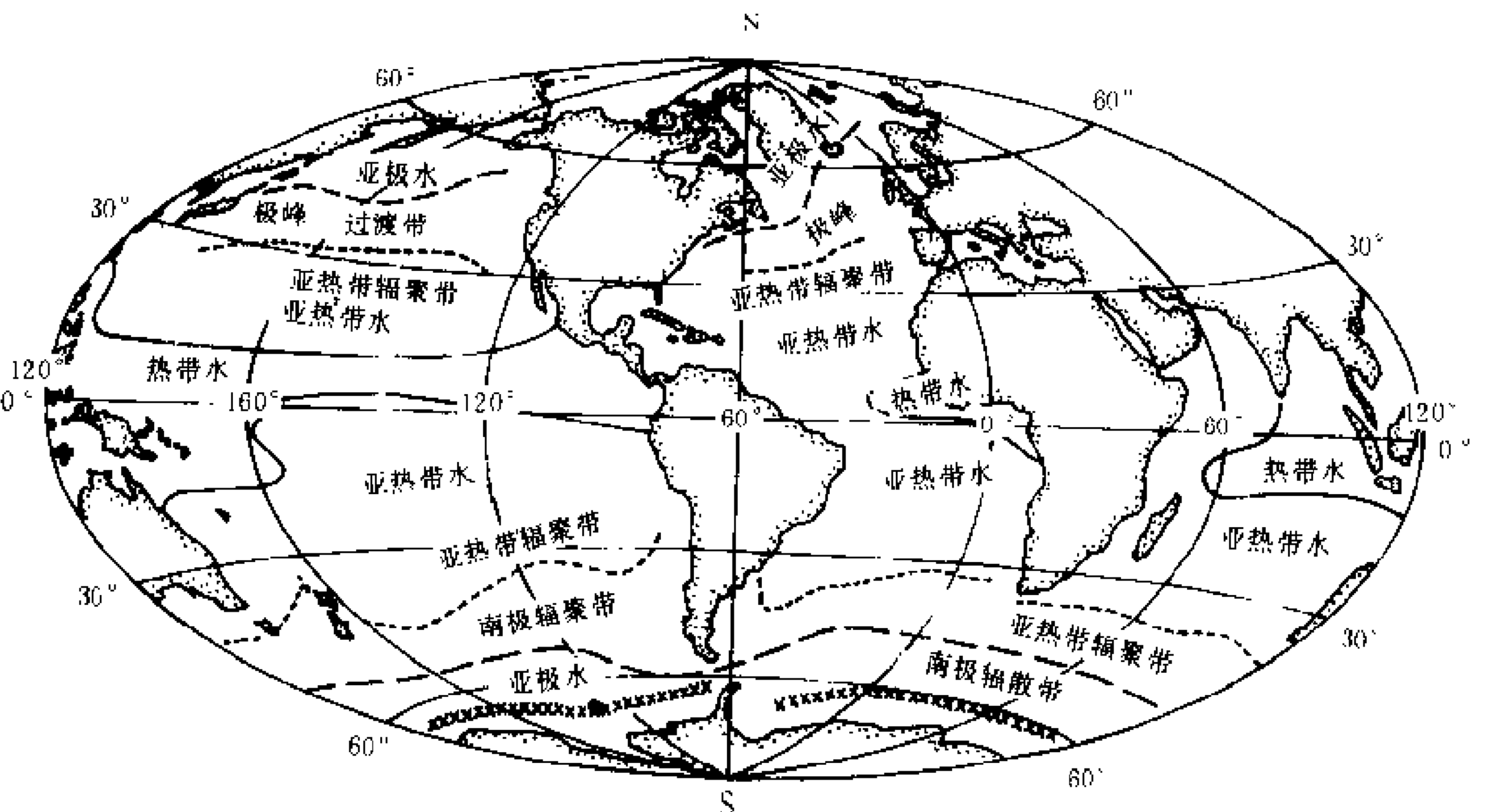


图 3—5 世界大洋表层主要水团的分布

（据佐佐木忠义，1971）

Sverdrup 将次表层水团分为 3 类：中央水、赤道水和亚极地水，它们在温盐性质、形成机制上有所不同。

(1). 中央水(*Central Water*)　因其占据大洋次表层广阔的中央部分而得名。大西洋南、北部分各有其中央水团；太平洋洋域更广，不仅南、北两部分有差别，每者东、西两半部也不同，故分为 4 个中央水团；印度洋则只有一个中央水团。由图 3—1 可见，这 7 个中央水团的 $\theta-S$ 关系，基本上都呈直线形式；尤其南太平洋西部、印度洋和南大西洋 3 个中央水团，$\theta-S$ 关系更相似，其原因是这些中央水的源地具有相似的气候条件和环境。然而北太平洋中央水却比北大西洋中央水盐度低 1.0 以上，而南、北太平洋的 4 个中央水团中，又都是西高东低，这与亚极水随加里福尼亚海流和秘鲁海流向低纬方向散布而混入了东部中央水，是有关系的。

中央水团盘踞于季节性温跃层和永久性温跃层之间，厚度一般为(200～300)m。由于大洋永久温跃层具有从西向东逐渐变浅的趋势，所以中央水团的厚度也相应地西厚东薄，最厚在马尾藻海，可达 900m(Tchernia，1980)。

对比图 2—22、2—23 和图 3—4，若将经向断面上的环流和高盐水舌的下伸结合起来，可以推测中央水团的形成，与亚热带辐聚带海水的下沉有关，图 3—3 中就用小方框符号标出了中央水团的形成海域。支持这一论点的是，北大西洋中央水的 $\theta-S$ 关系与纽芬兰外海海面的 $\theta-S$ 关系很相似(Iselin，1939)，在北太平洋也存在着类似的关系(Kawai，1972)。然而，也有人认为，对此种机制还须进一步研究(Masuzawa，1972)。

如果将图 3—1 内中央水团的 $\theta-S$ 关系和相应海域的温盐断面分布(如图 3—6、图 3—7)进行对比，可以发现，对应于中央水团 $\theta-S$ 曲线族右上角的那部分水体，其温度、盐度都较高且分别相当均匀；另一部分，即对应于 $\theta-S$ 关系中直线部分的水体，其温、盐度则递减较明显，实际上是处于主温跃层范围内。鉴于此，增泽

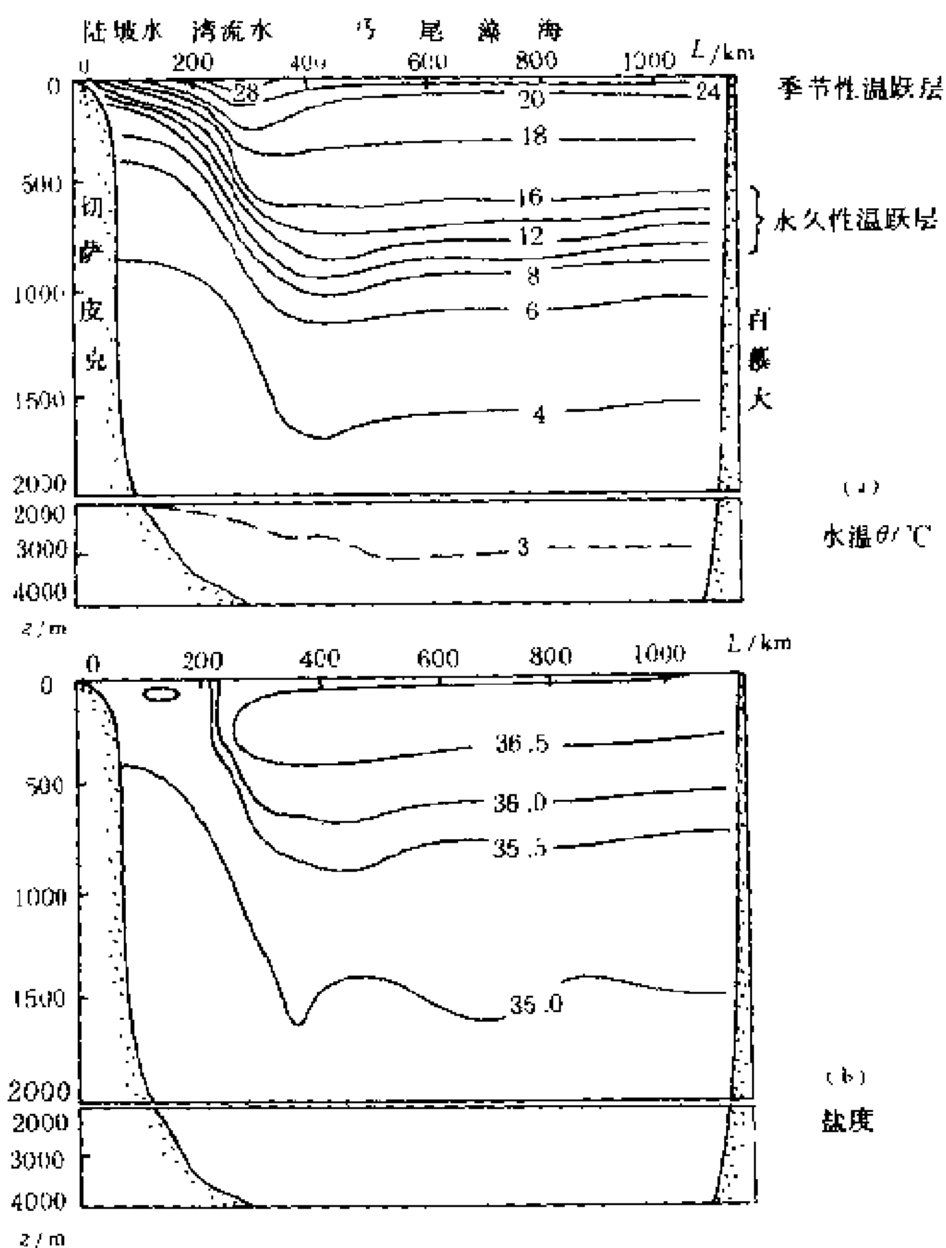


图3-6 湾流断面1932年8~9月的温、盐分布(据Iselin,C. O'D.1936,改绘)

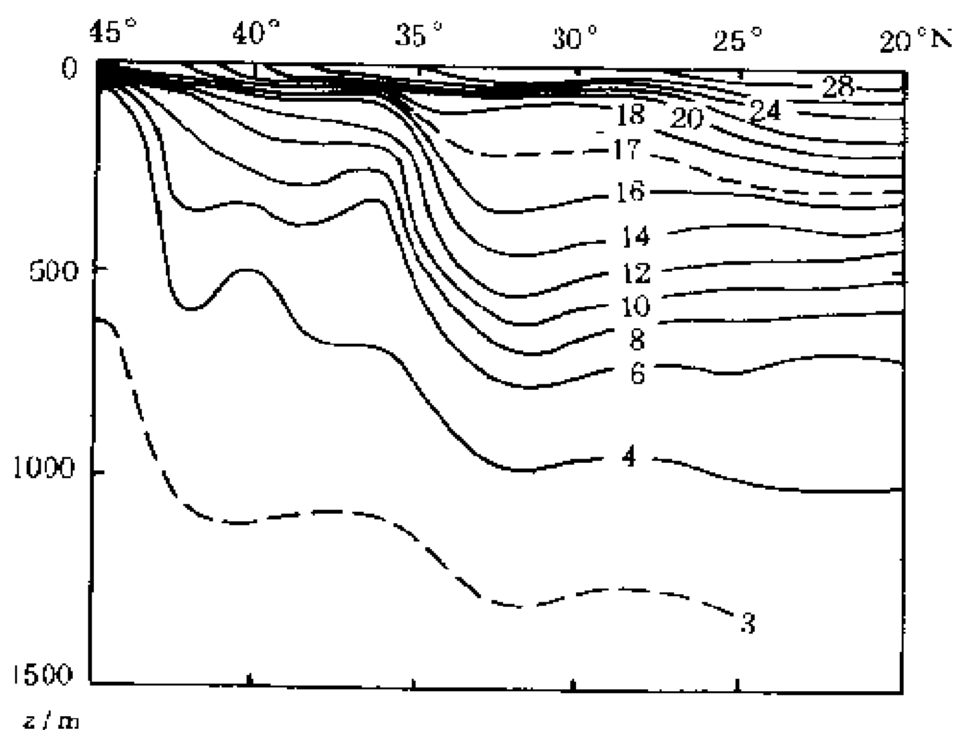


图 3—7 北太平洋 155°E 断面水温分布(据 Masuzawa,1969,改绘)

将其分别称为亚热带型水(*Subtropical Water*)和亚热带温跃层水(*Subtropical Thermocline Water*)(Masuzawa,1969)。大西洋中的"18℃水"(Worthington,1959;Ebbesmeyer *et al*,1986),就是马尾藻海一带对应的亚热带型水。而从图 3—7 看,在太平洋西部其相应的典型温度约为 17℃。据增泽计算,在北太平洋西部中央海域的大半部分,(16～19)℃水的厚度为 100m 以上,在日本以南则可达 300m 以上。在东海黑潮区,(16～19)℃水的厚度小于 100m,断面上的温盐结构(图 3—8),与湾流(图 3—6)也有类似之处;但因受地理环境的影响,盐度显著低于湾流区。考虑到它有区域性特征,可将其称为"东海黑潮次表层水团",见图 3—9 中的 KU(李凤岐等,1989a,b)。至于对应的温跃层水,考虑到它的区域性和形成机制,可称为"东海黑潮次—中层混合水团",见图 3—9 中的 KM,(李凤岐等,1989a,b);在南海北部海区,也有对应的次—中层混合水团(李凤岐等,1987,1988;范立群等,1988)。这两个"混合水团"的独立划

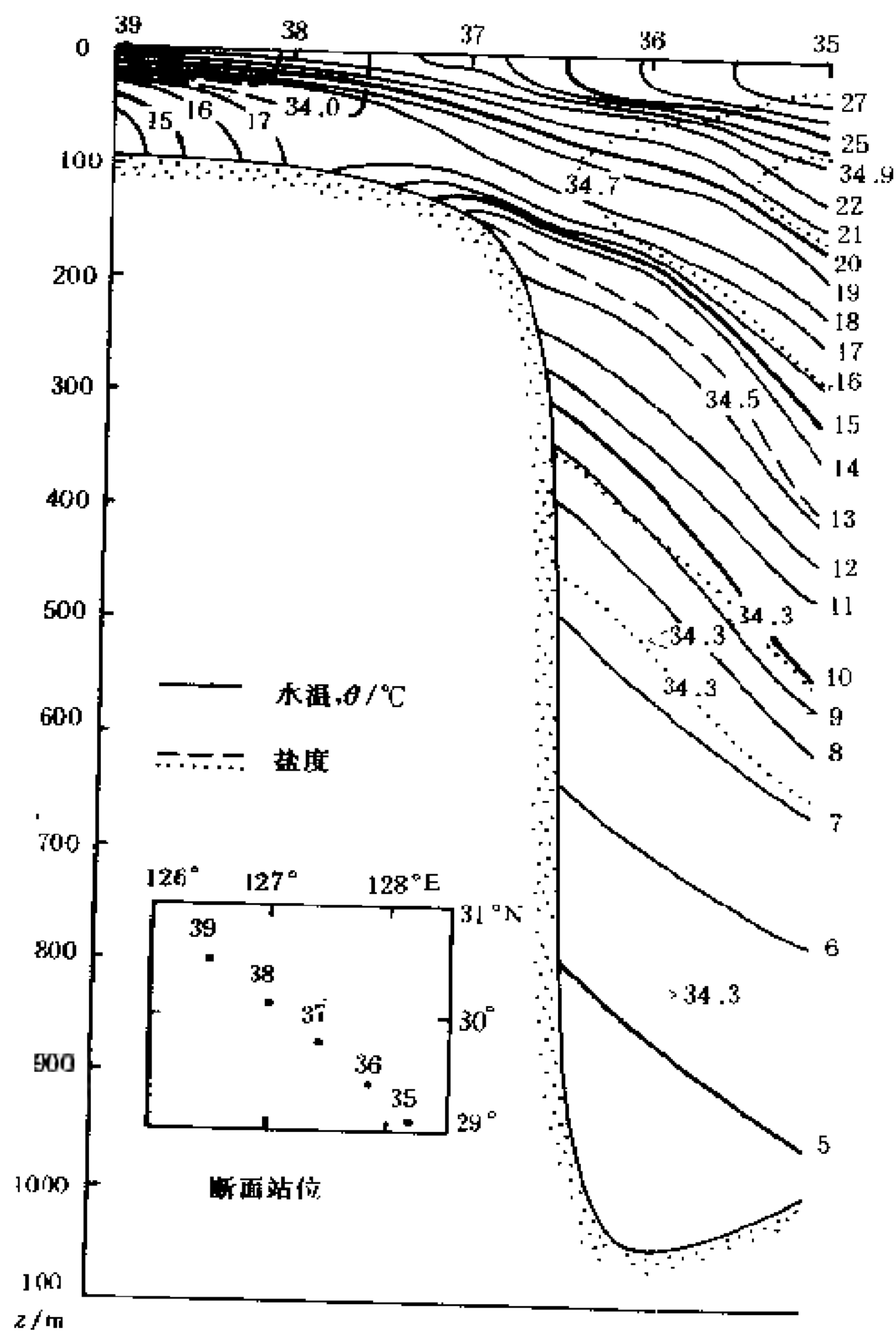


图 3—8 东海黑潮断面上的温、盐分布(1987,6)

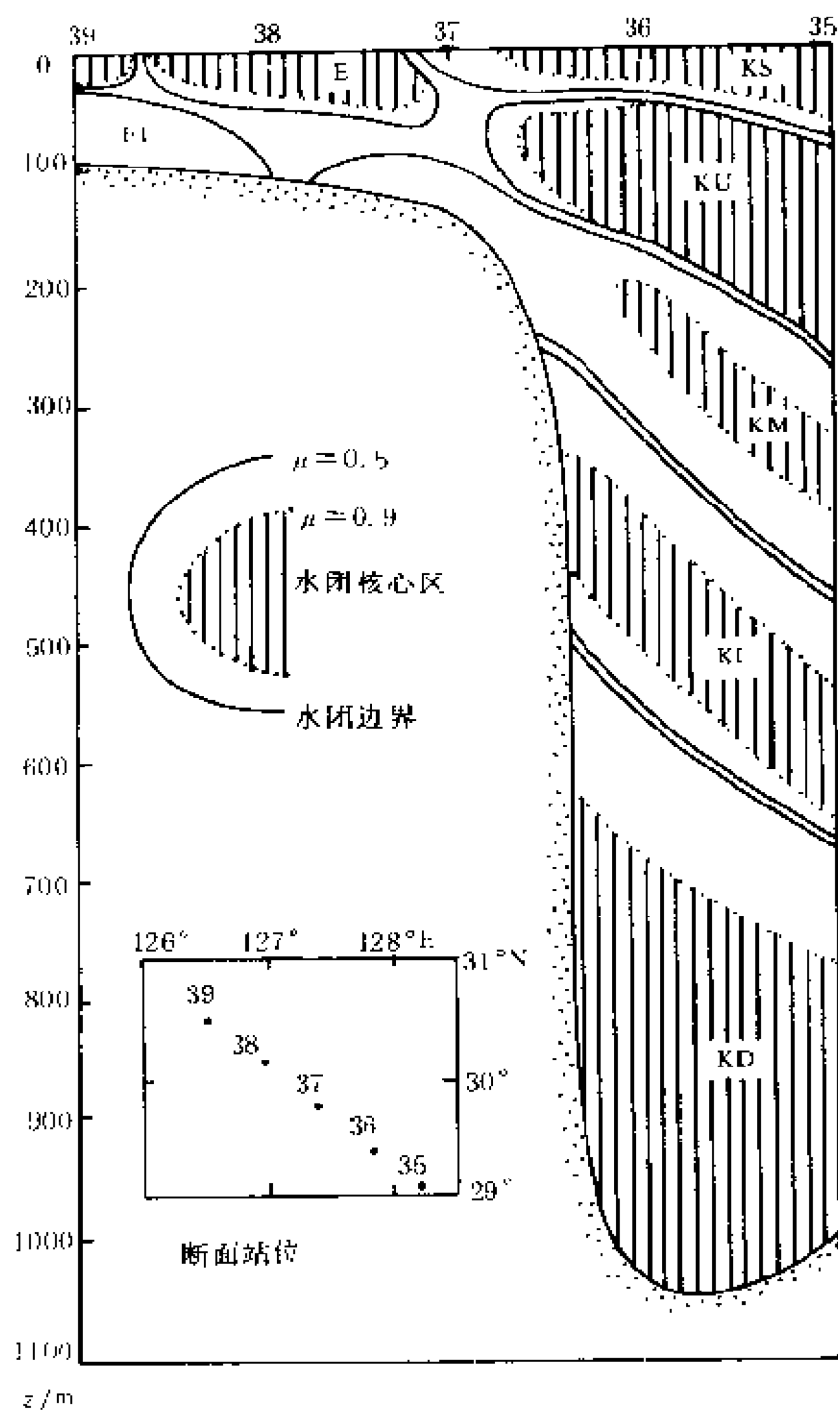


图 3—9 东海黑潮断面上的水团分布(1987.6)(据李凤岐等,1989b)

出，经判别分析检验(李凤岐等，1989a；1987d)，证实它们符合统计学要求的差异显著性，因而划分是有实际意义的。

(2)赤道水(*Equatorial Water*)　　在太平洋的南、北中央水之间，横亘着一个赤道水团，其盐度高于北部中央水，相当于南太平洋东、西两个中央水的中间值(图3—1)。印度洋也有赤道水团，大西洋却没有。因之，南大西洋的中央水可越过赤道抵达北半球，而南太平洋和印度洋的中央水则不可能，因为赤道水团的存在，使它们的北界都退居赤道以南。印度洋的赤道水起源于印度洋北部，分布范围广，盐度高而均匀，与红海高盐水的混入有关。太平洋赤道水的盐度高于北太平洋中央水，这表明南太平洋的海水也能进入北太平洋，故使赤道水团的盐度有所增加。

事实上赤道海域因终年高温，并不象中纬度海域那样有季节性温跃层，深度数10m至(200～300)m的温跃层是全年存在的，故无所谓"季节性温跃层之下"；况且在赤道低纬海区，动力学问题如地转偏向力的作用等就很特殊，流系也甚复杂，水体的性质远没有中央水团那样的一致性，因而，所谓"赤道水团"，实质上是不同种类的水团混合的结果。

离开赤道至回归线附近海域，有以高盐为显著特征的水团，它是由于回归线附近海面冬季强烈蒸发增盐而形成的，增泽称之为热带高盐水(增泽让太郎等，1985)，也有人称为热带水(Sturges，1965；Cannon，1966)和回归线水(上屋，1970)。它的位置在中央海域的南侧，深度约(100～200)m。由于赤道流的作用，也能将其海水携运扩散到其他海域去。例如，在南太平洋中，它随赤道流西行，可达赤道附近，在赤道的西部海域，又可能进入赤道潜流中，从而形成温跃层中的最高盐度层。在北太平洋经北赤道流携运西去，又可成为黑潮源头水的一部分。这些水体随黑潮继续向北运动之后，由于低盐水的混入，盐度渐次降低，所以到达东海后，虽仍保持使次表层为盐度最大值层，然而盐度的量值却已降至35.0以下(图

3－8)，与黑潮源地的次表层水相比，已显著变性，故称为“东海黑潮次表层水团”。

(3)亚极地水(*Subpolar Water*)　　由图3—4可见，在亚热带辐聚带下沉的海水，除了向低纬方向运动形成中央水团之外，还有一部分向高纬方向运动，并与当地的海水混合而形成亚极地水团。北太平洋的亚北极水(*Subarctic Water*)相当强盛，在整个亚北极环流系(*Subarctic gyre*)及其以北海域内，都发现有亚北极水团。亚北极水的部分水体，可随加里福尼亚海流南下而逐渐变性；类似地，南太平洋的亚南极水也有部分水体随秘鲁海流北上而变性。从而使太平洋东部的两个中央水团，都比西部的盐度低。

与北太平洋相比，北大西洋的亚北极水则很弱，只散布于拉布拉多近海一带。南大西洋的亚南极水(*Subantarctic Water*)不仅范围比北部大，而且与太平洋及印度洋的亚南极水都连成一条带，连绵不断绕南极一周(图3—3)。

3.3.3　冷水系的水团

冷水系包括大洋主温跃层以深的中层、深层和底层水团，以及纬度高于极锋的海域内的表层和次表层水团。在两极海域，随着纬度的增高，上层海水的冷却愈甚，密度更大，下沉的层次也更深，因而这里成了大洋的中层、深层和底层水的主要源地。正因为有大规模的下沉，所以高纬海域的温盐结构和铅直向水团的层次，就与中、低纬度海域大不一样。

1. 中层水团

中层水团是冷水系中最上面的一层，中心深度约1000m。当然在不同海域，深度有所不同，而从性质上看，同是中层水团，却有盐度特征相悖的两种水团。

(1)低盐的中层水团　　世界大洋的低盐中层水团，都形成于大洋的高纬海域表面。最著名的低盐中层水团是南极中层水

(*Antarctic Intermediate Water*)，它形成于南极辐聚带附近。这一带海域的降水量大大超过蒸发量(图 2—20)，因而表层盐度较低，由图 2—22 及 23 可知，该海域海面盐度均低于 34.0，最低者可达 33.8。但是，由于这里的水温也较低，只 2℃上下，因而密度仍然较大，所以在南极辐聚带下沉之后，可达(800～1000)m 层。在 1000m 上下，该水团一面参加绕极运动，一面向北散布，并且能一直潜伏于次表层的高盐水团之下，继续散布到中、低纬度海域。追踪这一最低盐度核心层，可发现南极中层水在大西洋能越过赤道，抵 20°N 以北(图 2—23)；在太平洋，亦可接近赤道(图 2—22)。但是在印度洋，考虑其内同性和外异性，却认为只能限于 15°S 以南。之所以再不能继续北进，是因为有来自红海的高盐中层水团，与其密度相当面势力较强。

北半球的低盐中层水团，因受大陆阻隔，不仅不可能象南极中层水那样在三大洋连绵不断，而且在各大洋的差异也很大。印度洋北部因无高纬海域，当然不可能形成低盐中层水团。北大西洋因受湾流高盐水的影响，可使在高纬海域内形成的中层水盐度增至 34.8。但因它比该洋区其他中层水的盐度仍然低，故还属于“低盐中层水”之列；然而，不论就其第一还是第二强度，显然都不能与南极中层水相比拟，甚至与北太平洋中层水也不能相提并论。

北太平洋中层水(*North Pacific Intermediate Water*)也称为亚北极中层水。由图 2—22 可见，有一低盐水舌一直南伸达 10°N 附近，几乎与南极中层水北伸的低盐水舌旗鼓相当，而且其核心值更低，若沿舌轴追溯到西北辐聚带海面，其盐度可低于 33.2。早期的研究者曾认为，其形成类似于南极中层水，即在西北辐聚带(黑潮和亲潮的辐聚区)下沉而形成的。Reid(1965)详细研究后指出，对于如此低盐的表层海水，靠冷却增密是不可能下沉到中层的；因为不等冷却到这种程度，海水就已冻结了。若追踪该温盐特征海水的源地，应该是在堪察加半岛南部及千岛附近海域中。Reid 还指出，所

谓北太平洋中层水的低盐水舌，从图上看虽然由北到南是连续不断的，但大约以 20°N 为界，南、北两部分的密度却明显不同，他认为 20°N 以南的部分起源于加里福尼亚外海。

然而，瑞德(Reid，1965)，蓬沼(1977)和增泽等(1985)关于北太平洋中层水形成机制的研讨，各有所见，而各家的看法也存在有待商榷之处。

顺便说明一下，南极中层水有人也称为亚南极中层水(*sub—Antarctic Intermediate Water*)，如迪特里希等((Dietrich *et al*，1980)。这是因为亚南极海域和南极海域并没有绝对不可逾越的界限，它们两者是连在一起的。然而，北太平洋中层水虽可称为亚北极中层水(*sub—Arctic Intermediate Water*)，但却不能称为"北极中层水"("*Arctic Intermediate Water*")。原因是太平洋亚北极海域和位于北极的北冰洋之间，隔着窄而浅的白令海峡(§1.1)，阻碍了北冰洋中层水团的南下，因而，北太平洋中层水团的形成，显然与北极无缘。大西洋与北冰洋中层虽可沟通，却是"北大西洋中层水团"向北冰洋扩展，占据了北冰洋的广大范围的中层(图 3—12)，其盐度可高达 34.5～35.0，也比北冰洋表层高，全然不是"低盐"、"低温"的中层水。

(2)高盐的中层水团　　世界大洋的高盐中层水团，溯其源都形成于中、低纬度海域的海而。如上述北冰洋中的高盐中层水，来源于北大西洋的高盐中层水，而对后者，即北大西洋强盛的高盐中层水溯源，则可一直追溯到亚、欧、非三大洲之间的陆间海——地中海，所以北大西洋中层高盐水团被称为"地中海水团"。位于中纬度而被陆地包围的地中海，因蒸发强盛，表层盐度很高，甚至可达 39.1(Morcos，1972)，而在其(200～600)m 层，形成了盐度极大值层，称为勒万廷中层水(*Levantine Intermediate Water*)。当其向西运动溢出直布罗陀海槛(水深约 350m)时，盐度仍可达 37.0～38.4。由于其密度大，即沿大陆坡"下滑"，同时与周围的大西洋水强烈混合。大约到 1200m，即与周围海水的密度相当，于是散布扩展开来，并

随亚热带反气旋环流向西及西南方向继续散布。所以，在大西洋西部的经向断面图(图(2—23)上，仍可清晰地看到这一高盐中层水。由直布罗陀海槛溢出的地中海水，也有一部分延伸散布到爱尔兰岛附近，从而使整个北大西洋的中层水，盐度普遍升高。

与此类似，印度洋的红海和波斯湾也是高盐中层水团的源地。强烈的蒸发，可使其盐度高于42.0。从这里流出的高盐水，与印度洋的海水相混合，形成厚度相当大的高盐中层水，并向南散布。在(500～700)m深层，仍可观测到盐度高达36.5，但因温度也较高(15℃)，所以密度可与南极中层水相差无几。继续南下混合的结果，使其最高盐度的特征很快消失。从波斯湾流出的高盐水，约在(250～350)m层散布，盐度高达38.0，温度高达22℃。关于它们在印度洋散布的路径与层次，可参看Rochford(1964)的研究成果。

马玛也夫曾用浓度混合理论，研究大洋的中层水团(Mamayev，O. I.，1975)，Галеркин等则用统计学方法研究世界大洋中层水团的温盐特征与分布(Галеркин，Л. И.，В. И. Кукса и др.，1983)，Piola等(Piola A. R. and Gordon A. L.，1989)对南大西洋的中层水团也作了深入的分析。

2. 深层水团

深层水团是世界大洋中厚度最大(约4000m)的水团，就体积而论，约占全世界海水的0.3。大西洋、印度洋和太平洋的深层水是互有联系的，然而，因海域的不同也有所变化。

(1)北大西洋深层水　在图2—23中，有一厚度达(2～3)km，盐度均匀且大于34.80的极大值层，由图2—12看，其温度也很均匀，这就是北大西洋深层水团，它的温、盐度特征值一般取为2.25℃和34.95。其水体向南运动中，与覆盖其上的低盐的南极中层水发生混合，盐度有所降低。到50°S附近则急剧降至34.70，就在这一带，等温线也倾斜尤甚，这便是南极绕极流的所在。

北大西洋深层水随同绕极流可进入印度洋、太平洋，最后通过

德雷克海峡，又再返回大西洋，但非原原本本“依然故我”。这可以从三方面来说明。一是在绕极运动中它有向南的分量，可在南极辐散带上升，甚至升达表层附近，对南极表层水的形成施加影响。二是它也有向北的分量，对形成印度洋、太平洋的深层水起了至关重要的作用。第三，即使仍在绕极运动的水体也在不断地变性。例如盐度，在印度洋西部仍有 34.80，但当绕至德雷克海峡时，最高也不过 34.72～34.73，待穿过德雷克海峡重返大西洋时，与最近来自北大西洋刚刚参加绕极运动的大西洋深层“新”水之间，温度和盐度的水平梯度都显著增大。

关于北大西洋深层水团的形成，也有一段认识过程。近年的研究和实测证实，从格陵兰和挪威海盆溢出的低温、且盐度也相对较低的深层水，起了极为重要的作用。由冰岛一法罗群岛间溢出的海水，形成了北大西洋东部的深层水；由格陵兰一冰岛间溢出的海水，形成了北大西洋西部的深层水。前者几经周折蜿蜒西行，在丹麦海峡南面与北大西洋西部深层水混合，转面向南，经拉布拉多海继续沿大西洋西边界的深层而运动。

然而北大西洋深层水的形成，看来还不能仅仅归因于“溢流”(*overflow*)。其理由是，在拉布拉多海和伊尔明格海的某些区域内，从海面至 3000m 的深度上，可出现位温 3.0～3.5℃、盐度为 34.9 上下的相当均匀的水体；其密度较溢流水小，故位于溢流水之上，但与溢流水一道向南运动。虽然对这一水体的形成过程和机制尚不清楚，但由此却难以否定北大西洋表层水的下沉及混合，也对深层水团的形成起了某种作用(Clarke，R. A. *et al*，1983)。

(2)印度洋和太平洋中的深层水团　　在这两个洋区深层的广阔范围内，深层水的体积也很大，此即所谓“深层共同水”。与大洋上、中层的水团相比，其性质显得更均匀；当然仔细对比不同洋区，也可发现其差异。例如印度洋深层水中心的盐度为34.7～34.8，已比大西洋深层水的盐度明显降低；在太平洋再度降低，仅

为34.6～34.7，这与太平洋中层水的势力特别强是有关系的。溶解氧含量的这种递减现象更明显（§3.2.5），从而证实这里的深层水是远道而来的“老龄”水。

之所以认定印度洋和太平洋的深层水来自别处，是因为这两个大洋没有能形成深层相对高盐水的源地。印度洋的北界只达20°N附近，海面温度高，不可能形成低温的深层水；太平洋北部高纬海域，虽然海面温度低，但如前述，其盐度也很低，只有33～34，也不可能形成盐度高达34.7的深层水。至于三大洋的南部高纬区，如图2－19所示，盐度普遍低于34.0，同样不可能成为深层水的源地。因此，大西洋南部以及远至印度洋和太平洋的深层水，都是源自北大西洋深层水，而后随绕极流而进入印度洋和太平洋。当然，“源远流长”途经数万里，也混入了当地的海水，导致其性质，特别是盐度发生了相应的变化。

3. 底层水团

世界大洋近底层充溢着最冷而密的海水，它主要是由源于南极陆架区的南极底层水（*Antarctic Bottom Water*）散布和扩展而形成的，北极底层水团的影响范围则较小。

（1）南极底层水团　　在南极威德尔海和罗斯海的陆架海域中形成的南极底层水团，是世界大洋底层水的主要来源。前者形成的底层水水量多而盐度低，后者则水量少而盐度稍高。然而，关于它们形成机制的争论，却经久不息相当激烈，甚至对有否形成底层水也存在异议（Worthington，1977）。

争论之一是，南极威德尔海水团的层次结构，能否形成低盐的底层水？威德尔海的水团可分为三层：南极表层水、南极绕极水和南极底层水（图3－10）。南极表层水（*Antarctic Surface Water*）位于从海面至500m的水层，温度低于0℃，最低达－1.8℃。盐度也低于34.50，甚至达33.0以下。其中全年被冰覆盖的陆架部分，特称为陆架水（*Shelf Water*），水温低达－1.9℃且几乎终年不变，但盐度变

幅较大。表层水之下是暖而高盐的绕极水，也称暖深层水（*Warm Deep Water*），温度高于0℃，盐度大于34.66，但却是溶解氧和营养盐类的低中心，可见它是源于北大西洋深层的海水长途跋涉而来的。最下层是南极底层水，水温低于0℃（"Eltanin"号曾测得低温达-1.39℃），盐度在34.66上下。这三层水团层结是稳定的，而且可终年保持；据Gordon(1967)，暖深层水所具有的温、盐度极大值层和溶解氧的极小值层，也可以全年观测到。这些都是不利于下沉形成之说的。

争论之二是，表层水的温度比底层水低1℃左右，盐度也低得多，它能增密而下沉到底层吗？如果能下沉，那么，温度、盐度升高的机制又如何？

争论之三是，结冰的增盐增密作用，应发生在冬季，那么夏季呢？若夏季不能下沉形成底层水，环流形式又当如何？

从1967年到1970年对威德尔海和罗斯海进行了大规模的调查，发现在大陆架上(200～500)m的底层，即使夏季也有-1.9℃，34.60～34.68的低温高盐水，其水量可占陆架水的一半，而其密度之大，即使不经"混合增密"也能直接下沉到相当深的底层。依此推论，"全年都有可能形成底层水"，也不无道理。

关于增密的机制，Fofonoff(1956)提出的"混合增密"有一定作用，关于增温增盐的机制，Jacobs等(1970)、Seabrook等(1971)和Gill(1973)等，分别提出不同的解释，例如用结冰析出卤水解释增盐，用表层水混入陆架斜坡水解释增温增盐等。Killworth(1973)则直接从环流结构出发，来解释陆架表层水的下沉。即：由于南极大陆周围盛行偏东风，地转效应相当大，故表层水被推移到南侧，使输送向大陆一侧，基于连续性原理，等量的下层水应被输送向北侧，从而使大陆架下层水成为底层水。虽然图3-10a展示的水温层结不利于表层水下沉形成底层水之说，但图3-10b、c、d却表明，愈近底层，盐度愈低，而溶解氧和营养盐含量却增高，这无疑是

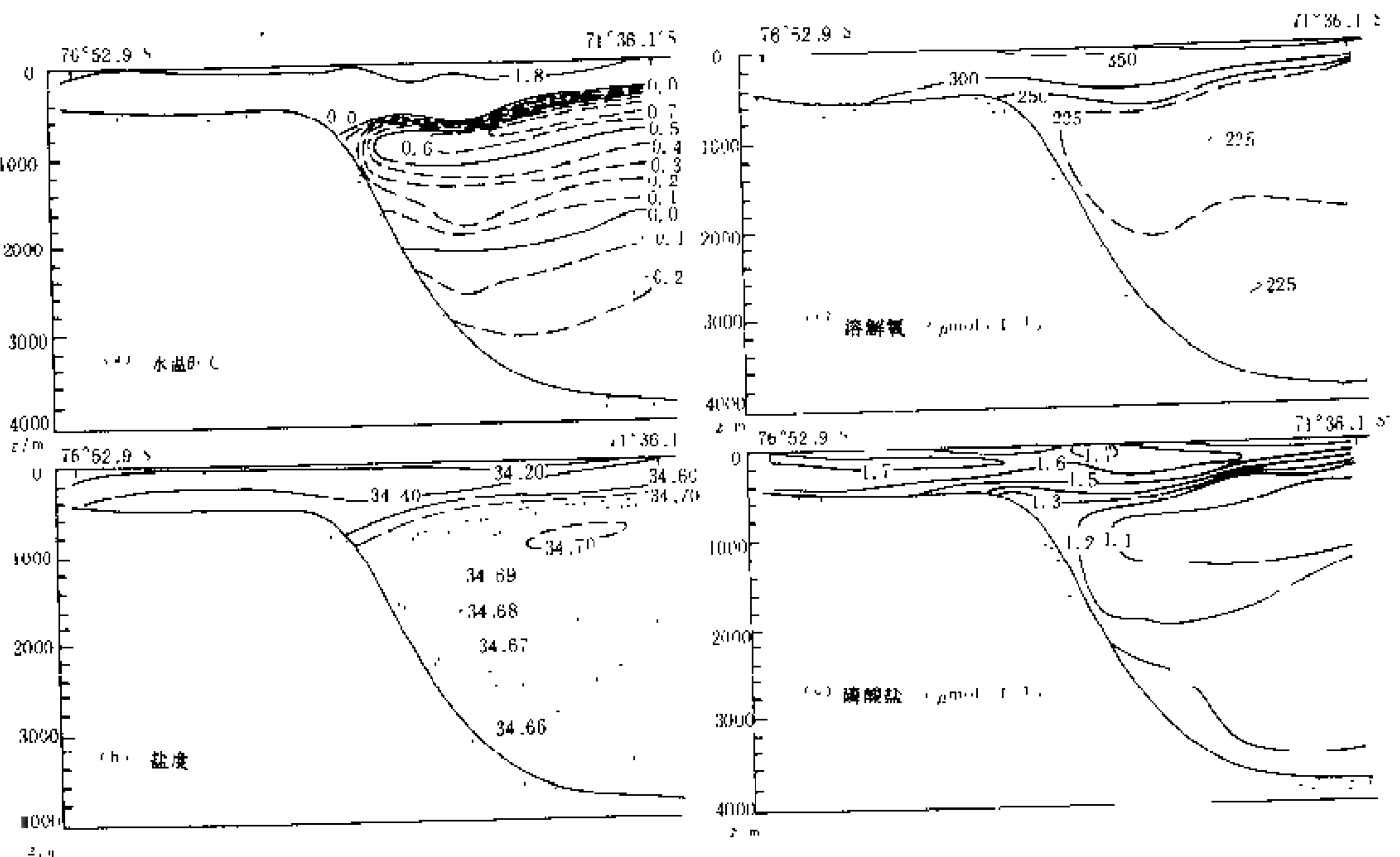


图 3—10　威德尔海经向断面水温、盐度、溶解氧和磷酸盐的分布

(1969.2～3)(据 Hufford *et al*.1970,改绘)

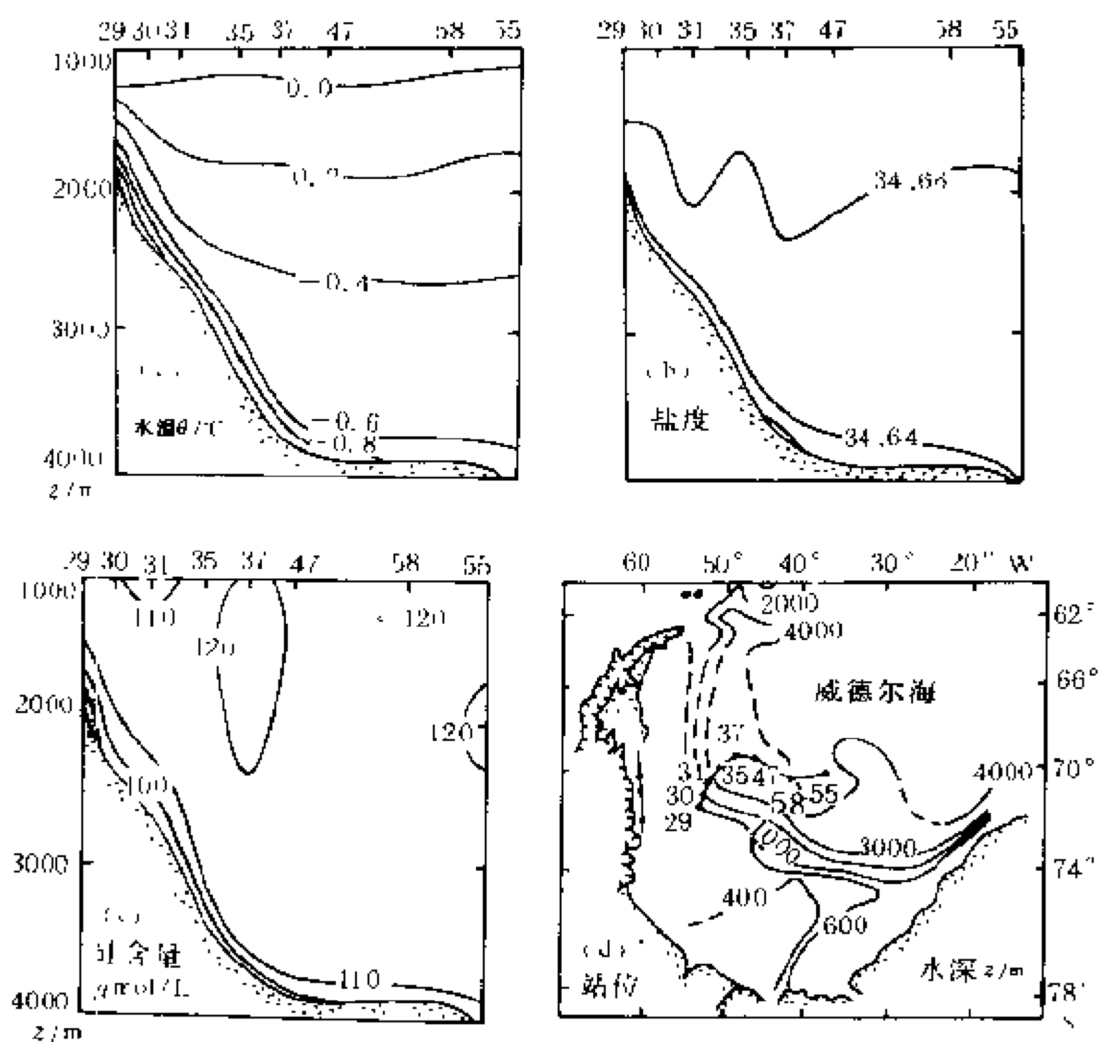


图 3－11 威德尔海 70°S 附近断面水温、盐度、硅含量分布

(据 Warren, 1981, 改绘)

支持表层水下沉观点的。特别是 Warren(1981)给出的图更进一步表明,深层水虽然抵达南极大陆边缘,但大陆斜坡处近海底较薄的水层中,却有比深层水的温、盐及及硅含量都低的海水,可沿着大陆坡下沉(图 3—11),从而形成威德尔海中的底层水。从南大洋的风系看,大致在 65°S 以南盛行偏东风,因而可以把海水和海冰向南输送,且使其滞留于较狭窄的近岸海域,该海域终年有冰群密集覆盖,也有助于下沉形成底层水。

观测表明,在罗斯海也有陆架水沿陆坡下沉的类似情况,不过其盐度较高,可达 34.72。若对环绕南极大陆的南极底层水在各大洋的盐度进行比较,就会发现在太平洋的西南部盐度确有增大,这可能就是罗斯海形成的底层水散布的影响(Glasby G. P., 1990),当然,其影响范围不大,一般认为,这与其形成的水量较少有关。

分析南大洋深层至底层的水温、盐度和溶解氧含量的分布图(Callahan, 1972; Dietrich *et al*, 1980),可以发现由威德尔海和罗斯海伸展开来的低温、低盐范围,与富氧水的范围相当一致,这也说明两个海区的确是南极底层水的重要形成海域。再者,由威德尔海伸出的低盐舌和富氧舌,两者的伸展方向、趋势,乃至分叉及其所达海域都相吻合,这又进一步表明,威德尔海不仅形成了底层水,而且还源源不断地向东及向北扩展及散布。罗斯海也有类似情况,不过影响较小而已。

(2)北极底层水团　与南极底层水团相比,北极底层水团要弱小得多。北冰洋大部分海域的表层海水,由于盐度很低,更难于形成能下沉至底层的高密的水体。图 3—12 是穿越北极的断面位置及温盐分布。表层盐度仅 31.0～33.0(在东西伯利亚海和喀拉海更低于 30.0),表层之下是来自北大西洋的高盐水,可达 34.90;底层盐度还高,为 34.90～34.97,但温度比中层低。鉴于上述,北极底层水的形成源地,只能在表层盐度较高的海域去寻找。一般认为靠近大西洋的格陵兰海杨马延岛附近,盐度高温度低,能形成高

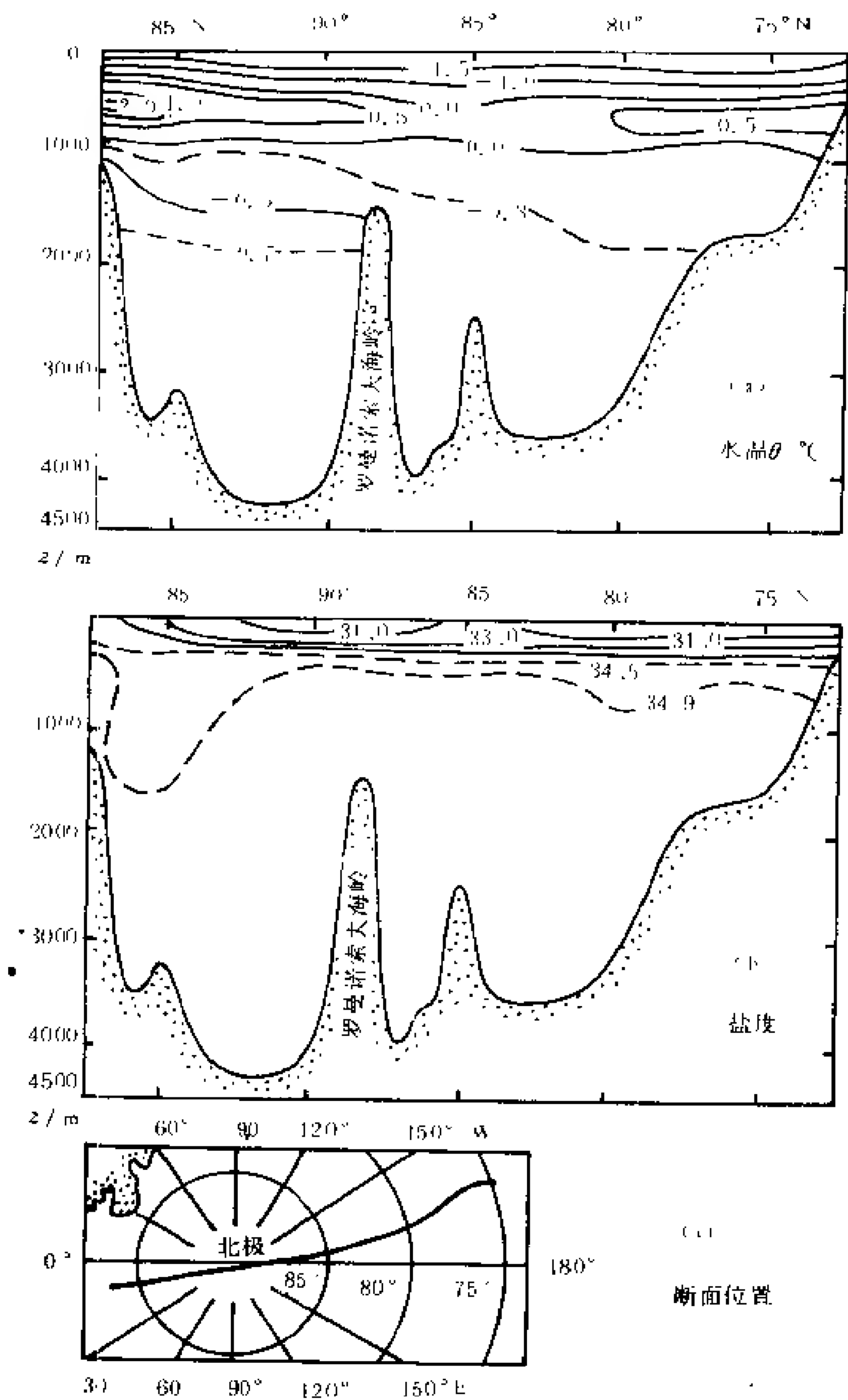


 图 3—12 穿越北极断面的水温、盐度分布(据 Tchernia, 1980)

密冷水下沉;然后经挪威海盆进入北冰洋的亚欧海盆,继而进入加拿大海盆。但因两海盆之间的罗蒙诺索夫海岭水深只有1500m,所以只有浅于此深度的水才可进入加拿大海盆。

北极底层水不仅生成的水量少,而且散布的范围也不大。由于白令海峡的阻隔,难以进入太平洋,与大西洋的沟通也受诸多海槛阻隔(§1.1)。越过海槛溢入大西洋后虽可向南散布,但因其密度小于源自南极的底层水,所以只能在后者之上散布,对形成北大西洋深层水起作用;在底层慑于南极底层水的进逼,它只能偏安一角。

(3)南极底层水的散布　　与北极底层水的弱小相反,南极底层水十分强盛,散布范围相当广阔,几乎成了大洋底层的霸主。在分析大洋底层水团时,考虑到深度大,绝热影响明显,故常使用位温分布图。由图3—13可见,南极底层水在大西洋沿西部海盆北上,抵达赤道附近时,位温仍低于0℃。然而,由于鲸鱼海岭的阻挡,南极底层水却不能直接从南面进入大西洋东部的安哥拉海盆,只是在赤道附近的罗曼什海沟(深7750m),部分南极底层水才得以夺路东去,而后再分别向南、向北散布。在扩展和散布的过程中,它自身的温度也渐次升高,由于经历的路程和时间不同,所以大西洋东、西两海盆的底层水温便有了明显的差别。依位温分布追踪可见,继续北上的底层水可散布到40°N附近。

在印度洋,南极底层水则是直接"兵分两路"向北扩展。西路由克罗泽海盆经马达加斯加海盆、索马里海盆北达10°N,再转向散布到阿拉伯海盆。东路则由南澳大利亚海盆,经澳大利亚西海盆和西北海盆,最后扩展到中央印度海盆(Tchernia,1980)。

在太平洋,南极底层水的散布更为广泛,但扩展的路径、方式和大西洋及印度洋都有所不同。由图3—14看,它主要是从165°E附近太平洋海隆的通道处进入南太平洋,沿汤加—克马德克海槽向北,经萨摩亚水道抵达赤道之后,分两支"全面推进"向北太平洋

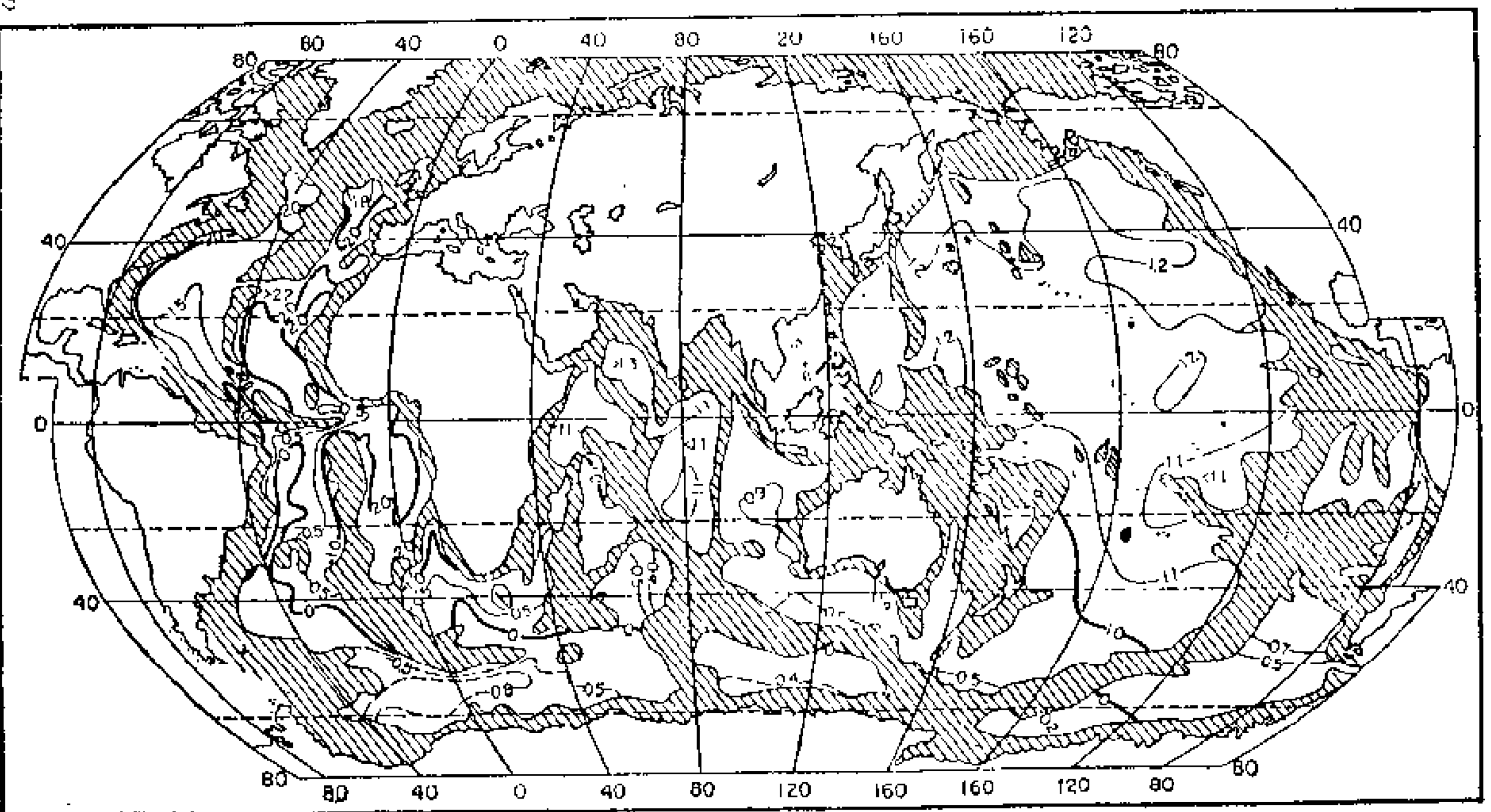


图 3－13　世界大洋近底层的位温(℃)分布(影线区水深小于 4km)

(据 Степанов, 1974)

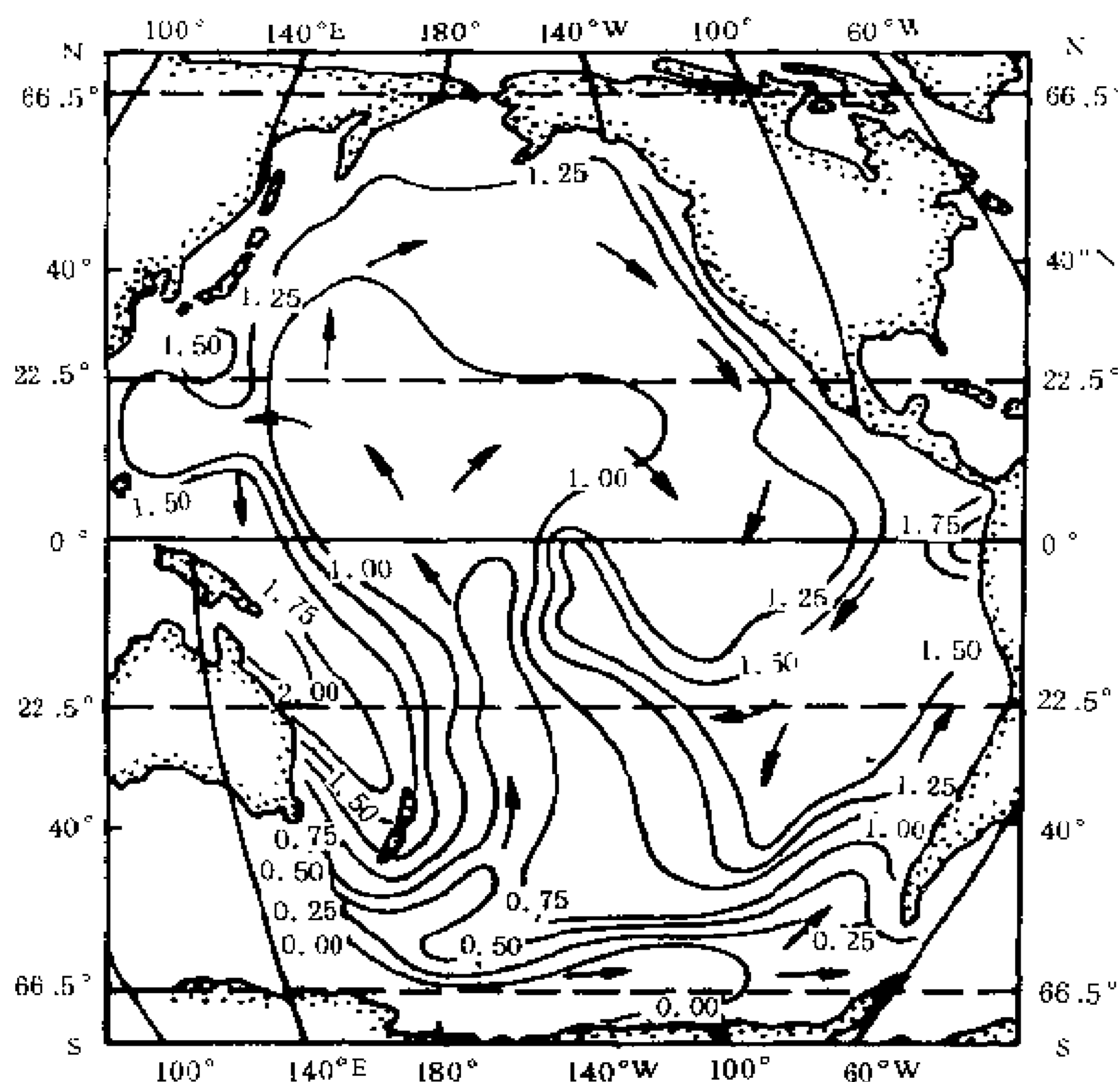


图 3-14 太平洋底层水团的位温(℃)和底层流(据 Tchernia, 1980)

扩展。在 10°N 主流分出一支，散布到北太平洋东南部。相比之下，从太平洋西边特别是从新西兰与澳大利亚之间北上的部分，势力却是较弱的。

对南极底层水在三大洋扩展的路径与散布的情况，进行综合

对比后可以发现，它们有两个共同特点。一是它们明显地受制于洋底地形的分布，如大洋中脊和重要的海岭，起了“阻隔”或“分流”的作用，而海沟和断裂带则起了“沟通”和“放行”的作用。二是它们明显地受西向强化的影响，即在大洋西侧较强而东侧较弱。

§3.4 海洋环流及其与水团的关系

关于海流以及大洋环流的形成机制和动力学分析，后面还有专门章节论述，本节只简略描述海洋环流的概貌，而且侧重于和水团关系的讨论。

§3.4.1 暖水系的环流

1. 表层环流

人们早就注意到大洋上的风场和表层流场有密切的关系，以后又根据船舶的合成偏航和风偏航，综合观测资料绘制了大洋的表层环流图。通过进一步的调查和深入的研究，对大洋环流特别是某些重要的海流如湾流和黑潮等等，积累了更多的资料，认识也更加深化。虽然我们已确知，它们绝非只受风场所制约，亦即不仅仅局限于表层，但是为了描述的方便，还是先从表层环流谈起。

图3－15绘出了世界大洋表层的主要海流和辐聚、辐散带。对比大西洋和太平洋，其环流有许多相似之处。例如：大洋的南、北两半部都为反气旋式环流，即北半部为顺钟向旋转而南半球为逆钟向旋转，并且每一环流的东、西两侧都不对称；在赤道海域，于南、北两半部的环流之间夹着赤道逆流，致使流系更为复杂；在南半球的西风带海域，海流可连续贯通；在亚北极海域西部，都有来自北方的寒流，从而形成小型气旋式环流，以及在南极海域都有弱气旋式环流等等。印度洋北部则与上述明显不同，那里是比较典型的季风流，冬、夏季流向往往是相反的。

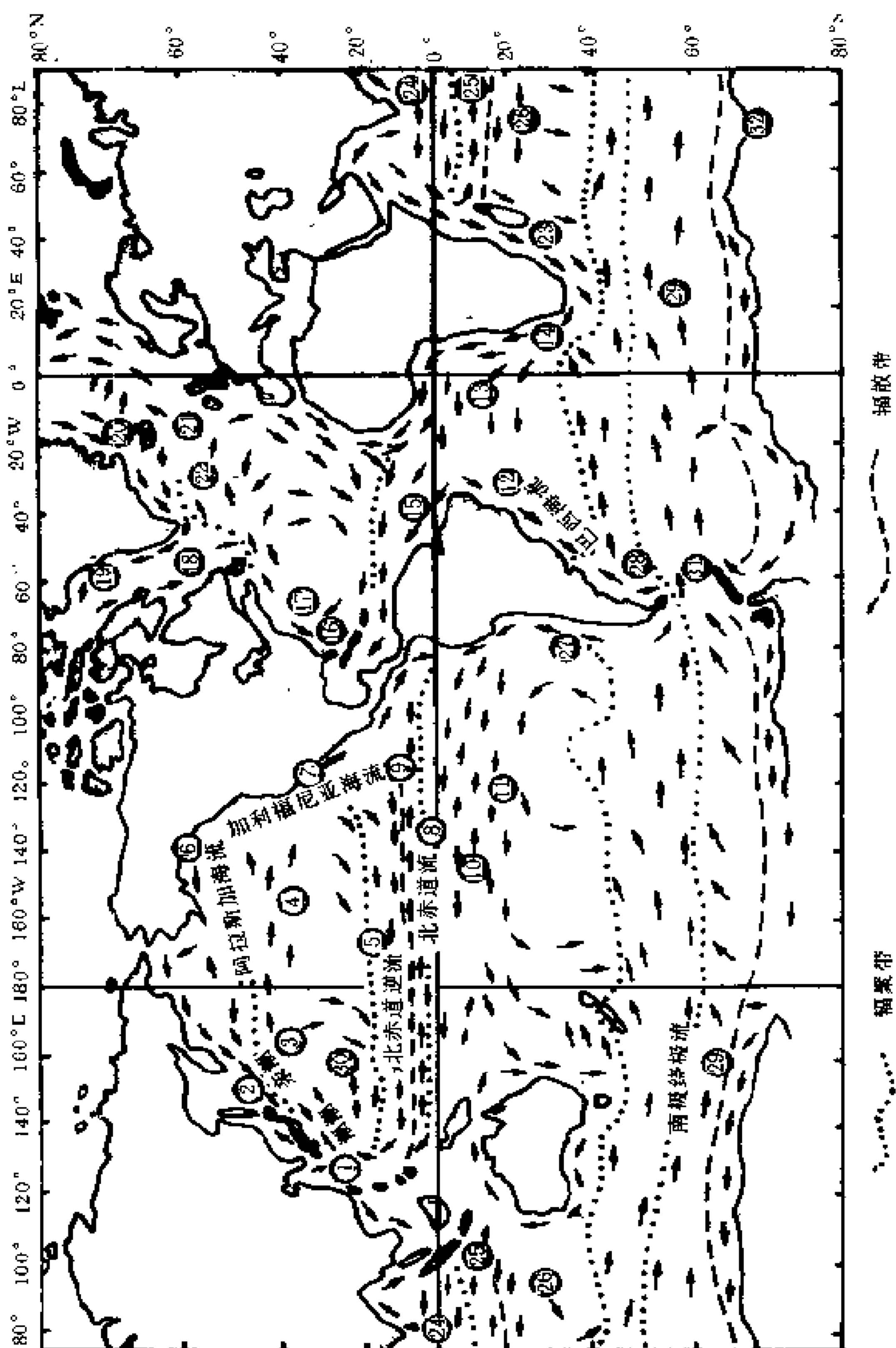


图 3—15　世界大洋表层的主要海流和辐聚和辐散带

①黑潮；②亲潮；③黑潮续流（黑潮延续体）；④北太平洋流；⑤、⑨、㉔北赤道流；⑥阿拉斯加海流；⑦加里福尼亚海流；⑧北赤道逆流；⑩南赤道逆流；⑪、⑬、㉖南赤道流；⑫巴西海流；⑭本格拉海流；⑮圭亚那海流；⑯佛罗里达海流；⑰湾流；⑱拉布拉多海流；⑲西格陵兰海流；⑳东格陵兰海流；㉑伊尔明格海流；㉒北大西洋流；㉓厄加勒斯（阿古拉斯）海流；㉕赤道逆流；㉗秘鲁海流（洪保德海流）；㉘福克兰海流；㉙南极绕极流；㉚亚热带逆流；㉛中国南极长城站；㉜中国南极中山站。点线为辐聚带概位。断线为辐散带概位。（据友山好文、高野健三，1990及Tchernia，1980等，综合改绘）

鉴于大洋环流的上述特点，可将其划分为几个各具特征的区域，下面分别予以介绍。

（1）西风漂流　　由盛行西风所驱动，流向终年基本都向东。在南半球可环绕南极大陆一周，故称为南极绕极流。其流程之长，流幅之宽，厚度之大，流量之巨，均居全球海流之首。流程连绵2×10^4km，北界南亚热带辐聚带，南至南极辐散带、流幅宽达25×10^2km。研究和实测证实，绕极流可从表面一直渗达海底，厚度有数千米。在德雷克海峡曾测得流速（0.5～1.0）m/s，体积流量（1.0～1.5）$\times10^8m^3/s$，也有人说可超过$2\times10^8m^3/s$（Reid *et al*，1971；Callahan，1971；庞德，皮卡德，1990）。可见名副其实的为世界大洋中最强盛的流，因而它对南大洋水团结构的影响是勿庸置疑的。

在北半球由于大陆阻隔，相应的流分别为北太平洋流和北大西洋流。它们在流至大洋东部时，均各再分支。前者的分支，分别成为加里福尼亚海流及阿拉斯加海流的源头之一；后者则分为3支，成为葡萄牙海流、挪威海流和伊尔明格海流的部分水源。

（2）西边界流　　是在大洋西部大陆坡海域，由明显的海面坡度维系的强流，其突出特点是流速、厚度、流量大，但流幅不宽。大西洋中的湾流和巴西海流，太平洋的黑潮和东澳大利亚海流，印度洋的厄加勒斯海流都属此列。其中湾流和黑潮的流速、流量特别大，其调查观测的时间长，积累的资料多，研究也相当深入。

关于湾流，来往于欧美之间的商船、邮轮和捕鲸船队，早已积累了不少感性知识，1770年富兰克林开始了对它的研究，施托梅

尔的专著(Stommel H.,1965),对其物理学特征和动力学结构论述更为深入。

湾流在表层的宽度不大,约(100~150)km(图 3—6),但流速相当大,高达 2.5m/s;表层流速有季节变化,夏季大而冬季小。厚度一般为(700~800)m,但在流过哈特拉斯角之后,仍能大幅度加深,其影响所及可达 4000m。体积流量也有沿流程递增的现象,在哈特拉斯角约 $6\times10^7m^3/s$,再往下游 1000km 处,可高达 $15\times10^7m^3/s$。如此巨量的海水输送,对北大西洋水系和水团的形成与变性,其影响之大是不言而喻的。

在太平洋与湾流对应的是黑潮,几十年来对其进行了多次国际合作调查,我国也参加了一些合作。关于黑潮研究的论文和专著更多,Stommel 和 Yoshida 编的专集(1972)及中国出版的"黑潮调查研究论文集"等等,是具有一定代表性的。黑潮的源地在菲律宾群岛以东,由太平洋的北赤道流延续转向而形成,因地转偏向力及其随纬度变化的效应而强化。在吕宋岛以东,北向最大流速约(0.8~1.0)m/s,到台湾岛南端及东岸,流幅约(125~170)km,向北还变窄,而流速增至 1.5m/s。流量有明显的半年周期变化,春、秋强而冬、夏弱。到达日本南岸时,流速可达 2.0m/s,平均体积流量增至 $42\times10^6m^3/s$,最大可达 $65\times10^6m^3/s$,但有明显的年周期变化,夏季最大而冬季最小。由图 3—8 可见,东海黑潮影响深度亦可达 1000m,因而对东海乃至黄海的水系、水团形成和变性,起了举足轻重的作用。至于黑潮对日本近海水团的影响,由其研究论文的浩繁,便足以说明人们的重视程度。

(3)东边界流　　是风生亚热带反气旋式环流东部的海流,如太平洋的加里福尼亚海流和秘鲁海流,大西洋的加那利海流和本格拉海流,在印度洋则是西澳大利亚海流。

与西部边界流形成鲜明对比的是,东部边界流的流速小、厚度小,尽管流幅宽,但是流量却小得多。如加里福尼亚海流,宽度可达

数 10^2km，但在其流速较大的北部，多年平均也不过 0.17m/s。南部则平均仅 0.11m/s 左右，体积流量只有 $10^7 m^3/s$（卡缅科维奇等，1983）。

由于东边界流宽而弱，即使对最易观测的加里福尼亚海流，也很难划出其确切的流界，更不要说其他的东边界流了。因为东边界流中还有涡旋、逆流和上升流等复杂的现象，所以较为合理的说法是：它们的平均流向指向赤道。上升流倒是东边界流区内的重要现象，如秘鲁近海的上升流就很著名，而且对形成附近海域的渔场起了至关重要的作用。当大气和海洋环流异变时，该处的上升流减弱甚至消失，便酿成厄尔尼诺灾难。

（4）赤道流系　　在赤道南北不太宽的海域内，有复杂的赤道流系——南、北赤道流和赤道逆流，表层之下还有潜逆流。表层的流系与洋面上的风场分布特点有密切的关系，就连信风不对称于地理赤道的现象，也在赤道流系中有所体现——南、北赤道流不对称于地理赤道，赤道逆流也不在地理赤道上。表 3－1 综合列出了

表 3－1　太平洋表层赤道流系中海流的位置、流速和流量

海流名称	位置范围	流速/$m \cdot s^{-1}$	体积流量/$10^6 m^3 \cdot s^{-1}$
北赤道流	10°N～25°N	0.20～0.30	45
北赤道逆流	3°N～10°N	0.15～0.60	45
南赤道流	20°S～4°N	0.50～0.60	50
南赤道逆流	7°S～12°S	0.15～0.30	10

散见于不同文献中关于太平洋赤道流系的一些数据。其中位于南赤道流之中的逆流——南赤道逆流，是瑞德（Reid）1959 年发现的，1979 年我国的"实践号"调查船观测时也予确认，且测得最大流速为 0.45m/s。"向阳红 09"号调查船在 160°E 断面上于 1979 年 4～5 月测得北赤道流的最大流速达 0.70m/s，也高于以往的报道。

大西洋的赤道逆流全年都在北半球，而且其南、北赤道流的强

度都不如太平洋，特别是流量明显小于太平洋。例如北赤道流速度可达 0.36m/s，但体积流量仅为 $16\times10^{6}m^{3}/s$；南赤道流速度可达 0.43m/s，体积流量只有 $23\times10^{6}m^{3}/s$。

(5)印度洋的季风流　　在印度洋南部，西风漂流可以与太平洋和大西洋贯通连续，南赤道流和赤道逆流虽不能与之贯通，但还能终年存在。印度洋北部却不然，在 10°S 以北的整个北印度洋中，海流变化主要是受印度洋上的季风所支配。从 10 月至次年 3～4 月，受东北季风影响，出现东北季风流，与赤道逆流一起，可形成东北季风环流。4 月以后西南风盛行，则有西南季风流生成。郑和在率领庞大的船队"下西洋"时，就已经知道利用风向及流向的这种变化。西南季风流与赤道逆流的方向差不多，两者汇合较难辨认。西南季风还给印度洋北部和东北部带来大量的雨水，使孟加拉湾等处盐度大为降低，更与印度洋西部的高盐水形成强烈的对比。

(6)亚热带逆流　　在西风漂流和赤道流系之间，洋面终年被亚热带高压所控制，蒸发强盛，从而形成大洋表面的最高盐度区(图 2—8,19,20)。由于其南、北两侧海流的作用，在这里形成辐聚带，可使表层的高盐海水下沉，从面形成大洋次表层的水团。

从大洋环流的总态势看，这里不会存在强流，但由于 20°～30°N 洋面上有一弱低压槽，把亚热带气旋一分为二，故能导致亚热带逆流形成。类似的现象在南太平洋和北大西洋也陆续发现。

2. 次表层环流

在图 3—4 中已标出了暖水系经向断面上的环流结构。铅直向的环流，特别是辐散、辐聚带的分布，与次表层水团的形成是相辅面相成的(§3.3.2)。至于纬向的流动，大部分海域的次表层环流与表层差不多。然而在赤道海域，却与表层有明显的差别，其中赤道潜流就是最明显的例子。

(1)太平洋赤道潜流　　因由克伦威尔等人(Cromwell *et al*)于 1952 年 8 月首先发现，故又称为克伦威尔海流。它位于赤道正下

方的 2°S～2°N 之间，宽约 300km，厚约 200m(图 3—16)。西起菲律宾外海，东至加拉帕戈斯群岛以东，流程长约 14×10^3km，仅次于南极绕极流而居第二位，体积流量也可与黑潮相比拟。潜流的流轴通常与温跃层一致，所以在西部可深达 200m，而东部可升至 50m 或更浅。流速在西部为 0.5m/s 左右，至东部可高达 1.5m/s 以上。表 3—2 列举了国内外部分研究成果。

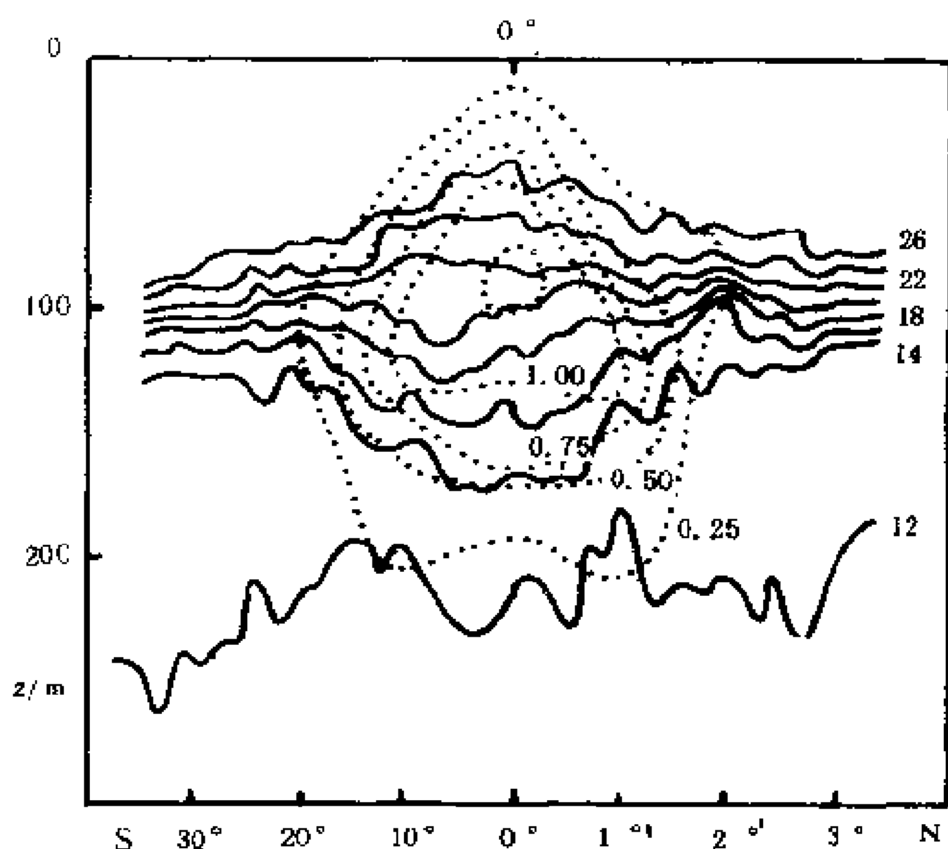


图 3—16　西经 140°断面 1958 年 4 月的水温和流速分布

实线—水温(℃)；虚线—流速(m/s)

(据 J. A. 瑞斯，1983，改绘)

表 3—2　太平洋赤道潜流的流速和流量

断面位置	观测时间	流速/m.s-1	体积流量/10^6m³.s-1	作者及发表时间
140°E	1965.12	0.40		Корт В. Г. 等,1966
160°E	1979.1	0.66	20	马成　,陈先芬,1981
	1979.4	0.77	17	
165°E	1979.2	0.40	24	
	1979.4	0.70	20	
170°E	1967.3	0.50	20	Hisard P. 等 1967,1969
	1967.4	0.40	15	
	1967.6	0.70	40	
	1967.7	0.90	55	
	1967.8	0.60	25	
150°W	1971.4	1.62	40	Taft B. A. 等,1974
140°～90°W	1971	1.0～1.5	39	Корт В. Г,1971

(2)大西洋赤道潜流　前苏联调查船"罗蒙诺索夫"号 1961 年发现了大西洋的赤道潜流,将其称为罗蒙诺索夫海流。它起源于南信风流的最西边的分支以及安的列斯—圭亚那逆流分支。图 3—17 为冬季 4 个断面上的流速分布,个别情况下最大流速也可超过 1 m/s,流量冬大夏小、西大东小。到东部它分成两股,各奔南、北方向而去。

罗蒙诺索夫海流的流轴虽然基本在赤道上,但有大弯曲和波动,振幅可达 1 个经距。太平洋的克伦威尔海流也有大弯曲现象。

(3)印度洋赤道潜流　由于季风转换所致,印度洋赤道区的海流,不象太平洋和大西洋那样稳定。只有冬季东北风盛行时,才有类似于太平洋和大西洋的赤道潜流,前苏联海洋学家称之为塔列也夫海流(Течения Тареева),因非终年存在,故西方海洋学家尚

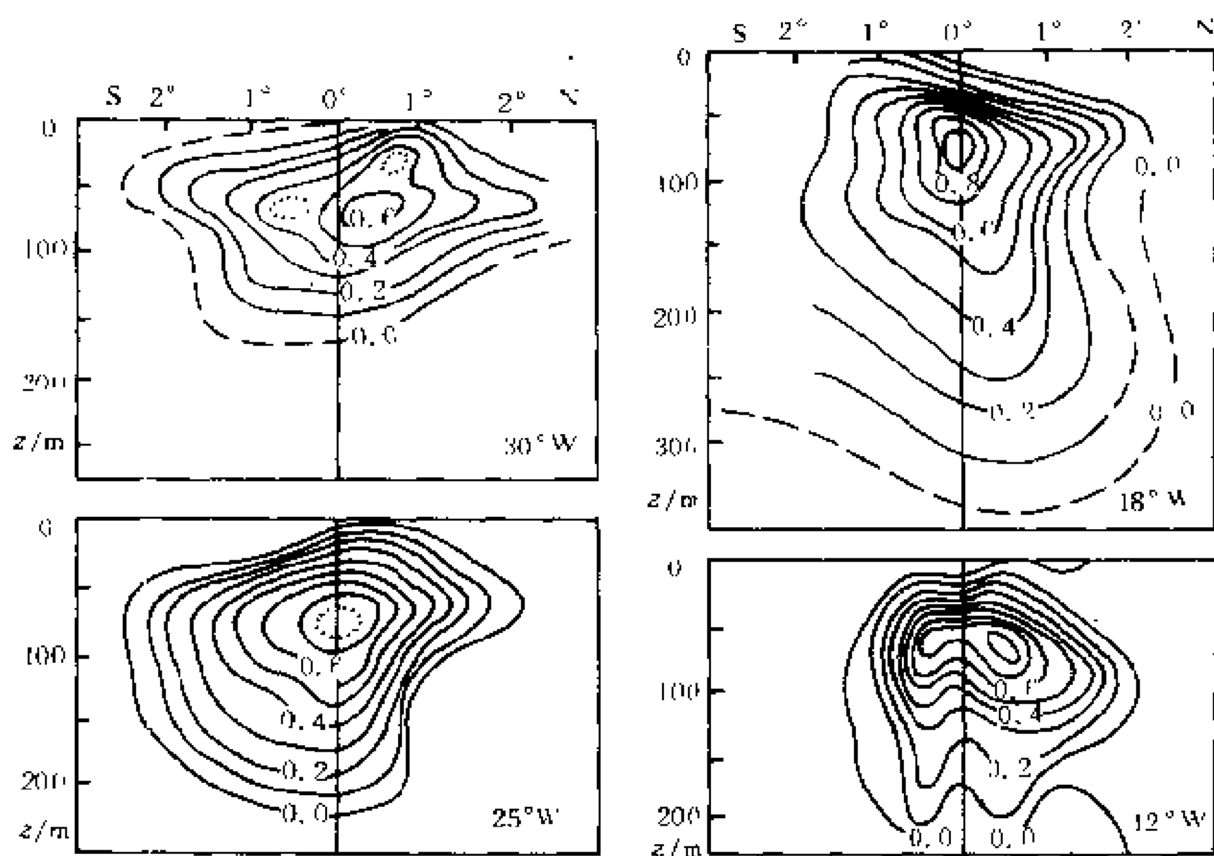


图 3—17 冬季在罗蒙诺索夫海流 4 个断面上的流速(m/s)分布
(据卡缅科维奇等,1983)

未公认。

3.4.2 冷水系的环流

1. 表层和次表层

在低纬和中纬度海域,表层和次表层尽为暖水环流系所盘踞,只有在纬度高于极锋的海域,冷水环流系才“得见天日”。然而,南极和北极的环流却有不同的特点,南极为“绕极”,北极则为“越极”。

在离南极大陆稍远一些的海域内,盛行西风驱动下的绕极流发展强盛,加之热盐效应配合,可从表层一直渗达底层,换言之,在

该海域内，表层、次表层环流与中、深、底层是一致的。这种一致性的一个标志，就是海底地形对流向的影响，也可以在表层体现出来(Sverdrup，1949)。

在更靠近南极大陆的海域，是东风所驱动的东风流。这支海流远没有西风流那样强盛，但它们两者之间形成的辐散带，以及东风流的向极体积输送，却对南极海域水团的形成，有着至关重要的作用(§3.3.3)。

北极海域表层被冰所覆盖，但冰的漂移显示出，这里有一个大的反气旋式环流。然而该环流并不以北极点为中心，而是偏向加拿大海盆一边，结果形成一支“越极”海流，从楚科奇海起，穿越北极而达格陵兰海。越极海流中的部分水体继续完成反气旋式环流，另一部分则汇入东格陵兰海流，并随其一道进入大西洋。在北冰洋的其他海域，还有一些小的气旋式环流，因此北冰洋的表层环流是相当复杂的。表层之下则有“大西洋水”，它是经格陵兰与斯匹次卑尔根之间的水道进入北极海盆的，并有部分水体可越过罗蒙诺索夫海岭进入加拿大海盆。由于所涉及的深度已较大，有的也将其归入中层环流系。

2. 中层环流

前面在介绍中层水团的形成和散布情况时，已经谈了南极中层水在三大洋运动的概貌。伍斯特等在追踪低盐核心层的伸展时也曾推断了中层水的运动，德凡特还详细计算了中层的地转流场(Defant，1961)。依上述研究得知，南极中层水的北上，是在大西洋的西侧最强。对于高盐中层水团如地中海水团在大西洋的散布，也有人依最高盐度层进行分析。

然而应该指出，在依断面图上的高盐、低盐水舌伸展方向来推断海水运动情况时，需要谨慎分析，切戒贸然推论。关于北太平洋中层水的形成和散布，早期在研究时把它与南极中层水类比，就是一个教训(§3.3.3)。其实，就连南极中层水的运动，也不能仅依图

2—22 和 23 而武断地下结论，说它从 60°S 附近急剧下沉后就径直向北流去。因为若与纬向的流动相比，它就逊色多了。计算地转流场表明，50°S 以南已属南极绕极流范围，当然，包括上述低盐水舌内的一部分也应一起向东流。而低盐水舌中靠低纬一侧的那部分，则以向西流动为主(Reid，1965)。换句话说，即中层环流在很大程度上还要受上层风生环流的影响；甚至也有人认为，它还是应该属于大洋上层风生环流的下部(卡缅科维奇等，1983)。

3. 深层和底层的环流

一方面是因为深海测流困难，使得人们对深层环流知之不多；另一方面也是由于海洋研究的历史局限，导致认识的片面性。所以，尽管 1925～1928 年德国"流星"号的大西洋调查，已发现深海有 0.1m/s 以上的流速，然而直到 50 年代，风生大洋环流理论盛极一时之际，人们却仍然无视这一事实；即依旧认为，深层或许只有涡动扩散导致热量和盐量转移，因而不考虑质量和动量净输送的存在，例如，把从海底到海面的流速铅直积分直接与上层流的观测结果作比较。

随着调查资料的增多和研究的深化，业已证明，虽然总的来说深层流速的确比较缓慢，但在大西洋和南太平洋西边界的深层，也确实有重要的海流存在，流速大于 0.1m/s 者屡见不鲜。例如，在深层悬挂自记式海流计实测，得知大西洋西边界处有深层流向南，(7～10)天内的平均速度可达 0.1m/s；在波多黎各海沟 6599m 处测得流速达 0.14m/s；在南大西洋的卫马水道，于 4200m 深度上测得流速 0.40m/s。南太平洋的萨摩亚水道是深层和底层水北上的主要通道，在 4800m 深度上于(11～46)小时内记录的平均流速为(0.05～0.15)m/s(Reid and Lonsdale，1974)。根据施托梅尔等人的研究，可给出深层流的概貌如图 3—18。

至于底层流，与大洋底层水团的散布关系更为密切。图 3—14 已给出了太平洋底层环流的概貌，流速的实测有如下报道：在 56°

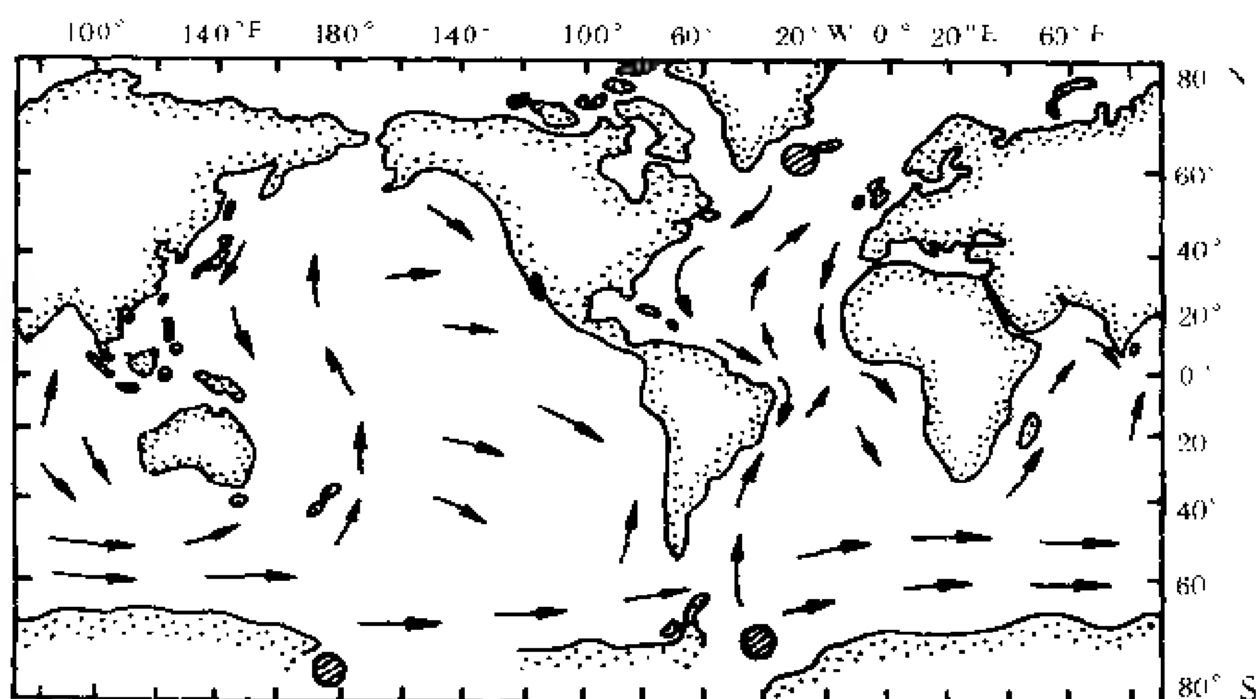


图 3—18 深层流的概貌

(圆形影线区为下沉海域)(据 Stommel *et al*, 1960)

S,170°E,距海底 100m,3 昼夜的流速平均值为 0.29m/s。南大西洋的底层流与南极底层水团的散布密切相关,卫马水道近底层的北向流速可达 0.25m/s。北大西洋的底层流既与南极底层水的散布有关,而且北极底层水也有影响,图 3—19 是根据沉积物的搬运导致的海底地形改变给出的底层流概况。

3.4.3 水团与环流某些关系的讨论

在§3.3 中讨论水团的形成及分布时,曾多次谈及海洋环流乃至某一具体海流的作用;类似地,在§3.4 中介绍海洋环流时,也时常涉及水系或具体水团的散布与扩展。这一事实本身就说明,水团与环流的关系是相当密切的。

然而,两者毕竟不是一码事,在某些概念的内涵上甚至还存在相当大的差异。



图 3—19 大西洋北部的海底地形和底层流

(据友田等,1990,图中点线是加绘的 4000m 等深线)

1. 水团运动与海流的关系

世间一切事物都处于永恒的运动之中,水团当然也不例外。水团的形成与变性就是运动的一种形式;即使水团内部也有热、盐运动,生物、化学运动;从外观看,还有更易觉察的机械运动等等。海流也是海洋的一种运动形式,它是海水水体元的有规律的长距离的运动,但是,却不能与"水团运动"划等号。水团作为兼备内同性

与外异性而连续分布的宏大水体，其空间位置相对来说是比较稳定的，即使有季节性或年际的变化，也只是在其多年平均的位置附近作较小的摆动(摆动的幅度与其体积的空间尺度相比是小量)，绝不会是整个水团长距离的迁徙。如图3—3所示，赤道水团总是在赤道附近海域，不同时间其位置可能有摆动，但不会远离赤道而去。南极中层水越过赤道，南极底层水北达千岛，也只是水团体积范围的所至，并不是“南极中层水团”和“南极底层水团”离开了南极而迁到北半球，它们依旧和南极源地水体绵延于同一水团中，而作为“水团”这一“庞然大物”，其从南到北的整体位置，仍然是稳定少动的。

就运动的方向和速率而言，两者也无法相比较。水团位置的变动很小，几乎谈不上什么速率；海流是水体元的位移，强流的速度还是相当大的，甚至有大于2.5m/s者。至于运动的方向，情况更复杂。流向与水体元运动的方向是一致的，而水团扩展方向与流向却不一定。象南极底层水团和北大西洋深层水团，其扩展方向与流向尚称一致，但南极中层水，特别是北太平洋中层水，两者方向则不一致。

当然，两者之间又存在紧密的联系。水团的扩展散布，除了靠混合扩散外，主要还是靠海流输送。输送的结果，一方面是使水团的范围扩展了，但另一方面，也必伴随有第一、第二类变性过程的发生。如前已述，热带高盐水被北赤道流输送向西，形成了黑潮水，黑潮把这些水体输送入东海，则因混入了低盐水，变性而形成“东海黑潮次表层水团”。可以说：海流输送——水团扩展——变性加甚——形成新水团，是其辩证关系的写照。

2. 水团的核心、边界与海流的主轴、流界的关系

水团的核心是其典型特征最为突出的那部分水体，其隶属度应高于0.9。如果从温盐等特征的分布图看，核心部分应比较均匀，例如南极中层水团的核心，对应于图2—22及23中的低盐舌

内均匀区，湾流和黑潮表层水团应对应于高温均匀区，次表层水团对应于高盐中心(图 3—6～9)。然而，世界大洋的主要海流，如湾流和黑潮，又是强斜压性流，所以海流的主轴(在断面图上即为流核)，位于等密度面倾斜最甚之处(图 2—28)。由于温度对密度的影响更显著，故流轴往往位于等温面倾斜最甚之处(图 3—6～8)，均匀的高温水则位于湾流或黑潮主轴的右方(在北半球，相对于流去的方向而言)。也就是说、水团的核心并不与流轴相吻合。

在湾流和黑潮的西北边，是低温低盐的陆架或陆坡水团，于是两者之间形成很强的水温及盐度锋面，俨然如一堵“冷壁”阻挡了高温高盐水的向“左”输送。这正是两类水团的边界，且往往为西边界流的流轴所在。从海面向下，锋面是倾斜的，所以水团的边界也不是竖直的。湾流和黑潮的两侧，都发现有逆流，因而容易划出这类流的流界。这些流界往往与左侧冷水舌或右侧暖水舌的舌轴线吻合，因而水团的核心往往落在流界上。

对于具有喷射流和正压性质的海流，又当别论，如图 2—21 所示的长江冲淡水团，其核心与流轴是一致的，而水团边界与流界也有很好的相关关系。

§3.5 海流的大弯曲和中尺度涡

上面关于水团环流的讨论，大多属于气候式的观点。60 年代以来，由于观测技术的提高和研究工作的深入，海洋学已进入了天气尺度的研究阶段。§2.6 所介绍的细微结构，是对传统的热盐结构认识的补充和深化；下面介绍的大弯曲和中尺度涡，也是迭加于气候式水团环流上的天气尺度和中尺度的海洋学现象，对后者的研究，也极大地深化了对前者的认识。

3.5.1 气候式海流图象与海流的大弯曲

在积累大量感性和实测资料的基础上，人们对诸如湾流和黑潮等强盛的海流，有了更多的印象，在综合海洋和气象观测资料与研究成果的基础上，编绘出版了各式各样的气候式海流图，这对航运、交通和海洋研究都起了不小的推动作用。然而，另一方面也使不少人对海流的图象产生了误解，认为海流就是海洋中的河流，好象海水经年累月一成不变地沿着图上所划的路径流动、分支和循环。

其实，如图 3－15 所绘出的世界大洋的主要海流，只是长期平均的大致位置。实际上在海洋中，并不存在无论何时都沿同一条不变的流轴而规则流动的海流。海流的速度会因时因地而异，海流的主轴也随时间不同而变化，即使以强劲、稳定而著称的西边界流也不例外。图 3－20 为东海黑潮流轴 25 年平均的结果(孙湘平，1987)，可见其四季变化是明显的，而黑潮的这一段(东海黑潮)的流轴，相对来说还是比较稳定较少发生弯曲的。黑潮到日本南方后，流轴变化更大，甚至仅过数日，流场就可能“面目全非”(图 3－21)。最引人注目的是，流轴出现形如蛇行的大弯曲。这种现象并非黑潮所独有，湾流在离开哈特勒斯角之后，也不再象以前那样沿比较稳定的流径前进，而是开始出现弯曲，并且渐趋增大。图 3－22 是经数日观测的合成，其大弯曲并不比日本南方黑潮的大弯曲逊色。两者另外一个相似的特点是，湾流在佛罗里达州的基伟斯特至哈特勒斯角之间的一段，与黑潮在东海的一段(即东海黑潮)类似，流轴相对稳定，较少弯曲。

黑潮与湾流的其他相似特点还很多，但是黑潮的大弯曲却有一点与湾流大不相同。这就是，经过长期研究后人们发现，黑潮的流轴大体上呈两种状态：在 138°E 附近发生或不发生大弯曲，而两种状态都可保持数年相对稳定；然而进入 80 年代以来，其交替周

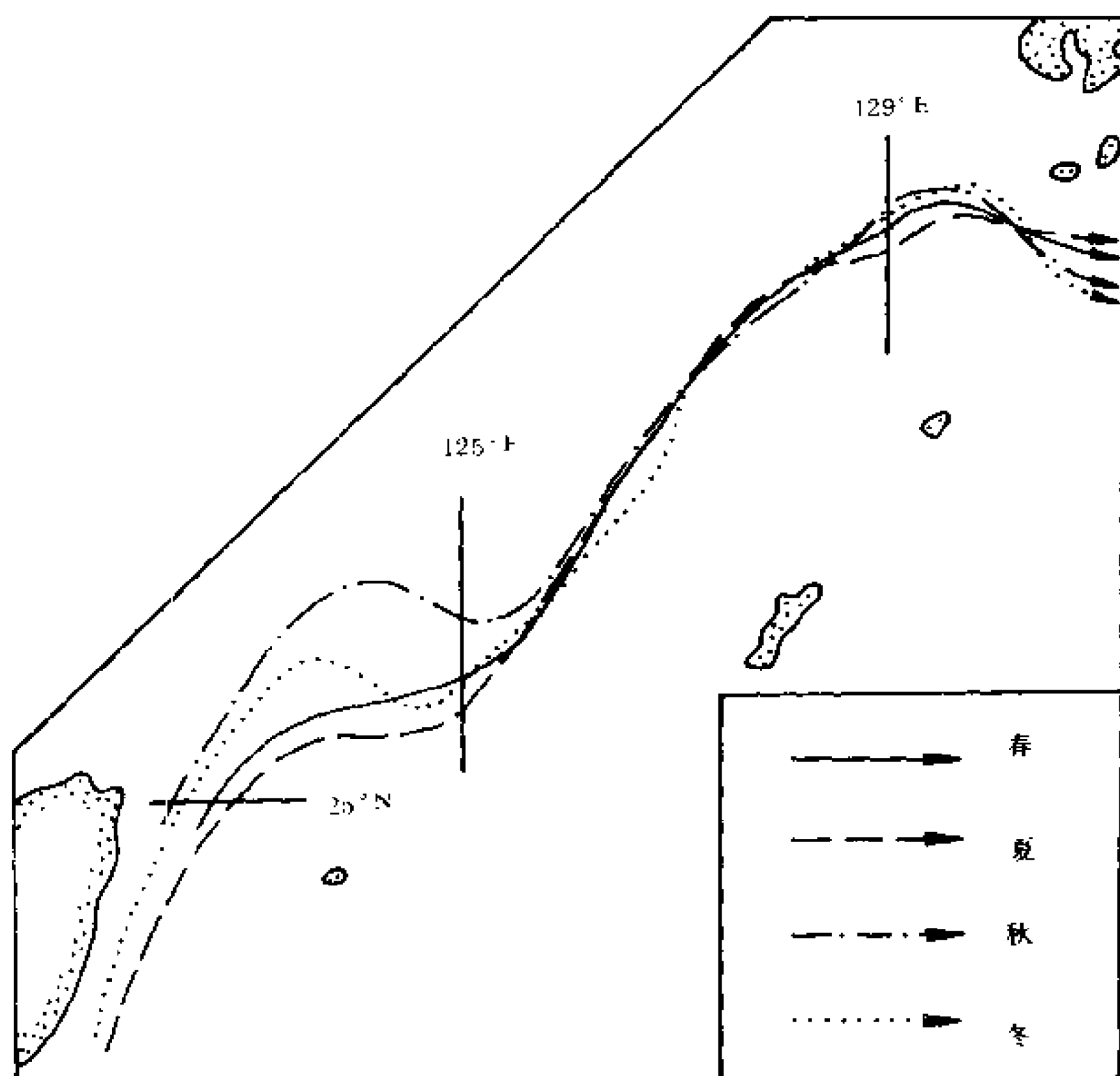


图 3—20 东海黑潮表层流轴的变化

(据孙湘平,1987)

期似已显著变短(表 3—3)。

表 3—3　黑潮 7 次大弯曲简况(据孙湘平,1990)

次数	出现时间	形成期	强盛期	消衰期	持续时间	间隔时间
1	1934,3～1944,3		1934,8～1943,8	1943,9～1944,3	120 个月	
2	1953,7～1955,12	1953,1～7	1953,7～1955,4	1955,5～12	30 个月	9 年
3	1959,5～1963,6	1959,1～5	1959,6～1963,1	1963,2～6	49 个月	4 年
4	1975,8～1980,8	1975,4～8	1975,10～1979,12	1980,1～8	60 个月	12 年
5	1981,11～1984,8	1981,7～11	1981,12～1984,3	1984,4～8	34 个月	1 年
6	1986,12～1988,10	1986,7～12	1987,1～1988,5	1988,6～10	22 个月	2 年
7	1989,12～	1989,7～12	1989,12～			1 年

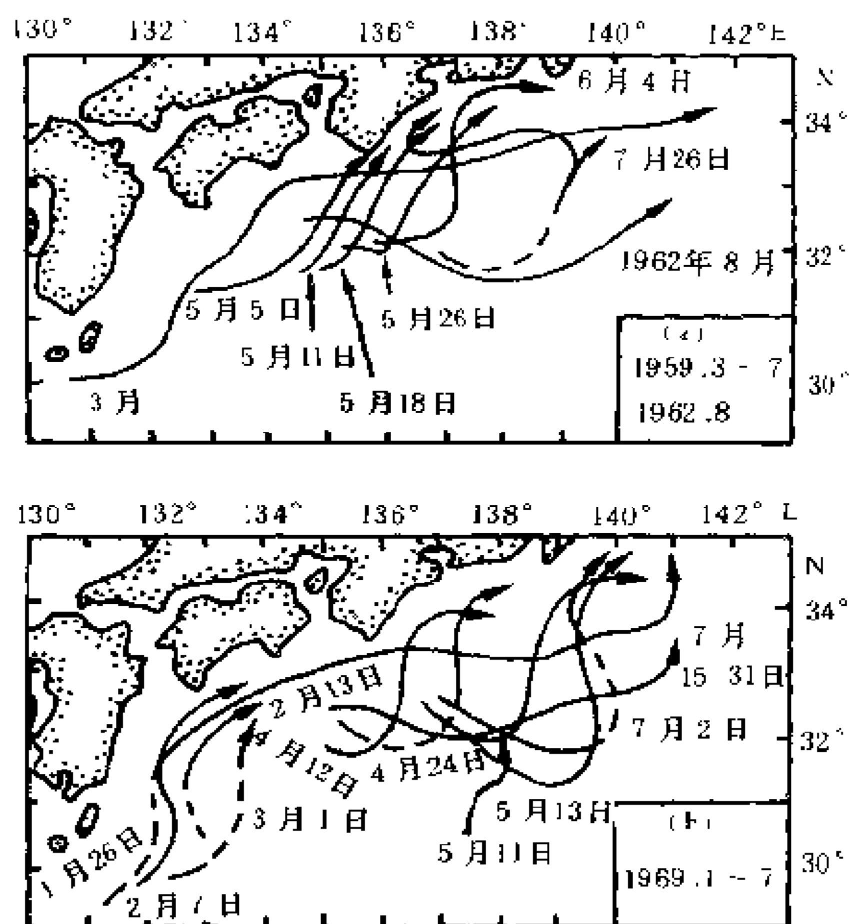


图 3－21　日本南方黑潮流轴的弯曲

(据吉田,1961;庄司,1972;川合,1970 等)

大弯曲发生时,日本南方的黑潮流径呈“U”或“V”字型,绕过

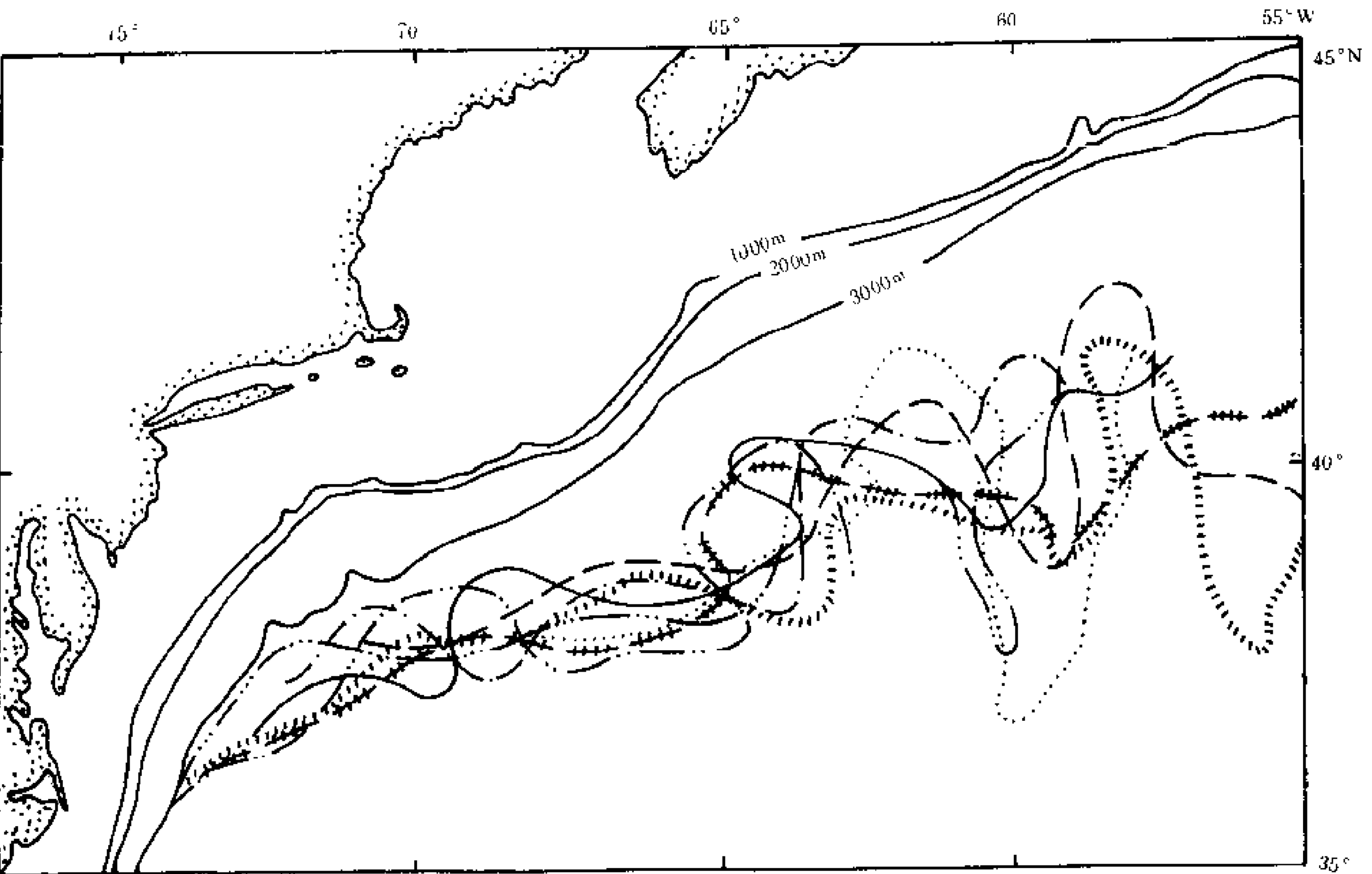


图 3—22　湾流的大弯曲(据 Knauss, 1969, 改绘)

靠近本洲南岸的大型冷水团。图 2—23 给出了不发生弯曲的流径(N 型)以及大弯曲的 4 种基本类型。由于大弯曲都伴随形成日本南方的大型冷水团，故对这一带海域的影响是很大的。广而言之，大弯曲从形成、强盛到消衰、平息，这一系列过程，对整个黑潮水系及临近海域的海况和气候状况，都有不可忽视的影响。

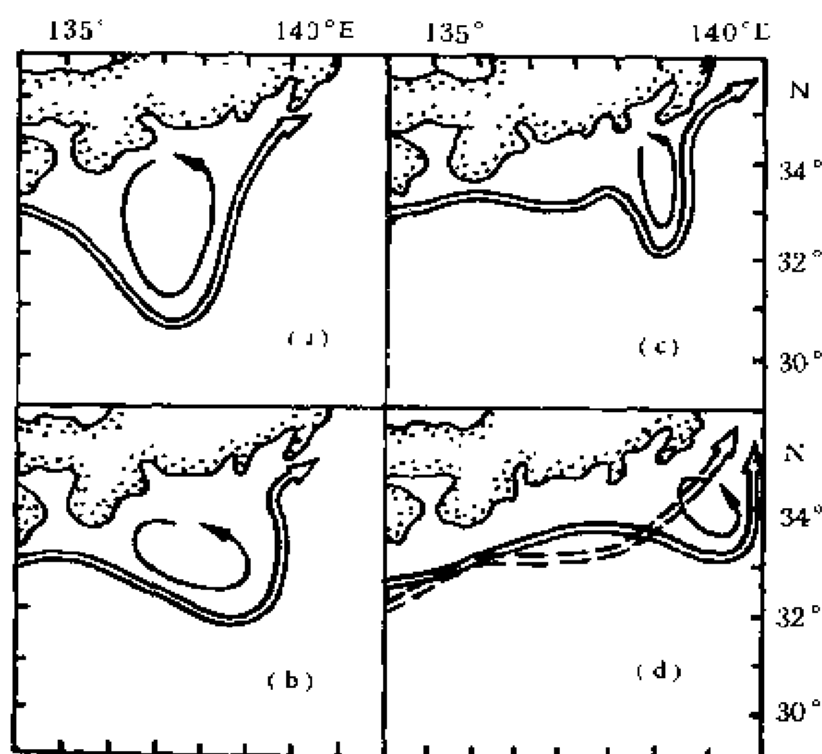


图 3—23 黑潮大弯曲的基本类型

(a)A 型；(b)B 型；(c)C 型；(d)D 型(实线)和 N 型(虚线)

(据孙湘平，1989，改绘)

流轴的大弯曲看来也不仅仅是西边界流的“特产”，莫宁等(Бурков，Монин，1974)曾指出，克伦威尔海流因具有振幅较小而波长较大的波浪型变化，也会形成大弯曲。苏联调查船“库尔恰托夫院士”号，1974 年 7～9 月对罗蒙诺索夫海流的调查，也发现它有大弯曲。南极绕极流的波状变化更早已为人们所注意，并且研究了它和海底地形变化的关系。除了探讨底形影响之外，也有人从稳定

度理论或科氏参数随纬度的变化等方面进行分析。Warren(1963)把海底地形与地转效应结合起来,计算了湾流路径的变化,与观测资料相当吻合。关于黑潮的大弯曲,也进行了理论和数值的研究(Hughes,1989;Yoshihiko S.,1990)。

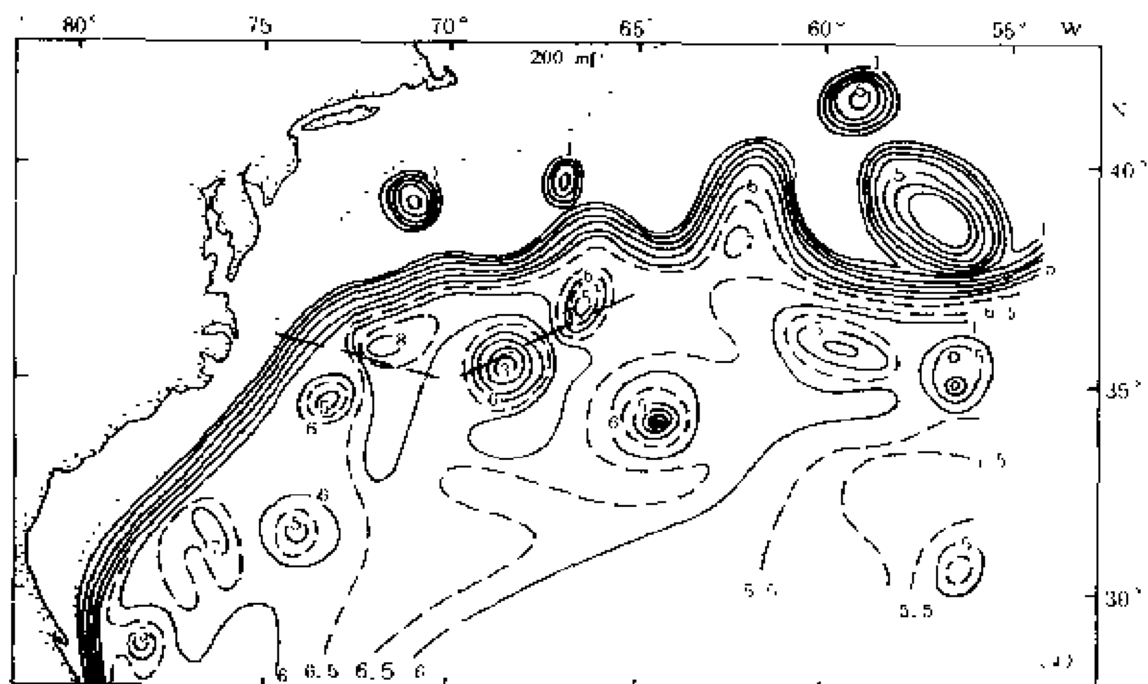
3.5.2 中尺度涡

从气候式的大洋环流图上看,大洋中部是海流很弱的海域,而关于深层,如前已述,早期传统的看法也认为海流更弱,甚至完全可以忽略。但是在使用中性浮子实测以后,不仅证实了北大西洋西边界的深层有超过 0.1m/s 的海流,而且在外洋的深层也测得接近 0.1m/s 量级的流速。由测量结果看,其流向随时间和位置的不同而变化,于是人们推测,可能有中等时间和空间尺度的涡旋存在于大洋之中。为了确认中尺度涡的存在,苏联率先在 1970 年进行了多边形实验(ПОЛИГОН—70),美国也进行了中大洋动力学实验(MODE, Mid — Ocean Dynamic Experiment, 1971; DODE Group, 1978)。与海上观测配合,还进行了理论研究,终于确认了中尺度涡的存在,并提出了某些理论解释。

中尺度涡(*meso scale eddy*),也有人称为天气尺度涡(*synoptic scale eddy*),即着眼于其空间尺度或时间尺度的特点而称之。关于中尺度涡的分类则不甚统一,有人分 2 类:锋区中尺度涡和外海中尺度涡;也有人分 3 类:西边界流环、中大洋中尺度涡以及流环式中尺度涡。下面依前者作一简略介绍。

1. 锋区中尺度涡

即源于西边界流的流环,它与强西边界流——湾流和黑潮的大弯曲有关。如图 3—22,湾流在离开哈特勒斯角之后,流轴振动愈演愈烈,到达 60°W 以东时,南北方向的振幅可达 500km 以上。当弯曲到很大程度时形成一些大的洄路,在洄路被切断时,旋转的水体就会脱离主流而形成涡旋。这类涡旋的流线近似呈圆形,故称



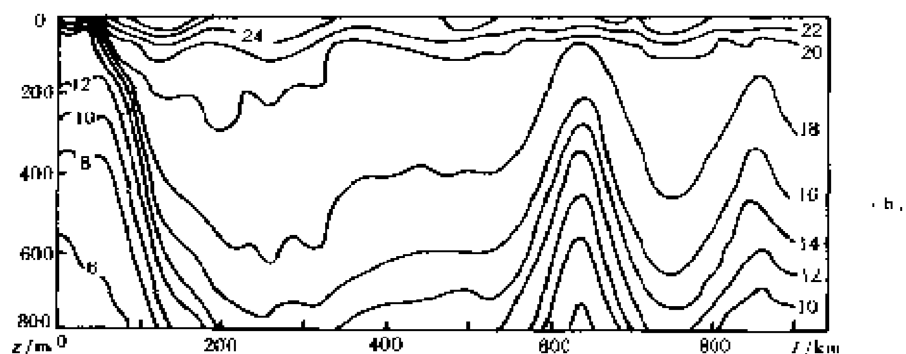


图 3—24 湾流两侧的流环

(a)15℃等温面的深度($z/10^2$m)分布;

(b)水温断面(位置见图 a 中的点虚线)

(据吉尔 A.E.,1988,改绘)

为流环。其直径约(100～300)km,表层旋转速度高达(0.9～1.5)

m/s，随深度增大，流速虽有减小，但到(400～500)m层，仍可高达0.5m/s。图3—24a为1975年3月16日～7月9日期间，湾流两侧即将形成和业已脱离主流的流环。主流方向之右形成气旋式流环，流环是封闭的冷核心，其中滞留着来自陆坡海域的冷水，并可保持一段时间(中等时间尺度)。主流之左是反气旋式旋转，流环有暖核心，其中滞留着来自湾流的暖水。冷、暖流环还有如下一些共同特点：

(1)流环内、外的温度和盐度差别明显，符合内同性与外异性，从而能在海洋表面显现出来。故有人说它有"水团特征"，但其水平尺度不够大，还不能划为独立的水团，可以认为它们是从冷、暖水团中分离出来的"游离水块"。

(2)同一流环内水质点的旋转方向不随深度而变(图3—24b)，其影响可深达2～5km。

(3)它们是单个系统，各有自己的生命史，但寿命都较长，有的可达2～3年。图3—25为湾流右侧一个气旋式流环近2年时间的移动情况。

黑潮两侧也能形成冷涡和暖涡，虽然观测不如湾流细致，但也见诸报道(Masuzawa，1957；邢成军，1983)。

2. 外海中尺度涡

其形成与强西边界流无关，亦即在大洋中的其他海域不时可见，即使一向认为流动很弱的中大洋也不例外。如多边形实验和中大洋动力学实验都发现了多个涡旋，有气旋式也有反气旋式，常常是相间排列而运动。涡旋中的流速也较大，有的可高达0.5m/s。涡旋铅直向下的伸展，可及整个水柱。这类涡旋的水平尺度一般为100km左右，与源于西边界流的流环相比，还有一点明显不同，即它不具有"水团"的特征。

在北大西洋冷水区形成的流环式中尺度涡，其速度较小，只有锋区中尺度涡旋的一半左右，但范围较大，约为锋区涡旋的2倍。

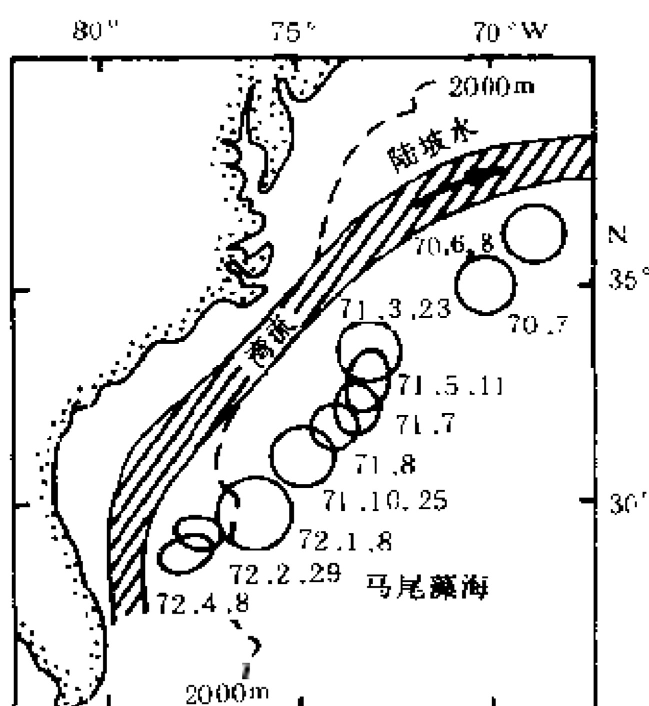


图 3-25　湾流右侧一个气旋式流环 1970 年 6 月～1972 年 4 月的移动情况
环形线为对应时间 500m 层 15℃ 等温线的概位
(据 Richardson *et al*.,1973)

不仅在大西洋，而且在太平洋和印度洋中也陆续发现中尺度涡，例如在东澳大利亚海流区域(Hamon,1965)，夏威夷群岛附近海域(Bernstein 等,1974)，黑潮南部(Imawaki,1983)以及在印度洋的"多边形—67"考察等等。这类中尺度涡具有很大的动能，有时比大尺度海流的平均动能还大，因此对海洋动力学、海洋热力学、海洋环流和水团的影响极大(Imawaki 等,1982)。

正因为其重要，许多学者在这方面作了大量的研究，有兴趣的读者可参阅 Wunsch(1981)的综述或 Robinson(1983)主编的专集。

第四章　海水运动基本方程

海洋中的海水时刻不停地处于运动之中。海水运动一方面受动力因素的影响，另一方面受温度、盐度等热力学因子的影响。一般来说，人们可用速度场 u，v 和 w，压力场 p，密度场 ρ，温度场 θ 和盐度场 s 来描述运动和变化着的海洋。这七种场通常是时间和空间的函数。海水，或者包含在海水中的物质或热量的运动和变化总是遵循一定的物理定律的，依据这些物理定律，人们可以用上述七种场来建立一套描述海水运动和变化规律的完全基本方程（动力—热力学基本方程）。为了求解这套基本方程，还必须确定定解条件。有时候，当人们研究海水运动的某些特殊运动形式时，往往作出一些近似和假定，忽略一些因素的作用，其结果并不影响反映研究对象的主要特征。例如，当人们研究海浪、潮汐或者风暴潮时，将海水看成是均质流体，即视海水的密度、温度和盐度为常量。这些近似和假定实际上简化了基本方程，方便了基本方程的求解。但是，在做出这些近似和假定之前，人们必须找到如此做的依据，保证在这些近似和假定之下的研究结果具有实际意义。

本章将较系统的讨论上述几方面的问题。

§4.1　海水动力学和热力学基本方程

4.1.1　运动方程

任何运动都是相对于确定参照系的运动，而人们研究的任何形式的海水运动又都是与地球自转相连系的。因此，如果选取固定

在地球上与地球一起旋转的非惯性坐标系，则单位质量海水相对于该坐标系的加速度为

$$\frac{dV}{dt} = G + F_T - \frac{1}{\rho}\nabla p + F - 2\omega \times V - \omega \times (\omega \times r), \tag{4.1-1}$$

其中 G 为单位质量海水所受的地心引力，F_T 为单位质量海水所受的天体（主要是月球和太阳）的引潮力，$-\frac{1}{\rho}\nabla p$ 为压强梯度力，F 为摩擦力，最后两项为惯性力：$-2\omega\times V$ 为 Coriolis 力，$-\omega\times(\omega\times r)$ 为惯性离心力。下面首先对上述各种力作简要说明和讨论，然后依（4.1—1）式写出球坐标系和直角坐标系中的运动方程。

1. 重力

习惯上，人们将单位质量海水所受的地心引力 G 和惯性离心力 $-\omega\times(\omega\times r)$ 的合力称之为重力加速度 g，即

$$g = G - \omega \times (\omega \times r)。 \tag{4.1-2}$$

设 z 为从静止海面起算沿重力加速度方向向下的距离，则重力加速度的大小可用一个相当精确的近似式表示

$$g = (9.80616 - 0.025928\cos 2\varphi + 0.00069\cos^2 2\varphi - 0.000003086z)\mathrm{m/s^2},$$

其中 φ 为地理纬度。据此式计算，赤道和极地的海面重力加速度大小之差仅约为 0.052m/s²，而在 $\varphi=45°$ 处，海面与 10000m 深处的重力加速度大小之差仅约为 0.031m/s²。因此，在海洋研究中，不同纬度或不同深度处的重力加速大小可视为常量，一般取为 9.80m/s²。

2. 天体引潮力

天体引潮力 F_T 主要包括月球引潮力 F_M 和太阳引潮力 F_S，而其它天体引潮力或因其质量太小或因其距地球太远而可以忽略不计。因此有

$$F_T = F_M + F_S。 \tag{4.1-3}$$

首先讨论月球引潮力。在地月系统中，地球和月球绕地月公共质心运动，若暂不考虑地球自转运动，则当它们绕其公共质心运动一周之后，地球中心在空间的轨迹近似为一个以地月公共质心为中心、以地心到公共质心的距离为半径的圆。由于地球绕地月公共质心的运动为平动(因暂不考虑地转)，因此地球上任意一点像地心一样，也在空间留下一个大小相同的圆形轨迹。设 ω_0 为地心绕地月公共质心作圆运动的角速率，a_0 为圆半径，则对以地球作为参照系的观察者来说，地球上每一地点单位质量均受一个大小和方向相同的惯性离心力，其大小为 $N=\omega_0^2a_0$，其方向为背离月球的方向。如图 4—1 所示，设 D 表示地心到月心的距离，$\frac{\mathbf{D}}{D}$ 为月心指向地心的方向，L 表示地球上任意点 X 到月心的距离，$\frac{\mathbf{L}}{L}$ 为月心指向 X 点的方向，O 为地心，M 为月心(也表示月球质量)，r 为地心到 X 点的距离，θ 为月球天顶距。在地心处，单位质量所受月球的引力为 $\mathbf{K}(O)=-\frac{\mu_0 M}{D^2}\frac{\mathbf{D}}{D}$，所受的惯性离心力 $\mathbf{N}=\omega_0^2a_0\frac{\mathbf{D}}{D}$，两者的合力应为零

$$\mathbf{N}+\mathbf{K}(O)=\omega_0^2a_0\frac{\mathbf{D}}{D}-\frac{\mu_0 M}{D^2}\frac{\mathbf{D}}{D}=0, \qquad (4.1—4)$$

其中 μ_0 为引力常数。由于地球上任意一点 X 所受的月球引力为 $\mathbf{K}(X)=-\frac{\mu_0 M}{L}\frac{\mathbf{L}}{L}$，它与惯性离心力的合力为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_M=\mathbf{K}(X)+\mathbf{N}&=-\frac{\mu_0 M}{L^2}\frac{\mathbf{L}}{L}+\omega_0^2a_0\frac{\mathbf{D}}{D}\\&=-\frac{\mu_0 M}{L^2}\frac{\mathbf{L}}{L}+\frac{\mu_0 M}{D^2}\frac{\mathbf{D}}{D},\end{aligned} \qquad (4.1—5)$$

称之为月球引潮力。(4.1—5)式表明，地球上任意一点 X 处的物体在月球引潮力作用之下做相对于地心的运动。

另外，(4.1—5)式中 X 点单位质量所受的月球引力 $\mathbf{K}(X)$ 的势为

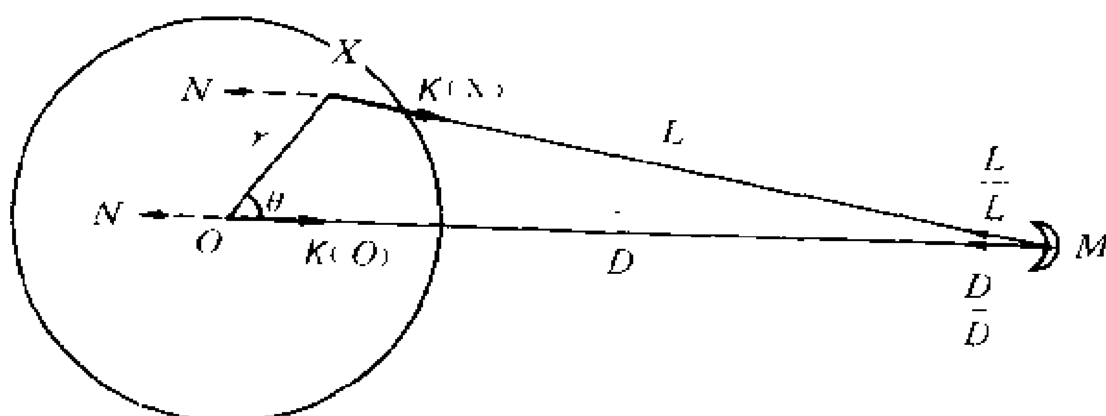


图 4—1 地球上任意一点 X 处和地心 O 处所受的月球引力和惯性离心力
月球引潮力为该两力之合力

$$\varphi_1 = -\int_{\infty}^{L} \mathbf{K}(\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{L} = \int_{\infty}^{L} \frac{\mu_0 M}{L^2} \frac{\mathbf{L}}{L} \cdot d\mathbf{L} = -\frac{\mu_0 M}{L},$$

而 X 点所受惯性离心力的势

$$\varphi_2 = -\int_{0}^{r} \mathbf{N} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{0}^{r} \frac{\mu_0 M}{D^2} \frac{\mathbf{D}}{D} \cdot d\mathbf{r} = \frac{\mu_0 M}{D^2} r\cos\theta。$$

于是 X 点月球引潮力 F_M 的势为

$$\Omega_M = \varphi_1 + \varphi_2 = -\frac{\mu_0 M}{L} + \frac{\mu_0 M}{D^2} r\cos\theta。$$

可选取地心处的势为零，为此在上式中加上$\frac{\mu_0 M}{D}$，于是月球引潮势可表为

$$\Omega_M = -\mu_0 M\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{D} - \frac{r}{D^2}\cos\theta\right)。\qquad (4.1—6)$$

如果将(4.1—6)式中的月球质量 M 换成太阳的质量 S，地月之间的距离 D 换成地日之间的距离 D_1，X 点到月心的距离 L 换成 X 点到日心的距离 L_1，X 点的月球天顶距 θ 换成 X 点的太阳天顶距 θ_1，便得地日系统中的太阳引潮势

$$\Omega_S = -\mu_0 S\left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{D_1} - \frac{r}{D_1^2}\cos\theta_1\right)。\qquad (4.1—7)$$

天体引潮力 F_T 的势为(4.1—6)式与(4.1—7)式之和，即天体引潮势表达式为

$$\Omega = \Omega_M + \Omega_S$$
$$= -\mu_0 M\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{D} - \frac{r}{D^2}\cos\theta\right) - \mu_0 S\left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{D_1} - \frac{r}{D_1^2}\cos\theta_1\right)。 \tag{4.1—8}$$

由此，天体引潮力可表为

$$F_T = -\nabla\Omega。 \tag{4.1—9}$$

用天体引潮势的梯度来表示天体引潮力，这是研究海洋潮波的基本方程中强追力项的一种传统表达形式。在球坐标系统中，(4.1—9)式可写成

$$F_T = -\left(\frac{\partial}{r\cos\varphi\partial\lambda}\hat{\lambda} + \frac{\partial}{r\partial\varphi}\hat{\varphi} + \frac{\partial}{\partial r}\hat{r}\right)\Omega, \tag{4.1—10}$$

其中 λ 表示地理经度，φ 表示地理纬度，r 表示到地心的距离，$\hat{\lambda}$，$\hat{\varphi}$ 和 $\hat{r}$ 为单位向量，分别指向东，向北和向上为正。如果研究的范围不大，可用直角坐标系，相应地(4.1—9)式可表为

$$F_T = -\left(\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right)\Omega, \tag{4.1—11}$$

其中 x，y 和 z 轴的方向通常分别取为向东、向北和向上为正。

3. 压强梯度力

压强 p 由两部分构成

$$p = p_a(x, y, \zeta, t) + p_w(x, y, z, t), \tag{4.1—12}$$

其中 p_a 为海面大气压强，p_w 为海水中任意点(x, y, z)处的与海水本身结构和运动有关的压强，ζ 为海面相对于静止水面所受的扰动。海面大气压强 p_a 往往取的常量；对于水平运动范围远大于垂直运动范围的运动，其垂直加速度可以忽略，此时的 P_w 仅由任意点处的海水水柱的重量所决定。一般情况下，p_a 和 p_w 的具体形式有待

确定。当 p_a 和 p_v 确定后压强梯度力也便确定了。

4. 摩擦力

如果海水运动处于层流状态，则运动受海水分子粘滞性的影响。通常近似地认为海水是不可压缩的，因此，分子粘滞性摩擦力的合力在球坐标中的三个分量为

$$\left.\begin{aligned}
F_\lambda &= \frac{\mu}{\rho}\left(\triangle u - \frac{u}{r^2\cos^2\varphi} - \frac{2\tan\varphi}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} + \frac{2}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right),\\
F_\varphi &= \frac{\mu}{\rho}\left(\triangle v - \frac{v}{r^2\cos^2\varphi} - \frac{2\tan\varphi}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right),\\
F_r &= \frac{\mu}{\rho}\left(\triangle w - \frac{2}{r^2}w + \frac{2\tan\varphi}{r^2}v - \frac{2}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right),
\end{aligned}\right\}\quad(4.1\text{—}13)$$

其中 μ 为海水粘度(动力粘度)，u, v, w 分别为 λ, φ 和 r 方向的速度分量，$\triangle$ 为球坐标系中的拉普拉斯算子，形为

$$\triangle = \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial\left(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)}{\partial r}。$$

在直角坐标系中，分子粘性摩擦力的合力为

$$\left.\begin{aligned}
F_x &= \frac{\mu}{\rho}\triangle u,\\
F_y &= \frac{\mu}{\rho}\triangle v,\\
F_z &= \frac{\mu}{\rho}\triangle w,
\end{aligned}\right\}\quad(4.1\text{—}14)$$

其中 $\triangle$ 为直角坐标系中的拉普拉斯算子，形如

$$\triangle = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}。$$

(4.1—14)式和(4.1—15)式中的海水粘度 μ 与海水的热运动状态有关，随着温度的增加而减小。$\frac{\mu}{\rho} = \nu$，称为海水运动粘度。表 4—

1 列出了不同温度情况下水的 μ 和 ν 值。

表 4－1　水的粘度

$\theta/°C$	$\rho/kg\cdot m^{-3}$	$\mu/pa\cdot s$	$\nu/m^2\cdot s^{-1}$
0	0.999×10^3	1.787×10^{-3}	1.787×10^{-6}
10	0.999×10^3	1.304×10^{-3}	1.304×10^{-6}
20	0.998×10^3	1.002×10^{-3}	1.004×10^{-6}

5. Coriolis 力

地球自转角速度 ω 在 λ,φ 和 r 方向的分量为 $\omega_\lambda=0,\omega_\varphi=\omega\cos\varphi,\omega_r=\omega\sin\varphi$。于是 Coriolis 力可表为

$$-2\omega\times V=(2\omega\sin\varphi v-2\omega\cos\varphi w)\hat{\lambda}+(-2\omega\sin\varphi u)\hat{\varphi}+(2\omega\cos\varphi u)\hat{r}。\qquad(4.1—15)$$

在直角坐标系中，若 x 轴指向东为正，y 轴指向北为正，z 轴指向上为正，则地球自转角速度 ω 的三个分量分别为 $\omega_x=0,\omega_y=\omega\cos\varphi,\omega_z=\omega\sin\varphi$，于是 Coriolis 力可写成

$$-2\omega\times V=(2\omega\sin\varphi v-2\omega\cos\varphi w)\boldsymbol{i}+(-2\omega\sin\varphi u)\boldsymbol{j}+(2\omega\cos\varphi u)\boldsymbol{k}\qquad(4.1—16)$$

6. 海水质点加速度

在球坐标系中，海水质点加速度 $\frac{dV}{dt}$ 在 λ,φ 和 r 方向的三个分量为

$$\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt}&=\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}-\frac{uv}{r}\tan\varphi+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+\frac{wu}{r}+w\frac{\partial u}{\partial r},\\
\frac{dv}{dt}&=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\lambda}+\frac{u^2}{r}\tan\varphi+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+\frac{wv}{r}+w\frac{\partial v}{\partial r},\\
\frac{dw}{dt}&=\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial w}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+w\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{u^2+v^2}{r}。
\end{aligned}\right\}\qquad(4.1—17)$$

在直角坐标系中，海水质点加速度 $\frac{dV}{dt}$ 在 x,y 和 z 方向的分量形如

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z},\\
\frac{dv}{dt} &= \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z},\\
\frac{dw}{dt} &= \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z}。
\end{aligned}\right\} \qquad (4.1\text{—}18)
$$

最后，根据以上讨论，(4.1—1)式可表为如下的分量形式：

在球坐标系中

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi} + w\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{uv}{r}\tan\varphi + \frac{uw}{r}\\
&= 2\omega\sin\varphi v - 2\omega\cos\varphi w - \frac{1}{\rho r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial\lambda} - \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}\\
&+ \frac{\mu}{\rho}\left(\triangle u - \frac{u}{r^2\cos^2\varphi} - \frac{2\tan\varphi}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} + \frac{2}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial w}{\partial\lambda}\right),\\
&\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi} + w\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{u^2}{r}\tan\varphi + \frac{vw}{r}\\
&= -2\omega\sin\varphi u - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}\\
&+ \frac{\mu}{\rho}\left(\triangle v - \frac{v}{r^2\cos^2\varphi} + \frac{2\tan\varphi}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right),\\
&\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial w}{\partial\lambda} + \frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi} + w\frac{\partial w}{\partial r} - \frac{u^2+v^2}{r}\\
&= 2\omega\cos\varphi u - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial\Omega}{\partial r} - g\\
&+ \frac{\mu}{\rho}\left(\triangle w - \frac{2}{r^2}w + \frac{2\tan\varphi}{r^2}v - \frac{2}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)。
\end{aligned}\right\}
$$

(4.1—19)

在 x 轴指向东为正，z 轴指向上为正的右手直角坐标系中

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\\
&=2\omega\sin\varphi v-2\omega\cos\varphi w-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\frac{\mu}{\rho}\triangle u,\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\\
&=-2\omega\sin\varphi u-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial\Omega}{\partial y}+\frac{\mu}{\rho}\triangle v,\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\\
&=2\omega\cos\varphi u-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial z}-g+\frac{\mu}{\rho}\triangle w。
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.1—20}
$$

(4.1—19)和(4.1—20)式分别为球坐标系和直角坐标系(z轴向上)中的层流海水运动方程。

4.1.2 连续方程

海水在运动过程中，其质量场随之重新分布。但是这种因运动引起的质量分布的变化，必须遵守质量守恒基本法则，即海水在运动过程中其总量既不会自动产生，也不会自动消失。对于流场中任意选定的固定几何空间来说，单位时间内在该空间流体质量的增加量必然等于同一时间内通过该空间的边界流入其内部的流体量。若取一由闭合曲面σ所围成的固定几何空间，其体积为τ。在单位时间内所取空间内海水质量的增加量为

$$\iiint_{\tau}\frac{\partial\rho}{\partial t}d\tau,$$

而于同一单位时间内通过闭合曲面σ进入所取固定空间的海水质量为

$$-\iint_{\sigma}\rho V_n d\sigma,$$

其中V_n为沿σ曲面外法线方向上的海水质点速度分量。根据质量守恒原理，应有

$$\iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau = -\iint_\sigma \rho V_n d\sigma,$$

对上式应用曲面积分的高斯公式可得

$$-\iiint_\tau \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau + \iiint_\tau \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) d\tau = 0。$$

由于所取空间τ的大小和形状是任意的，因此有

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{V}) = 0, \qquad (4.1-21)$$

进一步可写成

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \boldsymbol{V} = 0。 \qquad (4.1-22)$$

(4.1—21)式或(4.1—22)式称之为质量连续方程。质量连续方程在球坐标和直角坐标系中的形式分别为

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial (v\cos\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 w)}{\partial r}\right) = 0$$

$$(4.1-23)$$

和

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0。 \qquad (4.1-24)$$

由于海水的压缩性微小，因此在研究海水运动时，常常可以认为海水是不可压缩的，即流体微团在运动过程中，其形状可以发生变化，但其体积从而所含海水密度不应发生变化。不可压缩性可描述为

$$\frac{d\rho}{dt} = 0。$$

因此，质量连续方程(4.1—23)式和(4.1—24)式变成体积连续方程，即

$$\nabla \cdot V = \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial(v\cos\varphi)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 w)}{\partial r} = 0$$

(4.1—25)

和

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0。\qquad (4.1—26)$$

4.1.3 盐量扩散方程

溶于海水中的盐量在海水运动过程中既不会产生也不会消失。对于海水中选定的固定空间，单位时间内在该空间的盐量增加量应等于两部分之和：一是通过该空间表面随流动进入空间内部的盐量，另一是由于盐分子的不规则运动（如果海水处于层流状态）而进入该空间的盐量。因为盐度的浓度分布是不均匀的，所选定的空间内部的盐浓度与其外部的盐浓度是不同的，因此，高浓度的一边必然向低浓度的一边运动。这种现象叫扩散，其结果是减少两边的盐浓度的差别。若取一封闭曲面 σ 所围成的空间，其体积为 τ。在单位时间内所取体积内的盐量增加为

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho s}{\partial t} d\tau,$$

其中 s 为单位质量海水所含的盐量（近似等于盐度）。由于海水流动，在同一单位时间内经曲面 σ 进入所取空间的盐量为

$$-\iint_{\sigma} \rho s V_n d\sigma,$$

V_n 为沿曲面 σ 的外法线方向的流速分量。另外，由于盐分子扩散在同一时间内进入所取空间的盐量为

$$-\iint_{\sigma} S_n d\sigma$$

S 为盐浓度通量密度，S_n 为其外法线方向的分量，表示由于分子不规则运动通过封闭曲面 σ 的单位面积所进入的盐量。根据盐量守

恒原理，可得如下关系

$$\iiint_{\tau} \frac{\partial \rho s}{\partial t} d\tau = -\iint_{\sigma} \rho s V_n d\sigma - \iint_{\sigma} S_n d\sigma,$$

进一步可变成

$$\iiint_{\tau} \left[\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \boldsymbol{V}) + \nabla \cdot \boldsymbol{S}\right] d\tau = 0。$$

由于所选空间的大小和形状的任意性，于是有

$$\frac{\partial \rho s}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho s \boldsymbol{V}) + \nabla \cdot \boldsymbol{S} = 0。\qquad (4.1—27)$$

利用质量连续方程(4.1—21)，上式结果变成

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla s = -\frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{S}。\qquad (4.1—28)$$

因为 $\boldsymbol{S}$ 可近似表示为盐量 s 的梯度，

$$\boldsymbol{S} = -k \nabla s,$$

其中 k 为比例系数，于是(4.1—28)式变成

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla s = \frac{k}{\rho} \Delta s。\qquad (4.1—29)$$

此式称之为盐量扩散方程，$\frac{k}{\rho} = k_D$ 是分子盐扩散系量，在 15℃时，$k_D = 1.1 \times 10^{-9} \mathrm{m}^2/\mathrm{s}$，$k_D \Delta s$ 称为分子盐通量。(4.1—29)式在球坐标系和直角坐标系中分别有如下形式

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \frac{u}{r\cos\varphi} \frac{\partial s}{\partial \lambda} + \frac{v}{r} \frac{\partial s}{\partial \varphi} + w \frac{\partial s}{\partial r}$$

$$= \frac{k}{\rho}\left(\frac{1}{r^2\cos^2\varphi} \frac{\partial^2 s}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2\cos\varphi} \frac{\partial\left(\cos\varphi \frac{\partial s}{\partial \varphi}\right)}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial\left(r^2 \frac{\partial s}{\partial r}\right)}{\partial r}\right),$$

(4.1—30)

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u \frac{\partial s}{\partial x} + v \frac{\partial s}{\partial y} + w \frac{\partial s}{\partial r} = \frac{k}{\rho}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\right)。\qquad (4.1—31)$$

4.1.4 热传导方程

于海水中取一任意封闭曲面 σ 所包围的体积为 τ 的空间，此空间单位时间内热量的增加量为(Krauss，1973)

$$\iiint\limits_{\tau}\frac{\partial\rho c_p\theta}{\partial t}d\tau,$$

其中 c_p 为比定压热容(在一定的压力下单位质量海水温度升高1K时所吸收的热量)，$\rho c_p\theta$ 为单位体积的热量。在相同的时间内，随流动通过所选取的封闭曲面 σ 进入空间 τ 的热量为

$$-\iint\limits_{\sigma}\rho c_p\theta V_n d\sigma,$$

而由分子运动产生的通过曲面 σ 的热量为

$$-\iint\limits_{\sigma}H_n d\sigma,$$

其中 H 为分子热通量密度，H_n 为 σ 外法线方向的分量。如果系统的总热量守恒，则有

$$\iiint\limits_{\tau}\frac{\partial\rho c_p\theta}{\partial t}d\tau=-\iint\limits_{\sigma}\rho c_p\theta V_n d\sigma-\iint\limits_{\sigma}H_n d\sigma,$$

进而有

$$\frac{\partial\rho c_p\theta}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho c_p\theta\boldsymbol{V})+\nabla\cdot\boldsymbol{H}=0。\qquad(4.1\text{—}32)$$

假定分子热通量仅依赖于温度梯度，方向指向温度减小的方向，即

$$\boldsymbol{H}=-\kappa\nabla\theta,$$

于是有

$$\frac{\partial\rho c_p\theta}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho c_p\theta\boldsymbol{V})=\kappa\nabla\theta。\qquad(4.1\text{—}33)$$

进一步设 c_p 为一常数，将质量连续方程(4.1—21)乘上 θc_p，得

$$\theta c_p\left[\frac{\partial\rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho V)\right]=0. \tag{4.1—34}$$

由(4.1—33)式减去(4.1—34)式，最后得

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+V\cdot\nabla\theta=k_\theta\triangle\theta, \tag{4.1—35}$$

该方程叫做热传导方程。其中 $k_\theta=\frac{\kappa}{\rho c_p}$ 是分子热传导系量，$k_\theta\approx1.4\times10^{-7}\mathrm{m^2/s}$。$k_\theta\triangle\theta$ 称为分子热传导通量。(4.1—34)式在球坐标系和直角坐标系中的形式分别为

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}+w\frac{\partial\theta}{\partial r}$$

$$=k_\theta\left(\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2\theta}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial\left(\cos\varphi\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}\right)}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left(r^2\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)}{\partial r}\right), \tag{4.1—36}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}+w\frac{\partial\theta}{\partial z}=k_\theta\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)。 \tag{4.1—37}$$

4.1.5 热膨胀方程

海水状态方程是表示海水密度、温度、盐度和压强之间关系的方程式

$$F(\rho,\theta,s,p)=0, \tag{4.1—38}$$

通常以 θ、s 和 p 来表示密度，即

$$\rho=\rho(s,\theta,p)。 \tag{4.1—39}$$

$\rho(s,\theta,p)$ 有许多不同的表达形式，可参看§1.6。从下一章开始的讨论中，在应用海水状态方程时，为了使问题简化，往往忽略与压强 p 有关的项，并且在盐度 s 变化不大的情况下(比如在大

洋）忽略盐度对密度的影响，而仅仅考虑温度 θ 对密度的作用。此种前提下，海水状态方程可用如下形式的方程代替

$$\rho = \rho_0(1-K\theta), \tag{4.1—40}$$

该方程叫做热膨胀方程，其中 ρ_0 为 0°C 时的海水密度，K 为海水热膨胀系量。

4.1.6 海水层流运动基本方程组

前面我们应用物理定律建立了运动方程，连续方程，盐量扩散方程，热传导方程和状态方程。这七个方程包含着七个变量 u,v,w,p,s,θ 和 ρ，因此构成了一套闭合方程组。再利用定解条件，便可以确定这七个变量的时间和空间分布。为了清楚起见，将闭合方程组按不同坐标系分列于下。

（1）直角坐标系中的闭合方程组：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - 2\omega\sin\varphi v + 2\omega\cos\varphi w = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial \Omega}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho}\triangle u, \tag{4.1—41}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + 2\omega\sin\varphi u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \Omega}{\partial y} + \frac{\mu}{\rho}\triangle v, \tag{4.1—42}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} - 2\omega\cos\varphi u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial \Omega}{\partial z} - g + \frac{\mu}{\rho}\triangle w, \tag{4.1—43}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{4.1—44}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial y}+w\frac{\partial s}{\partial z}=k_{D}\triangle s, \qquad (4.1—45)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t}+u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}+w\frac{\partial \theta}{\partial z}=k_{\theta}\triangle \theta, \qquad (4.1—46)$$

$$\rho=\rho(s,\theta,p)。 \qquad (4.1—47)$$

其中$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}$，直角坐标系的坐标原点位于静止海面，$x$轴指向东为正，$y$轴指向北为正，$z$轴指向上为正。

(2)球坐标系中的闭合方程组：

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial \lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}+w\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{uv}{r}\tan\varphi+\frac{uw}{r}$$

$$-2\omega\sin\varphi v+2\omega\cos\varphi w=-\frac{1}{\rho r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial \lambda}-\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial \Omega}{\partial \lambda}$$

$$+\frac{\mu}{\rho}\left(\triangle u-\frac{u}{r^2\cos^2\varphi}-\frac{2\tan\varphi}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial \lambda}+\frac{2}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial w}{\partial \lambda}\right),$$

(4.1—48)

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial \lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi}+w\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{u^2}{r}\tan\varphi+\frac{vw}{r}$$

$$+2\omega\sin\varphi u=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial \varphi}+\frac{\mu}{\rho}\left(\triangle v\right.$$

$$\left.-\frac{v}{r^2\cos^2\varphi}+\frac{2\tan\varphi}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial \lambda}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right), \qquad (4.1—49)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial w}{\partial \lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial \varphi}+w\frac{\partial w}{\partial r}-\frac{u^2+v^2}{r}$$

$$-2\omega\cos\varphi u = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial\Omega}{\partial r} - g + \frac{\mu}{\rho}(\triangle w$$

$$-\frac{2}{r^2}w + \frac{2\tan\varphi}{r^2}v - \frac{2}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}), \quad (4.1\text{—}50)$$

$$\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda} + \frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial(v\cos\varphi)}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 w)}{\partial r} = 0, \quad (4.1\text{—}51)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial s}{\partial\lambda} + v\frac{1}{r}\frac{\partial s}{\partial\varphi} + w\frac{\partial s}{\partial r} = k_D\triangle s, \quad (4.1\text{—}52)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + u\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial\lambda} + v\frac{1}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi} + w\frac{\partial\theta}{\partial r} = k_\theta\triangle\theta, \quad (4.1\text{—}53)$$

$$\rho = \rho(s, \theta, p)。 \quad (4.1\text{—}54)$$

其中

$$\triangle = \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2} + \frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial(\cos\varphi\frac{\partial}{\partial\varphi})}{\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2\frac{\partial}{\partial r})}{\partial r},$$

λ 为经度，φ 为纬度，r 为地心到任意点的距离。

§4.2 边界条件

前节在导出海水运动基本方程的过程中，认为变量 $u, v, w, p, \theta, s, \rho$ 都是空间和时间的连续函数。由于海洋是有界的，与大气、海底和海岸线之间存在着不连续面。即使是在海水内部，也存在着像密度跃层那样的显著不连续层，可以用不连续界面来表示。在这些界面上，基于连续性的海水运动基本方程不能应用，必须以边界条件来代替它们。

在海洋中，边界条件是十分重要的，因为所有影响海水运动的外力，除了重力、Coriolis 力和天体引潮力可以直接对海水内部每个质点作用外，其余的（比如大气压力，风应力）仅仅作用于海面，然后再通过海面将其影响传递到海水内部。海面的降水和蒸发也是通过海面对海水内部起作用。海底和海岸对海水运动的限制同样也是值得重视的，这种限制必然影响海水内部的运动。下面将讨论各种边界条件的具体形式。

4.2.1 运动学边界条件

在不连续面处，连续方程必须用运动学边界条件取代。取相对于地球固定的直角坐标系，随时间面运动的界面可表达为

$$F(x,y,z,t) = 0。\qquad (4.2\text{—}1)$$

设运动界面上的任意几何点(x,y,z)在t时刻的速度为$C=(C_x,C_y,C_z)$，经过dt时刻之后该几何点位于$(x+C_xdt,y+C_ydt,z+C_zdt)$，它仍然位于界面上，因而满足

$$F(x + C_xdt, y + C_ydt, z + C_zdt) = 0。\qquad (4.2\text{—}2)$$

上式可展成

$$F(x,y,z,t) + \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x}C_x + \frac{\partial F}{\partial y}C_y + \frac{\partial F}{\partial z}C_z\right)dt = 0$$

于是有

$$\frac{\partial F}{\partial t} + C_x\frac{\partial F}{\partial x} + C_y\frac{\partial F}{\partial y} + C_z\frac{\partial F}{\partial z} = 0,$$

或

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{C}\cdot\nabla F = 0。\qquad (4.2\text{—}3)$$

设界面上面和下面的流体速度分别为$\mathbf{V}_1$和$\mathbf{V}_2$。如果界面两边的流体不存在质量交换，则应满足

$$\mathbf{V}_1\cdot\mathbf{n} = \mathbf{V}_2\cdot\mathbf{n} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{n},\qquad (4.2\text{—}4)$$

其中$\mathbf{n}=\nabla F/|\nabla F|$为界面的法向单位向量。由(4.2—3)式可得

$$C \cdot n = -\frac{\partial F}{\partial t}/|\nabla F|,$$

将此式代入(4.2—4)式后可导出

$$\frac{\partial F}{\partial t} + V_1 \cdot \nabla F = 0, \tag{4.2—5}$$

$$\frac{\partial F}{\partial t} + V_2 \cdot \nabla F = 0。 \tag{4.2—6}$$

上两式为界面两边流体应满足的运动学边界条件，表明界面两边的流体不能穿越界面，只能沿界面的切线方向运动。

如果不连续界面为海面，则 V_2 代表海面下面海水质点的运动速度 V。设直角坐标系的原点位于静止海面，则运动的海面为 $z=\zeta(x,y,t)$，即界面方程为

$$F(x,y,z,t) = z - \zeta(x,y,t) = 0, \tag{4.2—7}$$

将此式代入(4.2—6)式，结果得到自由海面的运动学边界条件

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + V_H \cdot \nabla \zeta - w = 0, \tag{4.2—8}$$

其中 V_H 为海面海水质点运动速度的水平分量，$w=\frac{dz}{dt}$ 为海面海水质点的垂向速度。

如果界面为海底，则 V_1 代表海底处的海水质点运动速度 V。由海面起算的海底深度为 $z=-h(x,y)$，界面方程为

$$F(x,y,z) = z + h(x,y), \tag{4.2—9}$$

将(4.2—9)式代入(4.2—5)式得海底运动学边界条件

$$V_H \cdot \nabla h + w = 0。 \tag{4.2—10}$$

4.2.2 自由海面有质量交换时的运动学边界条件和盐量边界条件

通常情况下，海水和空气通过自由海面进行质量交换，包括蒸发和降水等。这些质量交换过程的总效应可以用单位时间里铅直向单位面积上的纯水通量 b 来表示。由于质量交换是纯水交换，故盐分总是留在海水中。设 ρ_w 和 ρ_s 分别为纯水密度和盐分密度，V_w 和 V_s 分别为纯水和盐分速度，则在自由海面处应有

$$\rho_w(V_w - C)\cdot n = b\cos\gamma, \qquad (4.2\text{—}11)$$

$$\rho_s(V_s - C)\cdot n = 0, \qquad (4.2\text{—}12)$$

其中 $\cos\gamma = \cos(n,z) = \frac{\partial F}{\partial z}/|\nabla F|$。现在引进海水质点惯性中心速度

$$\mathbf{V} = \frac{\rho_w \mathbf{V}_w + \rho_s \mathbf{V}_s}{\rho_w + \rho_s}, \qquad (4.2\text{—}13)$$

其中 $\rho_s + \rho_w = \rho$ 为海水密度。将(4.2—11)式和(4.2—12)式相加，并利用(4.2—13)式，结果得到

$$(\mathbf{V} - \mathbf{C})\cdot \mathbf{n} = \frac{b}{\rho}\cos\gamma。 \qquad (4.2\text{—}14)$$

利用(4.2—3)式，上式变成

$$V\cdot n + \frac{\partial F}{\partial t}/|\nabla F| = \frac{b}{\rho}\frac{\partial F/\partial z}{|\nabla F|},$$

或写成

$$\frac{\partial F}{\partial t} + V\cdot\nabla F = \frac{b}{\rho}\frac{\partial F}{\partial z}。 \qquad (4.2\text{—}15)$$

由于自由海面方程 $F(x,y,z,t) = z - \zeta(x,y,t) = 0$，因此有质量交换的海面运动学边界条件可表述为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + V_H\cdot\nabla\zeta - w = -\frac{b}{\rho}。 \qquad (4.2\text{—}16)$$

如果将(4.2—12)式改写成

$$[\rho_s(V_s - V) + \rho_s(V - C)]\cdot n = 0,$$

将(4.2—14)式代入上式，并注意到 $\rho_s = \rho s$，则有

$$\rho s(V_s - V)\cdot n = -bs\cos\gamma, \qquad (4.2\text{—}17)$$

这是海面盐量边界条件。(4.2—17)式左边是由分子扩散引起的盐量浓度通量密度，可表为

$$\boldsymbol{S} = \rho s(\boldsymbol{V}_s - \boldsymbol{V}) = -k\nabla s, \qquad (4.2\text{—}18)$$

于是(4.2—17)式可写成

$$\nabla s \cdot \boldsymbol{n} = \frac{bs\cos\gamma}{k_D \rho}$$

或者

$$\left(\nabla_H s \cdot \nabla\zeta - \frac{\partial s}{\partial z}\right) = \frac{-bs}{\rho k_D}。 \qquad (4.2\text{—}19)$$

当海面坡度很小时，海面盐量边界条件(4.2—19)式可简化为

$$\frac{\partial s}{\partial z} = \frac{bs}{\rho k_D}.$$

4.2.3 动力学边界条件

在不连续界面处，运动方程由动力学边界条件取代。虽然界面两边的流体不同，但是由分子输送过程所引起的动量通量在界面处应该连续，即界面两边分子粘性应力在界面法线方向上相等。于直角坐标系中，可表述为

$$\left.\begin{aligned}
&[(p_{xx})_1-(p_{xx})_2]\cos\alpha+[(p_{xy})_1-(p_{xy})_2] \\
&\cos\beta+[(p_{xz})_1-(p_{xz})_2]\cos\gamma=0, \\
&[(p_{yx})_1-(p_{yx})_2]\cos\alpha+[(p_{yy})_1-(p_{yy})_2] \\
&\cos\beta+[(p_{yz})_1-(p_{yz})_2]\cos\gamma=0, \\
&[(p_{zx})_1-(p_{zx})_2]\cos\alpha+[(p_{zy})_1-(p_{zy})_2] \\
&\cos\beta+[(p_{zz})_1-(p_{zz})_2]\cos\gamma=0。
\end{aligned}\right\} \qquad (4.2\text{—}20)$$

这就是动力学边界条件，其中分子粘性应力和方向余弦

$$
\left.\begin{aligned}
&p_{xx} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x},\ p_{xy} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),\\
&p_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
&p_{yx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right),\ p_{yy} = -p + 2\mu\frac{\partial u}{\partial y},\\
&p_{yz} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\\
&p_{zx} = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),\ p_{zy} = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right),\\
&p_{zz} = -p + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z}。\\
&\cos\alpha = \frac{\partial F}{\partial x}/|\nabla F|,\\
&\cos\beta = \frac{\partial F}{\partial y}/|\nabla F|,\\
&\cos\gamma = \frac{\partial F}{\partial z}/|\nabla F|。
\end{aligned}\right\}\quad (4.2\text{—}21)
$$

将(4.2—21)式代入(4.2—20)式后，动力学边界条件形如

$$
\left.\begin{aligned}
&[(-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x})_1-(-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x})_2]\frac{\partial F}{\partial x}\\
&+[\mu_1(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})_1-\mu_2(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})_2]\frac{\partial F}{\partial y}\\
&[\mu_1(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x})_1-\mu_2(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x})_2]\frac{\partial F}{\partial z}=0,\\
&[\mu_1(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})_1-\mu_2(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x})_2]\frac{\partial F}{\partial x}\\
&+[(-p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y})_1-(-p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y})_2]\frac{\partial F}{\partial y}\\
&+[\mu_1(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})_1-\mu_2(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})_2]\frac{\partial F}{\partial z}=0,\\
&[\mu_1(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x})_1-\mu_2(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x})_2]\frac{\partial F}{\partial x}\\
&+[\mu_1(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})_1-\mu_2(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y})_2]\frac{\partial F}{\partial y}\\
&+[(-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z})_1-(-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z})_2]\frac{\partial F}{\partial z}=0。
\end{aligned}\right\}
\tag{4.2—22}
$$

如果对界面方程 $F(x,y,z,t)=0$ 我们取 $F(x,y,z,t)=z-\zeta(x,y,t)$，则动力学边界条件(4.2—22)变成

$$
\left.\begin{aligned}
&\left[\left(-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1-\left(-p+2\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2\right]\frac{\partial\zeta}{\partial x}\\
&+\left[\mu_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1-\mu_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_2\right]\frac{\partial\zeta}{\partial y}\\
&-\left[\mu_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1-\mu_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2\right]=0,\\
&\left[\mu_1\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1-\mu_2\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)_2\right]\frac{\partial\zeta}{\partial x}\\
&+\left[\left(-p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1-\left(-p+2\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)_2\right]\frac{\partial\zeta}{\partial y}\\
&-\left[\mu_1\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1-\mu_2\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2\right]=0,\\
&\left[\mu_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1-\mu_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2\right]\frac{\partial\zeta}{\partial x}\\
&+\left[\mu_1\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1-\mu_2\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2\right]\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\\
&\left[\left(-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1-\left(-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)_2\right]=0。
\end{aligned}\right\}\quad(4.2\text{—}23)
$$

对于理想流体，$\mu_1=\mu_2=0$，(4.2—23)式变成很简单的形式

$$
p_1=p_2,\qquad(4.2\text{—}24)
$$

即界面处压强连续。

如果考虑分子粘性，而界面的坡度很小，从而有$\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0$和$\frac{\partial\zeta}{\partial y}=0$，于是(4.2—23)式简化为

$$
\left.\begin{aligned}
&\mu_1\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1=\mu_2\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2,\\
&\mu_1\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1=\mu_2\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2,\\
&\left(-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1=\left(-p+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}\right)_2。
\end{aligned}\right\}\quad(4.2\text{—}25)
$$

4.2.4 温度边界条件

在不连续界面两侧，由于分子热运动产生的热通量在界面法向方向上应该相等，即

$$(\boldsymbol{H}_1-\boldsymbol{H}_2)\cdot\boldsymbol{n}=0。\qquad(4.2-26)$$

如果没有质量通过界面，分子热通量可用温度梯度表示

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{H}_1&=(-\kappa\nabla\theta)_1,\\ \boldsymbol{H}_2&=-(\kappa\nabla\theta)_2,\end{aligned}\right\}\qquad(4.2-27)$$

于是(4.2—26)式可表为

$$(\kappa\frac{\partial\theta}{\partial n})_1-(\kappa\frac{\partial\theta}{\partial n})_2=0,\qquad(4.2-28)$$

这就是界面温度边界条件。对於自由海面，热通量来自大气。设来自大气的沿海面铅直线方向的热通量为 Q，由(4.2—28)式可得

$$(\kappa\frac{\partial\theta}{\partial n})_2=Q\cos\gamma$$

或

$$\nabla_H\theta\cdot\nabla\zeta-\frac{\partial\theta}{\partial z}=-\frac{Q}{k_\theta\rho c_p},\qquad(4.2-29)$$

这是海面温度边界条件的常用形式。

§ 4.3 时间平均的基本方程和边界条件

通常情况下海水处于湍流状态。湍流流体质点的运动轨道是无秩序的，存在着各质点之间不连续的相对运动，称之为脉冲运动。脉动是不规则的、随机的，因此研究某个质点在某个时刻的运动是没有意义的，也是困难的。处于这种湍动状态的流体质点具有自己的热力学性质(温度、盐度和密度)，在它作不规则的随机运动过程中，海水中的温度、盐度等也表现出不规则的随机变动。图4—2中的起伏曲线是在大洋某测站于某一深度处用快速响应传

感器记录的海水温度 θ，很清楚地反映了质点运动的不规则和随机性。当人们对流场，压力场，温度场，盐度场和密度场的精细结构不关心的时候，往往注意这些量的在一定时间间隔内的平均情况，这种时间平均值可表为

$$\overline{q}_i(x,y,z,t_0,2\triangle t) = \frac{1}{2\triangle t}\int_{t_0-\triangle t}^{t_0+\triangle t} q_i(x,y,z,t)dt \quad (4.3—1)$$

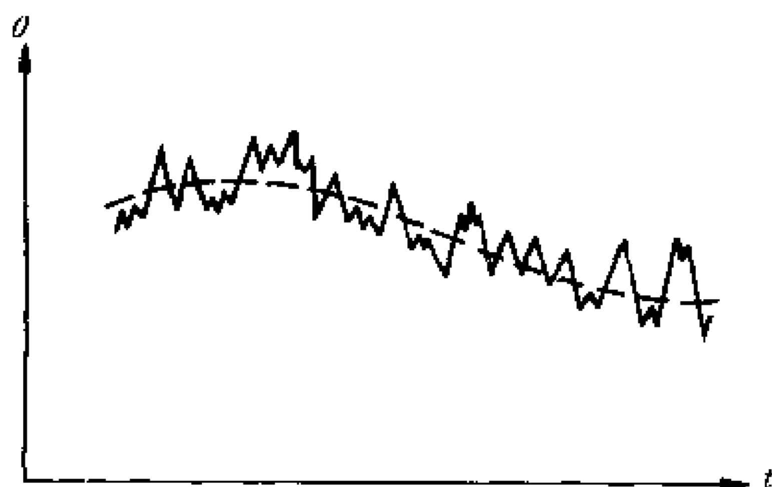


图 4—2　大洋某站深度处的温度 θ 和它的时间平均值 $\overline{\theta}$（虚线）随时间的变化

其中下标 $i=1,2,\cdots\cdots7$，分别指示 u,v,w,p,s,θ,ρ 七个变量。时间间隔 $2\triangle t$ 的选取原则上应小于所研究性质的时间尺度，而大于脉动的时间尺度。图 4—2 中的虚线便是利用 (4.3—1) 式和选取适当的 $2\triangle t$（一般取为 1—2 分钟）所得的时间平均值 $\overline{\theta}$，反映了温度 θ 随时间变化的平均情况。研究时间平均量的最终目的还是为了获得这些平均量的变化规律。我们在 4.1.6 小节中已列出了海水层流运动基本方程组 (4.1—41)—(4.1—47) 和 (4.1—48)—(4.1—54)，对于湍流运动，假定它们仍然是正确的，并且对这些方程求时间平均之后能够描述平均量 $\overline{q}_i$ 的运动和变化规律。因此需要将海水运动基本方程组写成时间平均的形式。

由 (4.3—1) 式，可将海水质点的性质表示成两部分之和

$$q_i(x,y,z,t) = \overline{q}_i(x,y,z,t_0,2\triangle t) + q_i'(x,y,z,t) \quad (4.3—2)$$

其中 q_i' 为脉冲值，$t_0-\triangle t\leqslant t\leqslant t_0+\triangle t$。在以后要对基本方程 (4.

1—41)—(4.1—47)或(4.1—48)—(4.1—54)进行平均运算的过程中,将会遇到一系列运算时间平均值的规则(雷诺条件),因此首先简述一下这些条件。设两种性质 $a=\bar{a}+a'$ 和 $b=\bar{b}+b'$,则应满足下列雷诺条件:

$$\left.\begin{aligned}&\overline{a+b}=\bar{a}+\bar{b},\overline{ka}=k\bar{a}(k\text{ 为常数}),\\&\bar{m}=m(m\text{ 为常数}),\overline{\bar{a}b}=\bar{a}\bar{b},\\&\overline{\frac{\partial a}{\partial l}}=\frac{\partial\bar{a}}{\partial l}(l=x,\text{或 }y,\text{或 }t)\end{aligned}\right\}\qquad(4.3—3)$$

由(4.3—3)中的条件 $\overline{\bar{a}b}=\bar{a}\bar{b}$,如果取 $b=1$,则可得

$$\bar{a}-\overline{\bar{a}\cdot 1}=\bar{a}-\bar{\bar{a}}=\overline{a-\bar{a}}=\overline{a'}=0,$$

由上式得两个结果

$$\bar{\bar{a}}=\bar{a},\overline{a'}=0;\qquad(4.3—4)$$

如果取 $b=b'$,则可得

$$\overline{\bar{a}b'}=\bar{a}\,\overline{b'}=0,\qquad(4.3—5)$$

如果取 $b=\bar{b}$,则有

$$\overline{\bar{a}\bar{b}}=\bar{a}\,\bar{b}。\qquad(4.3—6)$$

由于

$$\overline{ab}=\overline{(\bar{a}+a')(\bar{b}+b')}=\overline{\bar{a}\bar{b}}+\overline{a'b'}+\overline{\bar{a}b'}+\overline{a'\bar{b}},$$

利用(4.3—4)—(4.3—6)式,上式最后变成

$$\overline{ab}=\bar{a}\bar{b}+\overline{a'b'}。\qquad(4.3—7)$$

4.3.1 基本方程的平均化

现在运用(4.3—3)—(4.3—7)式的时间平均算子进行基本方程的平均化。

首先讨论直角坐标系中的基本方程(4.1—41)—(4.1—47)。

运用时间平均算子 $\overline{\frac{\partial a}{\partial l}}=\frac{\partial\bar{a}}{\partial l}$,可直接得到连续方程(4.1—44)

的时间平均形式

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}=0。\tag{4.3—8}$$

在求运动方程(4.1—41)—(4.1—43)的时间平均形式之前，对它们先作些形式上的变化。将连续方程(4.1—44)分别乘以 u，v 和 w

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \\ w \end{matrix}\right\} \times \left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,\tag{4.3—9}$$

然后作以下运算：(4.1—41)式加上(4.3—9)的第一式，(4.1—42)式加上(4.3—9)的第二式，以及(4.1—43)式加上(4.3—9)的第三式。于是得到

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}-2\omega\sin\varphi v+2\omega\cos\varphi w \\ =-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{\partial \Omega}{\partial x}-\nu\triangle u,\end{aligned}\tag{4.3—10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial vu}{\partial x}+\frac{\partial v^2}{\partial y}+\frac{\partial vw}{\partial z}+2\omega\sin\varphi u \\ =-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}-\frac{\partial \Omega}{\partial y}+\nu\triangle v,\end{aligned}\tag{4.3—11}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial wu}{\partial x}+\frac{\partial wv}{\partial y}+\frac{\partial w^2}{\partial z}-2\omega\cos\varphi u \\ =-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial \Omega}{\partial z}-g+\nu\triangle w,\end{aligned}\tag{4.3—12}$$

利用时间平均算子对以上三式求平均，并近似取 $\rho'=0$，于是有

$$
\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial \bar{u}^{2}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{u}\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{u}\bar{w}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{u'u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}
$$

$$
\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}-2\omega\sin\varphi\bar{v}+2\omega\cos\varphi\bar{w}
$$

$$
=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}-\frac{\partial \Omega}{\partial x}+\nu\triangle\bar{u}, \tag{4.3—13}
$$

$$
\frac{\partial \bar{v}}{\partial t}+\frac{\partial \overline{vu}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{v}^{2}}{\partial y}+\frac{\partial \overline{vw}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{v'u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{u'v'}}{\partial y}
$$

$$
+\frac{\partial \overline{u'w'}}{\partial z}+2\omega\sin\varphi\bar{u}
$$

$$
=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y}-\frac{\partial \Omega}{\partial y}+\nu\triangle\bar{v}, \tag{4.3—14}
$$

$$
\frac{\partial \bar{w}}{\partial t}+\frac{\partial \bar{w}\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial \bar{w}\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial \bar{w}^{2}}{\partial z}+\frac{\partial \overline{w'u'}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{w'v'}}{\partial y}
$$

$$
+\frac{\partial \overline{w'w'}}{\partial z}-2\omega\cos\varphi\bar{u}
$$

$$
=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}-\frac{\partial \Omega}{\partial z}-g+\nu\triangle\bar{w}。 \tag{4.3—15}
$$

其中的脉冲速度乘积项可用时间平均速度的梯度来表示

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{u'u'}&=A_{xx}\frac{\partial \bar{u}}{\partial x}, & \overline{u'v'}&=A_{xy}\frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, & \overline{u'w'}&=A_{xz}\frac{\partial \bar{u}}{\partial z},\\
\overline{v'u'}&=A_{yx}\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, & \overline{v'v'}&=A_{yy}\frac{\partial \bar{v}}{\partial y}, & \overline{v'w'}&=A_{yz}\frac{\partial \bar{v}}{\partial z},\\
\overline{w'u'}&=A_{zx}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x}, & \overline{w'v'}&=A_{zy}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y}, & \overline{w'w'}&=A_{zz}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \tag{4.3—16}
$$

其中 $A_{xx}, A_{xy}, \cdots\cdots A_{zz}$ 为湍流运动粘滞系量。将时间平均连续方程(4.3—8)分别乘以 $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$，得

$$\left.\begin{array}{l}\bar{u}\\ \bar{v}\\ \bar{w}\end{array}\right\}\times\left(\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right)=0, \qquad (4.3—17)$$

由(4.3—13)式减去(4.3—17)的第一式，(4.3—14)式减去(4.3—17)的第二式，以及由(4.3—15)式减去(4.3—17)的第三式，然后将(4.3—16)式代入其中，结果到时间平均运动方程

$$\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}-2\omega\sin\varphi\bar{v}+2\omega\cos\varphi\bar{w}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial x}-\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\nu\triangle\bar{u}+\frac{\partial}{\partial x}\left(A_{xx}\frac{\partial\bar{u}}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(A_{xy}\frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_{xz}\frac{\partial\bar{u}}{\partial z}\right), \qquad (4.3—18)$$

$$\frac{\partial\bar{v}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}+2\omega\sin\varphi\bar{u}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial y}-\frac{\partial\Omega}{\partial y}+\nu\triangle\bar{v}+\frac{\partial}{\partial x}\left(A_{yx}\frac{\partial\bar{v}}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(A_{yy}\frac{\partial\bar{v}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_{yz}\frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\right), \qquad (4.3—19)$$

$$\frac{\partial\bar{w}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}-2\omega\cos\varphi\bar{u}$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial z}-g+\nu\triangle\bar{w}+\frac{\partial}{\partial x}\left(A_{zx}\frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}\left(A_{zy}\frac{\partial\bar{w}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_{zz}\frac{\partial\bar{w}}{\partial z}\right), \qquad (4.3—20)$$

(4.3—18)—(4.3—20)式中右边最后三项叫做湍流摩擦力的合力。

将连续方程(4.1—44)乘以盐度 s，然后与盐量扩散方程(4.1—45)相加，有

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{\partial us}{\partial x}+\frac{\partial vs}{\partial y}+\frac{\partial ws}{\partial z}=k_D\triangle s。\qquad(4.3\text{—}21)$$

对其进行时间平均得

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\bar{s}}{\partial t}+\frac{\partial\bar{u}\bar{s}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}\bar{s}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}\bar{s}}{\partial z}+\frac{\partial\overline{u's'}}{\partial x}\\&+\frac{\partial\overline{v's'}}{\partial y}+\frac{\partial\overline{w's'}}{\partial z}=k_D\triangle\bar{s}。\end{aligned}\right\}\qquad(4.3\text{—}22)$$

其中中脉动量可用时间平均盐度梯度表示

$$-\overline{u's'}=K_{sx}\frac{\partial\bar{s}}{\partial x},\quad-\overline{v's'}=K_{sy}\frac{\partial\bar{s}}{\partial y},\quad-\overline{w's'}=K_{sz}\frac{\partial\bar{s}}{\partial z},$$

$$(4.3\text{—}23)$$

K_{sx},K_{sy},K_{sz}为湍流盐扩散系量。由(4.3—22)式减去$\bar{s}\times$(4.3—8)式,然后将(4.3—23)式代入,结果得到时间平均盐量扩散方程

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\bar{s}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{s}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{s}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{s}}{\partial z}=k_D\triangle\bar{s}\\&+\frac{\partial}{\partial x}\left(K_{sx}\frac{\partial\bar{s}}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(K_{sy}\frac{\partial\bar{s}}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(K_{sz}\frac{\partial\bar{s}}{\partial z}\right)。\end{aligned}\qquad(4.3\text{—}24)$$

方程中的最后三项为湍流盐通量。

类似地,将连续方程(4.1—44)乘以温度 θ,然后与热传导方程(4.1—46)相加得

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{\partial u\theta}{\partial x}+\frac{\partial v\theta}{\partial y}+\frac{\partial w\theta}{\partial z}=k_\theta\triangle\theta,\qquad(4.3\text{—}25)$$

经时间平均运算后有

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t}+\frac{\partial\bar{u}\bar{\theta}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{v}\bar{\theta}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{w}\bar{\theta}}{\partial z}+\\&\frac{\partial\overline{u'\theta'}}{\partial x}+\frac{\partial\overline{v'\theta'}}{\partial y}\quad\frac{\partial\overline{w'\theta'}}{\partial z}=k_\theta\triangle\bar{\theta}。\end{aligned}\qquad(4.3\text{—}26)$$

其中脉冲量可用时间平均温度梯度表示

$$-\overline{u'\theta'} = K_{\theta x}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x}, \quad -\overline{v'\theta'} = K_{\theta y}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}, \quad -\overline{w'\theta'} = K_{\theta z}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z},$$

(4.3—27)

$K_{\theta x}, K_{\theta y}, K_{\theta z}$，为湍流热传导系量。从(4.3—26)式中减去 $\bar{\theta}\times$(4.3—8)式，并将(4.3—27)式代入，结果得到时间平均热传导方程

$$\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z} = k_{\theta}\triangle\bar{\theta} +$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(K_{\theta x}\frac{\partial\theta}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}(K_{\theta y}\frac{\partial\theta}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(K_{\theta z}\frac{\partial\theta}{\partial z})。 \quad (4.3—28)$$

上式最后三项叫做湍流热传导通量。

海水状态方程的时间平均形式为

$$\bar{\rho} = \rho(\bar{s}, \bar{\theta}, \bar{p})。 \quad (4.3—29)$$

为了简便起见，将时间平均的诸方程(4.3—17)，(4.3—18)—(4.3—20)，(4.3—24)，(4.3—28)和(4.3—29)中的平均符号一横略去，于是直角坐标系中的时间平均基本方程组记为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} - 2\omega\sin\varphi v + 2\omega\cos\varphi w$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial\Omega}{\partial x} + \nu\triangle u + \frac{\partial}{\partial x}(A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}) +$$
$$\frac{\partial}{\partial y}(A_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(A_{xz}\frac{\partial u}{\partial z}), \quad (4.3—30)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} + 2\omega\sin\varphi u$$
$$= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial\Omega}{\partial y} + \nu\triangle v + \frac{\partial}{\partial x}(A_{yx}\frac{\partial v}{\partial x})$$
$$+ \frac{\partial}{\partial y}(A_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}) + \frac{\partial}{\partial z}(A_{yz}\frac{\partial v}{\partial z}), \quad (4.3—31)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}-2\omega\cos\varphi u$$

$$=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\partial\Omega}{\partial z}-g+\nu\triangle w+\frac{\partial}{\partial x}(A_{zx}\frac{\partial w}{\partial x})$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(A_{zy}\frac{\partial w}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(A_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}),\qquad (4.3\text{—}32)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\qquad (4.3\text{—}33)$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}+u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial y}+w\frac{\partial s}{\partial z}=k_{s}\triangle s+\frac{\partial}{\partial x}(K_{sx}\frac{\partial s}{\partial x})$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(K_{sy}\frac{\partial s}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(K_{sz}\frac{\partial s}{\partial z}),\qquad (4.3\text{—}34)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+u\frac{\partial\theta}{\partial x}+v\frac{\partial\theta}{\partial y}+w\frac{\partial\theta}{\partial z}=k_{\theta}\triangle\theta+\frac{\partial}{\partial x}(K_{\theta x}\frac{\partial\theta}{\partial x})$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}(K_{\theta y}\frac{\partial\theta}{\partial y})+\frac{\partial}{\partial z}(K_{\theta z}\frac{\partial\theta}{\partial z}),\qquad (4.3\text{—}35)$$

$$\rho=\rho(s,\theta,p)。\qquad (4.3\text{—}36)$$

利用同样的步骤和方法，可以得到球坐标系中的时间平均基本方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+w\frac{\partial u}{\partial r}$$

$$-\frac{uv}{r}\tan\varphi+\frac{uw}{r}-2\omega\sin\varphi v+2\omega\cos\varphi w$$

$$=-\frac{1}{\rho r\cos\varphi}\frac{\partial p}{\partial\lambda}-\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda}$$

$$+\nu[\triangle u-\frac{u}{r^2\cos^2\varphi}-\frac{2\tan\varphi}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\lambda}-\frac{2}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial w}{\partial\lambda}]$$

$$+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(A_{\lambda\lambda}\frac{\partial u}{\partial\varphi})+\frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi A_{\lambda\varphi}\frac{\partial u}{\partial\varphi})$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial\lambda}(r^2A_{\lambda r}\frac{\partial u}{\partial r})-\tan\varphi A_{\lambda\varphi}\frac{1}{r^2}\frac{\partial u}{\partial\varphi}+A_{\lambda r}\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r},$$

(4.3—37)

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial v}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi}+w\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{u^2}{r}\tan\varphi+\frac{vw}{r}$$

$$+2\omega\sin\varphi u=-\frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\varphi}+-\frac{1}{r}\frac{\partial\Omega}{\partial\varphi}+\nu[\triangle v$$

$$-\frac{v}{r^2\cos^2\varphi}+\frac{2\tan\varphi}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial w}{\partial\varphi}]$$

$$+\frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(A_{\varphi\lambda}\frac{\partial v}{\partial\lambda})+\frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi A_{\varphi\varphi}\frac{\partial v}{\partial\varphi})$$

$$+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_{\varphi r}\frac{\partial v}{\partial r})+\tan\varphi A_{\lambda\lambda}\frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+A_{\varphi r}\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r},$$

(4.3—38)

$$\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial w}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial w}{\partial\varphi}+w\frac{\partial w}{\partial r}-w\frac{u^2+v^2}{r}$$

$$-2\omega\sin\varphi u=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}-\frac{\partial\Omega}{\partial r}+\nu[\triangle w-\frac{2}{r^2}w$$

$$+\frac{2\tan\varphi}{r^2}v-\frac{2}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}]+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(A_{r\lambda}\frac{\partial w}{\partial x})$$

$$+\frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi A_{r\varphi}\frac{\partial w}{\partial\varphi})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2A_{rr}\frac{\partial w}{\partial r})$$

$$+\frac{1}{r}(A_{\lambda\lambda}\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+A_{\varphi\varphi}\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\varphi})+\tan\varphi\frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial r},$$

(4.3—39)

$$\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial u}{\partial\lambda}+\frac{1}{r\cos\varphi}\frac{\partial(v\cos\varphi)}{\partial\varphi}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2w)}{\partial r}=0,\text{(4.3—40)}$$

$$\frac{\partial s}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial s}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial s}{\partial\varphi}+w\frac{\partial s}{\partial r}$$

$$=k_D\triangle s+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(K_{s\lambda}\frac{\partial s}{\partial\lambda})$$

$$+\frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}(\cos\varphi K_{s\varphi}\frac{\partial s}{\partial\varphi})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2k_{sr}\frac{\partial s}{\partial r}) \quad (4.3\text{—}41)$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\frac{u}{r\cos\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial\lambda}+\frac{v}{r}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi}+w\frac{\partial\theta}{\partial r}$$

$$=k_\theta\triangle\theta+\frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\frac{\partial}{\partial\lambda}(K_{\theta\lambda}\frac{\partial\theta}{\partial\lambda})$$

$$+\frac{1}{r^2\cos\varphi}\frac{\partial}{\partial r}(\cos\varphi K_{\theta\varphi}\frac{\partial\theta}{\partial\varphi})+\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2K_{\theta r}\frac{\partial\theta}{\partial r}), \quad (4.3\text{—}42)$$

$$\rho=\rho(s,\theta,p)。 \quad (4.3\text{—}43)$$

4.3.2 边界条件的平均化

由于自由海面或内部界面上存在脉冲运动，边界条件的描述是困难的，只能用近似的方法加以处理。一般认为，层流理论所建立的边界条件，对时间平均自由海面或界面 $z=\overline{\zeta}(x,y,t)$ 仍然适用。更明确地说，在层流边界条件中，V，s，θ，p 等用时间平均量 $\overline{V}$，$\overline{s}$，$\overline{\theta}$，$\overline{p}$ 等代替，分子粘性应力

$$(P_{ik})=\begin{bmatrix}p_{xx} & p_{xy} & p_{xz}\\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz}\\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz}\end{bmatrix}$$

用雷诺应力

$$(\overline{P}_{ik})=\begin{bmatrix}\overline{p}_{xx} & \overline{p}_{xy} & \overline{p}_{xz}\\ \overline{p}_{yx} & \overline{p}_{yy} & \overline{p}_{yz}\\ \overline{p}_{zx} & \overline{p}_{zy} & \overline{p}_{zz}\end{bmatrix}$$

$$
= \begin{bmatrix} -\bar{p} + \rho A_{xx} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial x} & \rho A_{xy} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial y} & \rho A_{xz} \dfrac{\partial \bar{u}}{\partial z} \\ \rho A_{yx} \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial x} & -\bar{p} + \rho A_{yy} \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial y} & \rho A_{yz} \dfrac{\partial \bar{v}}{\partial z} \\ \rho A_{zx} \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial x} & \rho A_{zy} \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial y} & -\bar{p} + \rho A_{zz} \dfrac{\partial \bar{w}}{\partial z} \end{bmatrix}
$$

代替，分子盐通量 $\boldsymbol{S}=-k\nabla s$[见(4.2—18)式]用湍流盐通量 $\overline{\boldsymbol{S}}=(-\rho K_{sx}\dfrac{\partial \bar{s}}{\partial x},-\rho K_{sy}\dfrac{\partial \bar{s}}{\partial y},-\rho K_{sz}\dfrac{\partial \bar{s}}{\partial z})$，代替，分子热通量 $\boldsymbol{H}=-\kappa\nabla\theta$[见(4.2—27)式]用湍流热通量 $\overline{\boldsymbol{H}}=(-\rho c_p K_{\theta x}\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial x},-\rho c_p K_{\theta y}\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial y},-\rho c_p K_{\theta z}\dfrac{\partial\bar{\theta}}{\partial z})$代替，其结果被认为是时间平均边界条件。为了简便，时间平均边界条件中代表时间平均意义的一横被省去。因此时间平均边界条件分列如下

1. 自由海面时间平均运动学边界条件

$$
\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \boldsymbol{V}_H \cdot \nabla\zeta - w = 0, \qquad (4.3—44)
$$

$$
\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \boldsymbol{V}_H \cdot \nabla\zeta - w = \frac{b}{\rho}; \qquad (4.3—45)
$$

2. 海底时间平均运动学边界条件

$$
\boldsymbol{V}_H \cdot \nabla h + w = 0; \qquad (4.3—46)
$$

3. 自由海面时间平均盐度边界条件

$$
K_{sx}\frac{\partial s}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + K_{sy}\frac{\partial s}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - K_{sz}\frac{\partial s}{\partial z} = -bs; \qquad (4.3—47)
$$

4. 自由海面时间平均温度边界条件

$$
K_{\theta x}\frac{\partial \theta}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + K_{\theta y}\frac{\partial \theta}{\partial y}\frac{\partial \zeta}{\partial y} - K_{\theta z}\frac{\partial \theta}{\partial z} = -Q; \qquad (4.3—48)
$$

5. 界面时间平均动力学边界条件

$$
\left.\begin{aligned}
&\left[\left(-p+\rho A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\right)_1-\left(-p+\rho A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\right)_2\right]\frac{\partial \zeta}{\partial x}\\
&+\left[\left(\rho A_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\right)_1-\left(\rho A_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\right)_2\right]\frac{\partial \zeta}{\partial y}-\left[\left(\rho A_{xz}\frac{\partial u}{\partial z}\right)_1\right.\\
&\left.-\left(\rho A_{xz}\frac{\partial u}{\partial z}\right)_2\right]=0,\\
&\left[\left(\rho A_{yx}\frac{\partial v}{\partial x}\right)_1-\left(\rho A_{yx}\frac{\partial v}{\partial x}\right)_2\right]\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\left[\left(-p+\rho A_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}\right)_1-\right.\\
&\left.\left(-p+\rho A_{yy}\frac{\partial v}{\partial y}\right)_2\right]\frac{\partial \zeta}{\partial y}-\left[\left(\rho A_{yz}\frac{\partial v}{\partial z}\right)_1-\left(\rho A_{yz}\frac{\partial v}{\partial z}\right)_2\right]=0,\\
&\left[\left(\rho A_{zx}\frac{\partial w}{\partial x}\right)_1-\left(\rho A_{zx}\frac{\partial w}{\partial x}\right)_2\right]\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\left[\left(\rho A_{zy}\frac{\partial w}{\partial y}\right)_1-\right.\\
&\left.\left(\rho A_{zy}\frac{\partial w}{\partial y}\right)_2\right]\frac{\partial \zeta}{\partial y}-\left[\left(-p+\rho A_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}\right)_1+\left(-p+\right.\right.\\
&\left.\left.\rho A_{zz}\frac{\partial w}{\partial z}\right)_2\right]=0。
\end{aligned}\right\}\quad(4.3-49)
$$

§4.4 铅直向平均基本方程

前一节我们建立了时间平均基本方程，但求解这些普遍形式的基本方程是困难的。如果对它们从海底至海面积分并求平均，则三维空间的基本方程可转变为二维平面方程，而求解后者相对地就容易些。当然，其解只能描述平均运动状况，不能反映运动的铅直变化。不过对某些形式在某些条件下的运动，这种铅直向平均运动也能反映实际运动的主要特征。这一节讨论一种简单的但常用的情形，即假定海水是均质的，即 ρ,s,θ 均为常量。

在对基本方程作铅直向积分平均之前，先引入铅直向积分平均运算的一些规则。设 $q=q(x,y,z,t)$ 是 §4.3 中的时间平均量，它的铅直向平均值记为

$$\langle q \rangle = \frac{1}{h+\zeta}\int_{-h}^{\zeta} q dz, \tag{4.4—1}$$

$\langle q \rangle$与 z 无关，仅为 x,y,t 的函数。设 q 与$\langle q \rangle$的差值为 q^*，则有

$$q(x,y,z,t) = \langle q(x,y,t) \rangle + q^*(x,y,z,t)。 \tag{4.4—2}$$

由于$\langle q \rangle$不是 z 的函数，将(4.4—2)式代入(4.4—1)式后得

$$\langle q \rangle = \langle\langle q \rangle\rangle + \langle q^* \rangle = \langle q \rangle + \langle q^* \rangle$$

由此得运算规则

$$\langle\langle q \rangle\rangle = \langle q \rangle, \quad \langle q^* \rangle = 0。 \tag{4.4—3}$$

两个时间平均量 q_1 和 q_2 相乘，其乘积的铅直向平均可表为

$$\begin{aligned}\langle q_1 q_2 \rangle &= \langle (\langle q_1 \rangle + q_1^*)(\langle q_2 \rangle + q_2^*) \rangle \\ &= \langle q_1 \rangle \langle q_2 \rangle + \langle q_1^* q_2^* \rangle。\end{aligned} \tag{4.4—4}$$

时间平均量 q 的偏导数的铅直向平均为

$$\langle \frac{\partial q}{\partial l} \rangle = \frac{1}{h+\zeta}\int_{-h}^{\zeta} \frac{\partial q}{\partial l} dz = \frac{1}{h+\zeta}\left(\frac{\partial}{\partial l}\int_{-h}^{\zeta} q dz - q|_{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial l} - q|_{-h}\frac{\partial h}{\partial l}\right),$$

上式可改写成

$$\langle \frac{\partial q}{\partial l} \rangle = \frac{1}{h+\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial l}[(h+\zeta)\langle q \rangle] - q|_{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial l} - q|_{-h}\frac{\partial h}{\partial l}\right\}, \tag{4.4—5}$$

其中 $l=x$ 或 y。类似地有

$$\langle \frac{\partial q}{\partial z} \rangle = \frac{1}{h+\zeta}(q|_{\zeta} - q|_{-h}), \tag{4.4—6}$$

$$\langle \frac{\partial q}{\partial t} \rangle = \frac{1}{h+\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[(h+\zeta)\langle q \rangle] - q|_{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right\}。 \tag{4.4—7}$$

另外利用(4.4—5)和(4.4—4)的运算规则，可求得

$$\langle \frac{\partial (q_1 q_2)}{\partial l} \rangle = \frac{1}{h+\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial l}[(h+\zeta)\langle q_1 \rangle \langle q_2 \rangle] + \frac{\partial}{\partial l}[(h+\zeta)\langle q_1^* q_2^* \rangle] - (q_1 q_2)|_{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial l} - (q_1 q_2)|_{-h}\frac{\partial h}{\partial l}\right\}。 \tag{4.4—8}$$

下面利用铅直向平均的运算规则对基本方程求铅直向平均。我们讨论直角坐标系中的基本方程，并忽略运动方程中的分子粘性摩擦力的合力项。

运用铅直向平均运算规则(4.4—5)和(4.4—6)，由时间平均连续方程(4.3—33)可得

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{h+\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)\langle u\rangle]-u|_{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}-u|_{-h}\frac{\partial h}{\partial x}\right\}\\
&+\frac{1}{h+\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)\langle v\rangle]-v|_{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}-v|_{-h}\frac{\partial h}{\partial y}\right\}\\
&+\frac{1}{h+\zeta}(w|_{\zeta}-w|_{-h})=0。
\end{aligned}
$$

再利用时间平均海面运动学边界条件和时间平均海底运动学边界条件(4.3—44)和(4.3—46)，上式变成

$$
\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial[(h+\zeta)\langle u\rangle]}{\partial x}+\frac{\partial[(h+\zeta)\langle v\rangle]}{\partial y}=0, \quad (4.4—9)
$$

这就是铅直向平均连续方程。

时间平均连续方程(4.3—34)乘以 u，然后与 x 方向的时间平均运动方程(4.3—30)相加，结果为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial u^2}{\partial x}+\frac{\partial uv}{\partial y}+\frac{\partial uw}{\partial z}-2\omega\sin\varphi v+2\omega\cos\varphi w=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\\
&\quad-\frac{\partial\Omega}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(A_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(A_{xz}\frac{\partial u}{\partial z}\right)。
\end{aligned}
$$

因为已假定 ρ 为常量，再近似地认为在大洋深度范围内引潮力 $F_T=-\nabla\Omega$ 与 z 无关，而仅仅是 x、y 和 t 的函数(该假定的近似正确性将在第七章讨论)。基于这些假定，上面方程的铅直向积分平均可表为

$$
\frac{1}{h+\zeta}\left\{\frac{\partial}{\partial t}[(h+\zeta)\langle u\rangle]-u|_{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)\langle u\rangle\langle u\rangle]\right.
$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)\langle u^* u^*\rangle] - u^2|_\zeta \frac{\partial\zeta}{\partial x} - u^2|_{-h}\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$+\frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)\langle u\rangle\langle v\rangle] + \frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)\langle u^* v^*\rangle]$$

$$-(uv)|_\zeta \frac{\partial\zeta}{\partial y} - (uv)|_{-h}\frac{\partial h}{\partial y} + (uw)|_\zeta - (uw)|_{-h}\} - 2\omega\sin\varphi\langle v\rangle$$

$$+2\omega\cos\varphi\langle w\rangle - \frac{1}{h+\zeta}\{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)\langle p\rangle]$$

$$+\frac{1}{\rho}p|_\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \frac{1}{\rho}p|_{-h}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)\langle A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\rangle]$$

$$-(A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x})|_\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} - (A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x})|_{-h}\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)\langle A_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\rangle]$$

$$-(A_{xy}\frac{\partial u}{\partial y})|_\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y} - (A_{xy}\frac{\partial u}{\partial y})|_{-h}\frac{\partial h}{\partial y} + (A_{xz}\frac{\partial u}{\partial z})|_\zeta$$

$$-(A_{xz}\frac{\partial u}{\partial z})|_{-h}\} - \frac{\partial\Omega}{\partial x},$$

利用海面运动学边界条件(4.3—44)，上面方程左边{}内的第二、第五、第九和第十一项之和为零，利用海底运动力学界条件(4.3—46)，该{}内的第六、第十和第十二项之和为零。将上面方程中的$\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)\langle A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\rangle]$和$\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)\langle u^* u^*\rangle]$合并，并以$\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)A_{xx}\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x}]$表示(因为$\langle A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x}\rangle=-\overline{u'u'}$，对$\langle u^* u^*\rangle$也假定有类似的形式，即$-\langle u^* u^*\rangle=A_{xx}^*\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x}$)。同样，方程中的$\frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)\langle A_{xy}\frac{\partial u}{\partial y}\rangle]$和$\frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)\langle u^* v^*\rangle]$合并，并以$\frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)A_{xy}\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}]$表示。再将上面方程左边{}内的第一、第三项和第七项进一步展开，并利用铅直向积分平均连续方程(4.4—9)，最后得到x方向的铅直向平均运动方程

$$\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t} + \langle u\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x} + \langle v\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y} - 2\omega\sin\varphi\langle v\rangle$$

$$+ 2\omega\cos\varphi\langle w\rangle = \frac{1}{h+\zeta}\{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)\langle p\rangle] +$$

$$\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)A_{xx}\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)A_{xy}\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}]\}$$

$$-\frac{\partial\Omega}{\partial x} + \frac{1}{h+\zeta}\{\frac{1}{\rho}p_\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} - (A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x})|_\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} - (A_{xy}\frac{\partial u}{\partial y})|_\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

$$+ (A_{xz}\frac{\partial u}{\partial z})|_\zeta\}_1 + \frac{1}{h+\zeta}\{\frac{1}{\rho}p_{-h}\frac{\partial h}{\partial x} - (A_{xx}\frac{\partial u}{\partial x})|_{-h}\frac{\partial h}{\partial x}$$

$$-(A_{xy}\frac{\partial u}{\partial y})|_{-h}\frac{\partial h}{\partial y} - (A_{xz}\frac{\partial u}{\partial z})|_{-h}\}_2。\qquad (4.4—10)$$

类似地可得 y 方向和 z 方向的铅直向平均运动方程

$$\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t} + \langle u\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial x} + \langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y} + 2\omega\sin\varphi\langle u\rangle$$

$$= \frac{1}{h+\zeta}\{-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)\langle p\rangle] + \frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)A_{yx}\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y}]$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)A_{yy}\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y}]\} - \frac{\partial\Omega}{\partial y} + \frac{1}{h+\zeta}\{\frac{1}{\rho}p_\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y}$$

$$-(A_{yx}\frac{\partial v}{\partial x})|_\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} - (A_{yy}\frac{\partial v}{\partial y})|_\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y} + (A_{yz}\frac{\partial v}{\partial z})|_\zeta\}_1$$

$$+ \frac{1}{h+\zeta}\{\frac{1}{\rho}p_{-h}\frac{\partial h}{\partial y} - (A_{yx}\frac{\partial v}{\partial x})|_{-h}\frac{\partial h}{\partial x} - (A_{yy}\frac{\partial v}{\partial y})|_{-h}\frac{\partial h}{\partial y}$$

$$-(A_{yz}\frac{\partial v}{\partial z})|_{-h}\}_2, \qquad (4.4—11)$$

$$\frac{\partial\langle w\rangle}{\partial t} + \langle u\rangle\frac{\partial\langle w\rangle}{\partial x} + \langle v\rangle\frac{\partial\langle w\rangle}{\partial y} - 2\omega\cos\varphi\langle u\rangle$$

$$= \frac{1}{h+\zeta}\{\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)A_{zx}\frac{\partial\langle w\rangle}{\partial x}] + \frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)A_{zy}\frac{\partial\langle w\rangle}{\partial y}]\}$$

$$-g + \frac{1}{h+\zeta}\{\frac{1}{\rho}p_\zeta - (A_{zx}\frac{\partial w}{\partial x})|_\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial x} - (A_{zy}\frac{\partial w}{\partial y})|_\zeta\frac{\partial\zeta}{\partial y} + (A_{yz}\frac{\partial w}{\partial z})|_\zeta\}_1$$

$$+ \frac{1}{h+\zeta}\{\frac{1}{\rho}p_{-h} - (A_{zx}\frac{\partial w}{\partial x})|_h\frac{\partial h}{\partial x} - (A_{zy}\frac{\partial w}{\partial y})|_{-h}\frac{\partial h}{\partial y} - (A_{zz}\frac{\partial w}{\partial z})|_{-h}\}_2。$$

(4.4—12)

对于均质海水来说，铅直向平均连续方程(4.4—9)和铅直向平均运动方程(4.4—10)—(4.4—12)，构成了包含四个未知量$\langle u\rangle$，$\langle v\rangle$，$\langle w\rangle$和$\langle p\rangle$的闭合方程组。这个方程组还直接包含了边界条件的影响：连续方程(4.4—9)中的$\frac{\partial\zeta}{\partial t}$是铅直向积分结果再利用海面和海底运动学边界条件而出现的，运动方程(4.4—10)—(4.4—11)中的$\{\}_1$，和$\{\}_2$是铅直向积分的直接结果，它们分别表示海面和海底的动力学边界条件[参见(4.3—49)]。

类似地可导出球坐标系中均质海水的铅直向平均基本方程。

§4.5　基本方程的尺度分析与简化

到目前为止，求解时间平均基本方程组(4.3—30)—(4.3—36)或(4.3—37)—(4.3—43)是困难的，方程中包含了各种不同因子。实际海洋中所发生的每一种具体的运动形式(如海浪、海流)以及在不同地理环境中发生的同一种运动形式(如深水波动和浅水波动)都主要受某些因子的影响，而其它次要因子可以忽略。这样做不仅可以简化方程，易于求解，而且其解可以相当精确地描述和解释运动的变化规律。因此，在研究具体的运动过程之前，必须分析各种因子的相对重要性。每个方程中的不同项，一般是不同量级的，其中哪些项相对重要，哪些项比较次要，取决于运动尺度，因此利用尺度分析方法可以分析估计方程中各项的相对大小，判定各个因子的相对重要性。由于海水运动的形式不同，特点各异，因此这里仅作一般性的分析。

4.5.1　尺度分析

对于某一个物理量y，它可以表示成

$$y=Y\bar{y},\qquad(4.5—1)$$

其中Y为y的特征值，$\bar{y}$为一无因次量。特征量Y通常取该物理量的最大值，或者平均值，或者常见值，并要求使(4.5—1)式中的无因次量$\bar{y}\leqslant 1$。这个特征量Y称之为y的尺度。

如果某物理量$y=y(x,t)$，则因变量和自变量可写成

$$y = Y\bar{y},\ x = X\bar{x},\ t = \tau\bar{t}。 \tag{4.5—2}$$

y的一阶偏导数可表为

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{Y}{X}\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}}。 \tag{4.5—3}$$

如果$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}}\leqslant 1$，则依上述尺度概念，可以推知$\frac{\partial y}{\partial x}$的尺度为$\frac{Y}{X}$，即

$$\frac{\partial y}{\partial x} \sim \frac{Y}{X}。 \tag{4.5—4}$$

因此，在$\frac{\partial \bar{y}}{\partial \bar{x}}\leqslant 1$的情况下，可用(4.5—4)式来估算导数的大小。类似地，y的二阶偏导数的尺度为

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \sim \frac{Y}{X^2}, \tag{4.5—5}$$

其中应满足$\frac{\partial^2 \bar{y}}{\partial \bar{x}^2}\leqslant 1$。

现在利用尺度定义，对直角坐标系中的时间平均基本方程(4.3—30)—(4.3—36)作尺度分析。为了方便，引入参量f代替$2\omega\sin\varphi$，取所有的垂直湍流运动粘滞系量A_{xz}，A_{yz}和A_{zz}等于A_z，取所有的水平湍流运动粘滞系量A_{xx}，A_{xy}，A_{yx}，A_{yy}，A_{zx}和A_{zy}均等于A_l，并且取A_z和A_l与x,y,z无关。分子粘性摩擦力相对于湍流摩擦力可以忽略，天体引潮力量级很小，除研究潮汐运动时需要考虑之外，对其它运动形式可予以忽略。在这些前提下，时间平均运动方程和连续方程(4.3—30)—(4.3—36)可写成

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}-fv+f\mathrm{ctg}\varphi w\\
&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}+fu\\
&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_l\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}-f\mathrm{ctg}\varphi u\\
&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g+A_l\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+A_z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2},\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0。
\end{aligned}
\right\}
\quad (4.5—6)
$$

若取 L 和 D 分别表示海水运动的水平和铅直尺度，τ 表示时间尺度，U 和 W 分别为水平流速和垂直流速尺度，F 为科氏参量尺度，P 为压强尺度。利用这些特征尺度，引进式(4.5—6)中的物理量的无因次形式

$$
\left.
\begin{aligned}
&(\bar{x},\bar{y})=(x,y)/L,\ \bar{z}=z/D,\ \bar{t}=t/\tau,\\
&(\bar{u},\bar{v})=(u,v)/U,\ \bar{w}=w/W,\ \bar{f}=f/F,\\
&\bar{p}=p/P。
\end{aligned}
\right\}
\quad (4.5—7)
$$

将上式关系代入(4.5—6)式后，再将三个运动方程两边同除以 FU，结果得到动力学基本方程的无因次形式

$$
\begin{aligned}
&R_0\left[\frac{L}{UT}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{y}}+\bar{w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{z}}\right]-\bar{f}\bar{v}+\delta\mathrm{ctg}\varphi\bar{f}\bar{w}\\
&=-\frac{P}{\rho FU}\frac{\partial \bar{p}}{\partial \bar{x}}+E_l\left(\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{x}^2}+\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{y}^2}\right)+E_z\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \bar{z}^2},
\end{aligned}
\quad (4.5—8)
$$

$$
R_0\left[\frac{L}{UT}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{t}}+\bar{u}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{x}}+\bar{v}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{y}}+\bar{w}\frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{z}}\right]+\bar{f}\bar{u}
$$

$$= -\frac{P}{\rho FU}\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + E_l\left(\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial y^2}\right) + E_z\frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial z^2}, \quad (4.5-9)$$

$$\delta R_0\left(\left[\frac{L}{UT}\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial \bar{w}}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial \bar{w}}{\partial z}\right] - \mathrm{ctg}\varphi\,\bar{f}\,\bar{u}\right.$$
$$= -\frac{P}{\rho FUD}\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} - \frac{g}{FU} + \delta\left[E_l\left(\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial y^2}\right) + E_z\frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial z^2}\right],$$
$$(4.5-10)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} = 0。 \quad (4.5-11)$$

其中

$$R_0 = \frac{U}{FL} = \frac{U^2}{L}/FU, \quad (4.5-12)$$

$$E_l = \frac{A_l}{FL^2} = \frac{A_l U}{L^2}/FU, \quad (4.5-13)$$

$$E_z = \frac{A_z}{FD^2} = \frac{A_z U}{D^2}/FU, \quad (4.5-14)$$

$$\delta = \frac{L}{D} = \frac{U}{W}。 \quad (4.5-15)$$

R_0 为 Rossby 数，E_l 为水平 Ekman 数，E_z 为铅直 Ekman 数，δ 为纵横比。利用这些数可以讨论方程(4.5—8)—(4.5—10)中各项的相对重要性。

Rossby 数 R_0 是平流项的尺度$\frac{U^2}{L}$与 Coriolis 力的尺度 FU 的比值，其大小反映它们的相对重要性。当 $R_0 \ll 1$ 时，表明 Coriolis 力重要，而平流非线性项可以忽略；当 $R_0 = 1$ 时，表明非线性项与 Corio-

lis 力同等重要；而当 $R\gg1$ 时，平流非线性项显得重要，而地转的影响可以忽略。实际海洋中，一般可取 $F\sim10^{-4}/s$，$U\sim0.1$—$1m/s$，如果取 $U\sim1m/s$，则由 R_0 的定义得

$$R_0=\frac{U}{FL}\sim\frac{10^4}{L}。$$

当 $L>10^5m$ 时，$R_0\ll1$，相应的运动称为大尺度运动，其中 Coriolis 力是重要的，必须考虑；而当 $L<10^3m$ 时，$R_0\gg1$，相应的运动称为小尺度运动，Coriolis 力对运动无实质性影响，可以忽略。大洋环流、大洋潮波是大尺度运动的典型例子，而海浪则是小尺度运动的典型例子。

Ekman 数是湍流摩擦力尺度与 Coriolis 力尺度之比，反映两者的相对大小。其中湍流运动粘滞系量的一般取值范围为

$$A_l\sim10^2—10^4m^2/s,$$

$$A_z\sim10^{-4}—10^{-2}m^2/s。$$

当 $E_l\ll1$，表明水平湍流摩擦力相对于 Coriolis 力可以忽略；$E_l\sim1$ 时，表明水平湍流摩擦力与 Coriolis 力同等重要；而当 $E_l\gg1$ 时，则水平湍流摩擦力显得重要，Coriolis 力可以忽略。对于铅直 Ekman 数 E_z 的讨论可以得出类似的结论。直接按 E_l 和 E_z 的定义，$E_l=\frac{A_l}{FL^2}$和 $E_z=\frac{A_z}{FD^2}$，如果水平尺度 L 和铅直尺度 D 都很大，则有 $E_l\ll1$ 和 $E_z\ll1$，表明大尺度运动中的水平和铅直湍流摩擦力相对于 Coriolis 力都可以忽略；如果 L 很大，而 D 较小，则可能有 $E_l\ll1$，$E_z\sim1$，此时水平湍流摩擦可以忽略，而铅直湍流摩擦力不能忽略，它与 Coriolis 力同等重要。$E_z\sim1$ 所对应的运动铅直尺度 $D=\sqrt{A_z/F}$，称之为 Ekman 深度。如果考虑侧边界的影响，则在其附近的水平尺度为 $L\sim10^4m$ 的范围内，有 $E_l\sim1$。于是在侧边界附近的 Ekman 深度范围内，水平和铅直湍流摩擦力与 Coriolis 力同量级，三者都

必须计及。对于水平尺度 $L<10^2$m 的小尺度运动，如果铅直尺度 $D<\sqrt{A_z/F}$，则相应地有 $E_l>1$，$E_z>1$，从而 Coriolis 力相对于湍流摩擦力可以忽略。

纵横比 δ 是运动的铅直尺度 D 与水平尺度 L 之比，也等于铅直流速尺度 W 与水平流速尺度 U 之比。在实际海洋中这种关系通常是满足的，并且有 $\delta\leqslant1$。对于大尺度运动，由于水平尺度远大于铅直尺度，故而 $\delta\ll1$。另外，如前所述，对大尺度运动有 $R_0\ll1$，$E_l\ll1$，$E_z\ll1$ 或 $E_z\sim1$，因此铅直方向的运动方程(4.5—10)式中的海水质点加速度和湍流摩擦项都很小。又，$\frac{g}{FU}\sim10^5$，$\mathrm{ctg}\varphi\ \overline{f\bar{u}}=\frac{2\omega\cos\varphi\ \bar{u}}{F}\leqslant1$，后者相对于前者可以忽略。结果，对大尺度运动，方程(4.5—10)可简化为

$$0=-\frac{P}{\rho D}\frac{\partial\bar{p}}{\partial z}-g。\qquad(4.5—16)$$

对于 $\delta\ll1$ 的小尺度运动(比如浅水中的海浪)，上式也成立。(4.5—16)式对浅水海浪的有效性将在第六章的线性波动部分作进一步讨论。

其次讨论时间平均热传导方程(4.3—35)。方程中的分子热传导项相对于湍流热传导项可以忽略。设 $K_{\theta x}=K_{\theta y}=K_{\theta l}$；引入温度尺度 θ_0，于是温度可表为 $\theta=\theta_0\bar{\theta}$；其余的物理量的尺度同前。由此可得无因次形式的时间平均热传导方程

$$\frac{\theta_0}{\tau}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t}+\frac{U\theta_0}{L}\bar{u}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x}+\frac{U\theta_0}{L}\bar{v}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}+\frac{W\theta_0}{D}\bar{w}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}$$

$$=\frac{\theta_0}{L^2}K_{\theta l}\left(\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial y^2}\right)+\frac{\theta_0}{D^2}K_{\theta z}\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial z^2},$$

上式两边同除以 $\frac{U\theta_0}{L}$，得

$$\frac{L}{U\tau}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial t}+\bar{u}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial x}+\bar{v}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial y}+\bar{w}\frac{\partial\bar{\theta}}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{P_l}\left(\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial \bar{x}^2} + \frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial \bar{y}^2}\right) + \frac{1}{P_z}\frac{\partial^2\bar{\theta}}{\partial \bar{z}^2}, \quad (4.5—17)$$

其中

$$P_l = \frac{UL}{K_{\theta l}} = \frac{U\theta_0}{L} / \left(K_{\theta l}\frac{\theta_0}{L^2}\right),$$

$$P_z = \frac{WD}{K_{\theta z}} = \frac{W\theta_0}{D} / \left(K_{\theta z}\frac{\theta_0}{D^2}\right)。$$

P_l 为水平 Peclet 数，P_z 为铅直 Peclet 数。当 $P \ll 1$ 时，表示热平流项很小，它相对于湍流热传导项可以忽略。在此情况下$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial \bar{t}}$也近似等于零，故(4.5—17)式简化为

$$\triangle \bar{\theta} = 0,$$

还原为有因次形式

$$\triangle \theta = 0, \quad (4.5—18)$$

当 $P \gg 1$ 时，表明湍流热传导项很小，可以略去，化简后的(4.5—17)式的有因次形式为

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad (4.5—19)$$

即近似于一等温运动。

4.5.2 几种常用的近似和假定

1. 静压假定(准静压近似)

将(4.5—16)式还原为有因次的形式

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g = 0, \quad (4.5—20)$$

这是静力方程。若沿 z 方向由 z 到自由海面 ζ 积分，得

$$p = p_a + \int_z^\zeta \rho g dz, \quad (4.5—21)$$

其中 P_a 为海面大气压，$\int_z^\zeta \rho g dz$ 为 z 点以上单位底面积水柱的重量。任意点的压强等于海面大气压强与该点以上水柱重量之和，这就

是静压假定或准静压近似。

当近似认为海水密度为常量时,(4.5—21)式可表为

$$P = P_a + \rho g(\zeta - z)。\qquad (4.5—22)$$

相应地,若取 P_a 为常数,则压强梯度力可表为

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial y}, \\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} &= g。\end{aligned}\right\} \qquad (4.5—23)$$

2. f—平面近似

对大尺度运动来说,动力学基本方程组(4.5—6)中的 Coriolis 力项只需保留 fv 和 fu。$f=2\omega\sin\varphi$ 是 φ 的函数,为了理论上研究方便起见,在不影响反映海水运动主要特征的情况下,常常取 $f=f_0=2\omega\sin\varphi_0$,即认为海水运动发生在 coriolis 参量为一常数 f_0 的平面上,该平面叫 f—平面。在 f—平面上的研究自然有一定的近似(误差),称之为 f—平面近似。显然,f—平面只对纬度跨度不太大的海区的运动适合,但是在若干情形下也使用于无限平面或半无限平面,例如用于研究 Sverdrup 波和 Kelvin 波等。一方面是 f—平面上的基本方程便于求得解析解,另一方面这些解析解确实能够描述和解释实际海洋中的若干现象。

3. β—平面近似

对大尺度运动来说,地球的曲率影响不应忽视,但使用球坐标系又不如使用直角坐标系方便。为了既使用直角坐标系,又把 Coriolis 参量 f 随纬度 φ 的变化考虑在内,可作如下近似处理。因为我们通常选取 y 轴与经圈相切,因此 f 随 φ 的变化可近似地用 f 随 y 的变化来表达。设 f_0 为参考纬度 φ_0 处的 f 值,y_0 为 φ_0 处的 y 值,f 在 φ_0 附近的 Taylor 级数展开为

$$f = 2\omega\sin\varphi \simeq 2\omega\sin\varphi_0 + 2\omega\cos\varphi_0(\varphi - \varphi_0), \quad (4.5—24)$$

式中 $\varphi-\varphi_0$ 可表示成

$$a(\varphi - \varphi_0) = y - y_0, \quad (4.5—25)$$

其中 a 为地球平均半径。$2\omega\cos\varphi_0$ 可表为

$$2\omega\cos\varphi_0 = \frac{df}{d\varphi}\Big|_{\varphi=\varphi_0} = a\frac{df}{dy}\Big|_{\varphi=\varphi_0}。 \quad (4.5—26)$$

将(4.5—25)和(4.5—26)式代入(4.5—24)式得

$$f = f_0 + \beta(y - y_0),$$

其中 $\beta = \frac{df}{dy}\big|_{\varphi=\varphi_0}$。如取 $y_0=0$,则得

$$f = f_0 + \beta y。 \quad (4.5—27)$$

像这样既是直角坐标平面又考虑 Coriolis 参量线性变化的平面叫做 β—平面。利用这种平面仍有近似,叫做 β—平面近似。

4. Boussinesq 近似

由于海水的压缩性很微小,在前面曾假定海水是不可压缩的,并由此获得连续方程

$$\nabla \cdot V = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0。 \quad (4.5—28)$$

设海水密度 ρ(指时间平均密度)可表示为平均值 ρ_0 与扰动值 ρ' 的和,即 $\rho=\rho_0+\rho'$,则 z 方向的运动方程(4.3—32)可写成

$$(\rho_0 + \rho')\frac{dw}{dt} = -\frac{\partial p}{\partial z} - (\rho_0 + \rho')g + (\rho_0 + \rho')2\omega\cos\varphi u$$

$$+ (\rho_0 + \rho')\left[A_l\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + A_z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right]。$$

除了在重力加速度 g 的前面保留 ρ' 面外,其余各项前面的 ρ' 均略去,然后方程两边同除以 ρ_0,于是 z 方向的运动方程近似表为

$$\frac{dw}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho_0 + \rho'}{\rho_0}g + 2\omega\cos\varphi u$$

$$+ A_l\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) + A_z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}。 \quad (4.5—29)$$

对于 x 和 y 方向的运动方程(4.3—30)和(4.3—41)也可近似地以 ρ_0 代替 ρ,得到

$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x} - 2\omega\sin\varphi v + 2\omega\cos\varphi w + A_l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{4.5—30}$$

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial v} + 2\omega\sin\varphi v + A_l\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right) + A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}。 \tag{4.5—31}$$

像这样,在海水运动基本方程中,近似认为海水不可压缩,以体积连续方程$\nabla \cdot V$ 来描述海水的连续性,微小的密度扰动 ρ' 仅在 z 方向的运动方程中对阿基米德浮力项$\frac{\rho'}{\rho}g$ 有意义,而其余方程中均以 ρ_0 近似代替 ρ,都是接近海洋实际的。这些近似称之为 Boussinesq 近似。

4.5.3 常用的几种简化方程组

根据前面对基本方程的尺度分析,可以得出常用的几种简化方程组

1. 大尺度运动的方程组

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}-fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\
&0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g,\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\\
&\frac{d\theta}{dt}=K_{\theta z}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+K_{\theta l}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right),\\
&\frac{ds}{dt}=K_{sz}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}+K_{sl}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right),\\
&\rho=\rho(s,\theta,p)。
\end{aligned}\right\}\qquad(4.5—32)
$$

2. 考虑侧边界影响而运动的垂直尺度与 Ekman 深度同量级的大尺度运动的方程组

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+A_l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+A_l\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right),\\
&0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g,\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\\
&\frac{d\theta}{dt}=K_{\theta z}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}+K_{\theta l}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right),\\
&\frac{ds}{dt}=K_{sz}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}+K_{sl}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right),\\
&\rho=\rho(s,\theta,p)。
\end{aligned}\right\}
$$

(4.5—33)

3. 小尺度运动的方程组

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}\\
&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\
&\frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}\\
&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_l\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\\
&\frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}\\
&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g+A_l\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)+A_z\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\\
&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0\\
&\frac{d\theta}{dt}=K_{\theta l}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)+K_{\theta z}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\\
&\frac{ds}{dt}=K_{sl}\left(\frac{\partial^2 s}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 s}{\partial y^2}\right)+K_{sz}\frac{\partial^2 s}{\partial z^2}\\
&\rho=\rho(s,\theta,p)
\end{aligned}
\right\}\quad(4.5\text{—}34)
$$

4. 均质海水中考虑静压假定的铅直向平均运动的方程组

$$
\left.
\begin{aligned}
&\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t}+\langle v\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x}+\langle v\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}-f\langle v\rangle \\
&=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}+A_l\left(\frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial y^2}\right) \\
&+\frac{A_z}{h+\zeta}\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{\zeta}-\frac{A_z}{h+\zeta}\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{-h}, \\
&\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t}+\langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial x}+\langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y}-f\langle u\rangle \\
&=-g\frac{\partial\zeta}{\partial y}+A_l\left(\frac{\partial^2\langle v\rangle}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\langle v\rangle}{\partial y^2}\right) \\
&+\frac{A_z}{h+\zeta}\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{\zeta}-\frac{A_z}{h+\zeta}\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{-h}, \\
&\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial[(h+\zeta)\langle u\rangle]}{\partial x}+\frac{\partial[(h+\zeta)\langle v\rangle]}{\partial y}=0
\end{aligned}
\right\}
\tag{4.5—35}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}&=-\frac{1}{\rho(h+\zeta)}\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)\langle p\rangle] \\
&+\frac{p_{\zeta}}{\rho(h+\zeta)}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{p_{-h}}{\rho(h+\zeta)}\frac{\partial h}{\partial x}, \\
-g\frac{\partial\zeta}{\partial y}&=-\frac{1}{\rho(h+\zeta)}\frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)\langle p\rangle] \\
&+\frac{p_{\zeta}}{\rho(h+\zeta)}\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{p_{-h}}{\rho(h+\zeta)}\frac{\partial h}{\partial y}。
\end{aligned}
$$

（利用流体静压强表达式 $p=p_{\zeta}+\rho g(\zeta-z)$ 可以证明以上两个等式成立）。

$$
\begin{aligned}
A_l\frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial x^2}\ &\text{表示}\frac{1}{h+\zeta}\frac{\partial}{\partial x}\left[(h+\zeta)A_{xx}\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x}\right]- \\
&\frac{A_{xx}}{h+\zeta}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{A_{xx}}{h+\zeta}\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{-h}\frac{\partial h}{\partial x}, \\
A_l\frac{\partial^2\langle u\rangle}{\partial y^2}\ &\text{表示}\frac{1}{h+\zeta}\frac{\partial}{\partial y}\left[(h+\zeta)A_{xy}\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}\right]-
\end{aligned}
$$

$$\frac{A_{xy}}{h+\zeta}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}-\frac{A_{xy}}{h+\zeta}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{-h}\frac{\partial h}{\partial y},$$

$A_l\dfrac{\partial^2\langle v\rangle}{\partial x}$ 表示 $\dfrac{1}{h+\zeta}\dfrac{\partial}{\partial x}\left[(h+\zeta)A_{yx}\dfrac{\partial\langle v\rangle}{\partial x}\right]-$

$$\frac{A_{yx}}{h+\zeta}\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial x}-\frac{A_{yx}}{h+\zeta}\frac{\partial v}{\partial x}\Big|_{-h}\frac{\partial h}{\partial x},$$

$A_l\dfrac{\partial^2\langle v\rangle}{\partial y^2}$ 表示 $\dfrac{1}{h+\zeta}\dfrac{\partial}{\partial y}\left[(h+\zeta)A_{yy}\dfrac{\partial\langle v\rangle}{\partial y}\right]$

$$-\frac{A_{yy}}{h+\zeta}\frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{\zeta}\frac{\partial \zeta}{\partial y}-\frac{A_{yy}}{h+\zeta}\frac{\partial v}{\partial y}\Big|_{-\zeta}\frac{\partial h}{\partial y}。$$

5. 均质海水中铅直向平均的大尺度运动的方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t}-f\langle v\rangle=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x},\\
&\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t}+f\langle u\rangle=-g\frac{\partial\zeta}{\partial y},\\
&\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial h\langle u\rangle}{\partial x}+\frac{\partial h\langle v\rangle}{\partial y}=0。
\end{aligned}\right\}\qquad(4.5-36)$$

6. 均质海水中铅直向平均的球面潮波运动的方程组

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t}-2\omega\cos\theta\langle v\rangle=-\frac{g}{a\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}-\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda},\\
&\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t}+2\omega\cos\theta\langle u\rangle=\frac{g}{a}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}+\frac{1}{a}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta},\\
&\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{1}{a\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(-h\langle v\rangle\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\lambda}(h\langle u\rangle)\right]=0。
\end{aligned}\right\}$$

(4.5—37)

其中 ω 为地转角速率，a 为地转球平均半径，Ω 为天体引潮势，θ 为余纬度，λ 为经度，u 指向东为正，v 指向北为正。

第五章　海流

海流是海洋中发生的一种有相对稳定速度的非周期性流动。其流动速度在不同地区各不相同，有的可达 1m/s，有的仅 10^{-2}—10^{-1}m/s。海流的发生原因主要有两种，一种是受海面风力的作用，另一种是由于海面受热冷却不均、蒸发降水不匀所产生的温度、盐度从面密度分布不均匀。前一种原因是动力学的，所产生的海流称之为风生海流。在大洋区域由于受盛行风所产生的海流，具有独自体系，称之为风生环流。后一种原因是热力学的，所产生的海流称之为热盐环流。在浅水区域，这两种原因所形成的海流可以影响整个深度；在深水大洋，风生海流所影响的范围仅限于大洋的上层和中层，而热盐环流则既可以发生在大洋的上层和中层，又可以发生在大洋的深层。海流在由一个地区向另一个地区运动的过程中，必然拌随着海水物理性质的迁移。它们可能将温暖的海水带进寒冷地区，使海面空气增温，也可能将较冷的海水带进温暖地区，使海面空气降温，对所经地区的气候起调节作用。进入海洋中的污染物质也随着海流而搬迁。寒暖流交汇之处往往形成渔场。此外，海流对船舶、舰只运动也有影响。因此，海流已成为海洋科学中的重要研究课题之一。

本章主要讨论几种基本流动形式与规律，风生大洋环流的理论和基本特征，几种形式的热盐环流以及大洋风生—热盐环流的运动和变化规律。

§ 5.1 不考虑摩擦的定常流动——地转流

当不考虑海面风的作用时，远离沿岸的大洋中部的大尺度海水流动，基本上是接近水平的，并近似认为是定常的，因此流动是压强梯度力和 Coriolis 力平衡的产物。这种流动称之为地转流，是海洋中的一种最基本的流动形式。由于均匀密度场和非均匀密度场中，压强梯度力的分布规律不同，则相应的地转流也有所差异。为了区别起见，将均匀密度场中的地转流称为倾斜流，而非均匀密度场中的地转流称为梯度流。

5.1.1 梯度流

海水密度分布不均是由于海面受热、冷却、蒸发、降水等因时因地的差异以及由于风力作用导致的海水密度重新分布的结果。假定海洋深而宽广，所产生的运动是大尺度的。现在讨论这样一种情形：假定海面风力作用已停止和假定在相当长一段时间里海面温度变化和降水蒸发变化都不大，于是可以认为已形成的海水密度场、温度场和盐度场近似于定常，从而相应的海水运动也近似于定常。因此描述定常海流的大尺度运动基本方程可由(4.5—32)式简化并改为 z 轴向下为正的左手坐标系后得到

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv, \qquad (5.1—1)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - fu, \qquad (5.1—2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g, \qquad (5.1—3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{5.1—4}$$

$$u\frac{\partial \theta}{\partial x}+v\frac{\partial \theta}{\partial y}+w\frac{\partial \theta}{\partial z}=0, \tag{5.1—5}$$

$$u\frac{\partial s}{\partial x}+v\frac{\partial s}{\partial y}+w\frac{\partial s}{\partial z}=0, \tag{5.1—6}$$

$$\rho=f(s,\theta) \tag{5.1—7}$$

通常称(5.1—1)和(5.1—2)两式为地转方程，所描述的运动称之为梯度流。

由(5.1—1)和(5.1—2)两式可得梯度流水平分量

$$\left.\begin{aligned}u&=-\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial y}\\ v&=\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial x}\end{aligned}\right\} \tag{5.1—8}$$

将(5.1—1)式和(5.1—2)式交叉微分相减得

$$f\rho(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y})+f(u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y})$$
$$+\rho u\frac{\partial f}{\partial x}+\rho v\frac{\partial f}{\partial y}=0, \tag{5.1—9}$$

等价地有

$$f\rho(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z})-f\rho\frac{\partial w}{\partial z}+f(u\frac{\partial \rho}{\partial x}+v\frac{\partial \rho}{\partial y}+w\frac{\partial \rho}{\partial z})$$
$$-fw\frac{\partial \rho}{\partial z}+\rho u\frac{\partial f}{\partial x}+\rho v\frac{\partial f}{\partial y}=0。$$

利用(51—4)式，注意到$\frac{d\rho}{dt}=0$，以及定常情形$\frac{\partial \rho}{\partial t}=0$，$\frac{\partial f}{\partial x}=0$，$\frac{\partial f}{\partial y}=\beta$，结果上式变成

$$f\frac{\partial \rho w}{\partial z}=\beta\rho v,\tag{5.1—10}$$

近似地可取

$$f\frac{\partial w}{\partial z}=\beta v。\tag{5.1—11}$$

如果不考虑地球球状效应，则 $\beta=0$，从而 $\frac{\partial w}{\partial z}=0$。由(5.1—11)式可对铅直流速进行估值，可得

$$W=\frac{\beta D}{f}U\sim 2\times 10^{-4}U.\tag{5.1—12}$$

其中取 $\beta=2\times10^{-11}/\text{m}\cdot s$，$f=10^{-4}\text{s}^{-1}$，$D\sim10^{3}\text{m}$。可见铅直流速的大小相对于水平流速小得多，可取 $w=0$。因此一般可视地转运动为水平的。

将(5.1—1)式乘以 u，(5.1—2)式乘以 v，然后相加可得

$$\boldsymbol{V}_H\cdot\nabla_H p=0,\tag{5.1—13}$$

其中 $\boldsymbol{V}_H=u\boldsymbol{i}+v\boldsymbol{j}$，$\nabla_H=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}$。上式表明水平流速与压强梯度垂直，梯度流沿等压线方向流动。如果选取 $\boldsymbol{V}_H$ 的方向为 y 轴方向，并记 $\boldsymbol{V}_H$ 的大小为 v_g，则有

$$\frac{\partial p}{\partial y}=0,\ v_g=\frac{1}{f\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\tag{5.1—14}$$

由上式可知，因为 $v_g>0$，在北半球有 $f>0$，因此 $\frac{\partial p}{\partial x}>0$，即高压在运动方向的右边。

如果忽略 f 随 y 的变化，则由(5.1—9)式得

$$\boldsymbol{V}_H\cdot\nabla_H\rho=0。\tag{5.1—15}$$

因此梯度流沿等密度线流动，且流动方向的右边的密度小。

根据(5.1—5)和(5.1—6)式可写成

$$\boldsymbol{V}_H\cdot\nabla_H\theta=0,\tag{5.1—16}$$

$$\boldsymbol{V}_H\cdot\nabla_H s=0,\tag{5.1—17}$$

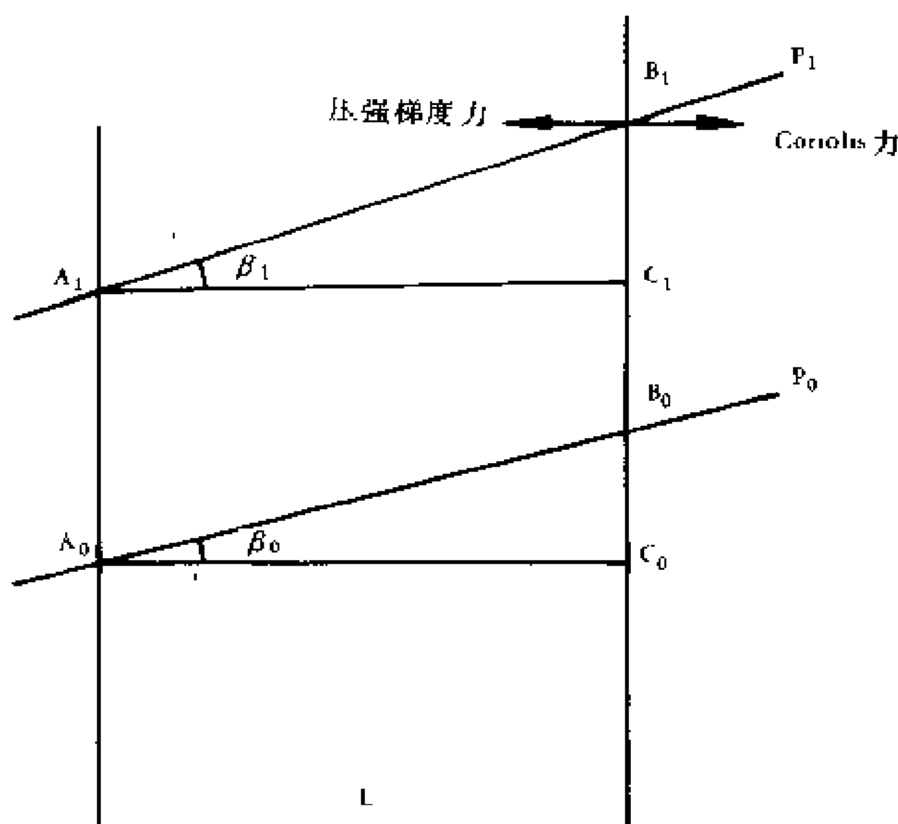


图 5—1　与梯度流方向垂直的断面

相差 dz 的两点的位势差为

$$d\varphi = -gdz(\mathrm{m^2/s^2}), \qquad (5.1—19)$$

于是 B_1 相对于 B_0 的位势和 A_1 相对于 A_0 的位势为

$$\varphi_0^1(B) = g\,\overline{B_1B_0}$$

$$\varphi_0^1(A) = g\,\overline{A_1A_0}$$

将它们代入(5.1—18)式后,(5.1—18)式变成

$$v_1 - v_0 = \frac{1}{fL}[\varphi_0^1(B) - \varphi_0^1(A)]。 \qquad (5.1—20)$$

这就是 Helland—Hansen 公式(Sandstrom and Helland—Hansen, 1903)。该式表明:上等压面 p_1 上的梯度流流速 v_1 与下等压面 p_0 上的梯度流流速 v_0 之差由 A、B 两站的相对位势 $\varphi_0^1(A)$ 与 $\varphi_0^1(B)$ 之

表明流动沿等温线流动，流动右方温度高，流动也沿等盐度线流动，其右方的盐度低。

依以上几点结论，可在水文要素平面分布图上定性地分析梯度流的运动规律。

应该强调指出的是，梯度流公式(5.1—8)对于 $f=0$ 的情况不适用。因为 $f=0$ 时，$u,v\to\infty$，这在实际海洋中是不可能的。原因是在我们导出(5.1—8)式时，必须规定 $f\neq0$。在赤道上，因 $f=0$，一般来说，$\frac{\partial p}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial p}{\partial y}$ 又不为零，因此地转平衡就不存在了。

从理论上说，利用各深度上的压强梯度值和密度值，便可由(5.1—8)式求得各深度的梯度流水平分量 u 和 v。事实上，等压面的倾斜非常小，例如在 $\varphi=45°$ 处，若产生 1m/s 的梯度流，等压面倾角的正切仅为 10^{-5}，即在 100km 范围内，海面仅升高 1m，像这样小的倾角是无法测量的。因此计算梯度流时是利用较易观测到的温度和盐度资料，用 Helland—Hansen 公式进行计算。

5.1.2 梯度流的计算

如图 5—1 所示，在与海流垂直的断面上有 A、B 两站，两站之间的水平距离为 L。任意选取两个等压面 p_1 和 p_0，A_1、A_0 和 B_1、B_0 为等压面 p_1 和 p_0 与过 A、B 两站的铅直线相交之交点。设 β_1 和 β_0 分别为等压面 p_1 和 p_0 的倾角。由于压强梯度力与 Coriolis 力相平衡，于是由图可得下列关系

$$\tan\beta_1=\frac{fv_1}{g}=\frac{B_1C_1}{L}=\frac{B_1C_0-A_1A_0}{L},$$

$$\tan\beta_0=\frac{fv_0}{g}=\frac{B_0C_0}{L}。$$

将以上两式相减后可得

$$v_1-v_0=\frac{g}{fL}(B_1B_0-A_1A_0)。\qquad(5.1—18)$$

差决定。

根据静压方程(5.1—3)有

$$dp = \rho g dz(p_a), \tag{5.1—21}$$

其中 ρ 以 kg/m³ 表示。由(5.1—19)式(5.1—21)式有

$$d\varphi = -\frac{1}{\rho}dp = -\alpha dp,$$

由此得

$$\varphi_0^1(B) = -\int_{p_0}^{p_1}\alpha_B dp, \quad \varphi_0^1(A) = -\int_{p_0}^{p_1}\alpha_A dp. \tag{5.1—22}$$

代入(5.1—20)式后,相对流速可表为

$$v_1 - v_0 = \frac{1}{fL}\left[\int_{p_1}^{p_0}\alpha_B dp - \int_{p_1}^{p_0}\alpha_A dp\right]$$

$$\approx \frac{1}{fL}\left(\sum_{p_1}^{p_0}\bar{\alpha}_B\triangle p - \sum_{p_1}^{p_0}\bar{\alpha}_A\triangle p\right)。 \tag{5.1—23}$$

其中 $\bar{\alpha}$ 为 $\triangle p$ 范围内的平均值。由于压强 p 以 p_a 表示,比容 α 以 m³/kg 表示,L 以 m 表示,$f=2\omega\sin\varphi$,$\omega=7.29\times10^{-5}$/s,因此流速 v 以 m/s 表示。应该指出的是,在导出(5.1—23)式的过程中,认为等压面 p_1(或 p_0)在 A 站和 B 站具有相同的倾斜角 β_1(或 β_0)。当 A 和 B 站之间的距离 L 很小时,这样处理是精确的,但是当 L 很大时,β_1(或 β_0)只能表示两站等压面的平均倾斜角,因面(5.1—23)式在这种情况下只是给出 A 站和 B 站的相对流速的平均值。在原则上,只要根据 A 站和 B 站在不同深度层次上观测到的温度和盐度,(5.1—23)式就可以计算。由于根据静压方程 $dp=\rho g dz$,$\rho\approx$ 1035kg/m³,$\rho g\approx 1.014\times10^4 p_a$/m,因此计算时可近似地可用深度来表示压力,即 $p=10^4 z$,$\triangle p=10^4\triangle z$。

(5.1—23)式给出的是相对流速,面我们需要了解的是绝对流速,因而希望能找到一个流速为零的等压面,称为零面。具体的确定方法是:将每个站从海面向下分成若干层,每层厚度为 $\triangle z$($\triangle p=$

$10^4\Delta z$）；由海面向下逐步计算 $\sum_0^{\Delta z}\bar{\alpha}_A\Delta z$ 和 $\sum_0^{\Delta z}\bar{\alpha}_B\Delta z$，$\sum_0^{2\Delta z}\bar{\alpha}_A\Delta z$ 和 $\sum_0^{2\Delta z}\bar{\alpha}_B\Delta z$，$\sum_0^{3\Delta z}\bar{\alpha}_A\Delta z$ 和 $\sum_0^{3\Delta z}\bar{\alpha}_B\Delta z$，……；按公式(5.1—22)计算海面相对不同深度的位势，即计算 $\varphi'_{\Delta z}(A)=10^4\sum_0^{\Delta z}\bar{\alpha}_A\Delta z$ 和 $\varphi'_{\Delta z}(B)=10^4\sum_0^{\Delta z}\bar{\alpha}_B\Delta z$，$\varphi'_{2\Delta z}(A)=10^4\sum_0^{2\Delta z}\bar{\alpha}_A\Delta z$ 和 $\varphi'_{2\Delta z}(B)=10^4\sum_0^{2\Delta z}\bar{\alpha}_B\Delta z$，……；计算相对同一深度的 A、B 两站位势之差，即求 $\varphi'_{\Delta z}(A)-\varphi'_{\Delta z}(B)$，$\varphi'_{2\Delta z}(A)-\varphi'_{2\Delta z}(B)$，……；最后绘制 $\varphi'_{n\Delta z}(A)-\varphi'_{n\Delta z}(B)$ 对深度 $n\Delta z$ 的曲线，并取随深度几乎不变的铅直线段之中点所对应的深度作为速度零面(图 5—2)。

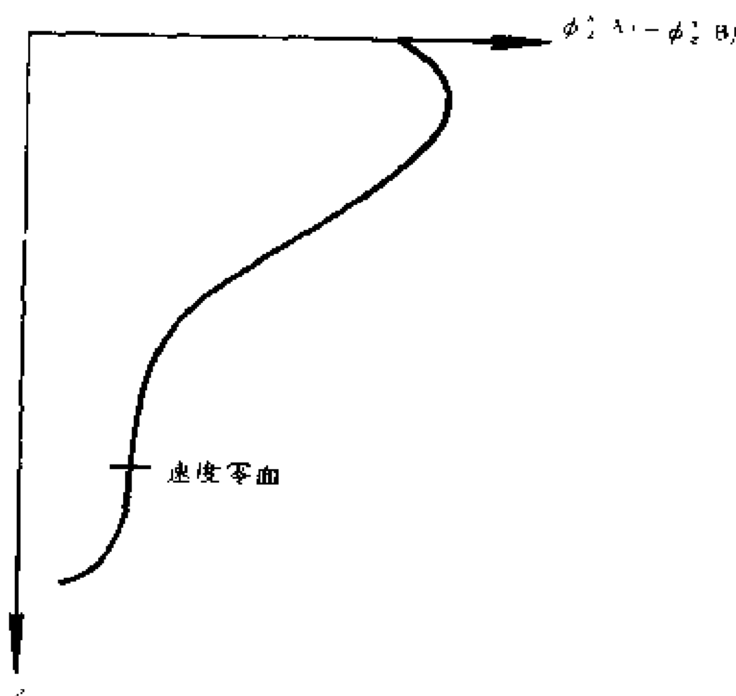


图 5—2 相对同一深度的两站位势之差随深度变化示意图

5.1.3 倾斜流

均匀密度海洋中的地转流称为倾斜流。这种运动与热力学问题无关，可由下列运动方程和连续方程来描述

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + fv, \qquad (5.1—24)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} - fu, \qquad (5.1—25)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + g, \qquad (5.1—26)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0。 \qquad (5.1—27)$$

由于密度 ρ=常量，则由静力方程(5.1—26)可得

$$p = p_a + \int_\zeta^z \rho g dz = p_a + \rho g(z-\zeta), \qquad (5.1—28)$$

将(5.1—28)式代入(5.1—24)式和(5.1—25)式中，得

$$\left.\begin{aligned} fv &= g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ fu &= g\frac{\partial \zeta}{\partial y}。 \end{aligned}\right\} \qquad (5.1\text{-}29)$$

上面使用了大气压强 p_a 为常量的假定。

如将(5.1—29)的第一式和第二式分别乘以 u 和 v，然后相加得

$$V_H \cdot \nabla\zeta = 0, \qquad (5.1—30)$$

可知倾斜流沿等水位线流动。倾斜流流动方向的确定与梯度流方向的确定类似，选取倾斜流的方向为 y 轴的方向，其大小记为 v，于是得

$$\frac{\partial\zeta}{\partial y}=0, v=-\frac{g}{f}\frac{\partial\zeta}{\partial x}。\quad (5.1\text{-}31)$$

由于 $v>0, f>0$，因此$\frac{\partial\zeta}{\partial x}<0$，表明流动方向的右边为高水位。(5.1—31)式还表明均匀海洋中的海面坡度可作为倾斜流大小的度量，并且由于 ζ 仅为 x 和 y 的函数，故倾斜流从海面一直到海底的整个水柱具有相同的速度。

§5.2　考虑摩擦的定常运动

前节讨论了非均匀密度场中在不受风力作用情况下的地转运动，这一节研究均匀密度场中由风力所产生的运动——风生海流。因为密度是均匀的，这实际上仅仅考虑动力学问题。

5.2.1　无限深海的漂流

当定常恒速的风经久地作用于无限广阔的海面时，产生一种定常的运动，称之为漂流。对于这种流动可以得到一种严格的解。漂流理论为 Ekman(1905)所首创，因而又称之为 Ekman 漂流理论。

由于 Ekman 漂流可以发生在不同水深的海区，故漂流理论分为无限深海漂流和有限深海漂流两种情形。对于无限深海的漂流，海底对其不起影响，而有限深海的漂流，海底的摩擦效应必须考虑。这一小节讨论无限深海的漂流，有限深海的漂流在下一小节讨论。

在远离海岸的深水大洋里，当定常持久的风力作用于海面时，所产生的大尺度流动是定常的。由于风生海流的实际铅直尺度 D 与 Ekman 深度同量级(这将在后面的讨论中得到证明)，因此铅直湍流摩擦力必须考虑。此外，假定海水密度是常量，持续的定常风力又是均匀的，因此认为海面无升降，水平压强梯度力为零。根据

以上情况，漂流是铅直湍流所产生的摩擦力与 Coriolis 力相平衡的产物。描述该运动的基本方程可由方程组(4.5—33)简化后得到

$$\left.\begin{aligned}0 &= fv + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\0 &= -fu + A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\\\frac{\partial u}{\partial x} &+ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0。\end{aligned}\right\}\tag{5.2—1}$$

像在地转流研究中一样，取坐标系为左手坐标系，即取 z 轴向下为正。设风力仅沿 y 方向作用，且为恒速，即风应力 $\tau_x=0$，$\tau_y=$常量；又海为无限深，因此求解方程(5.2—1)的相应边界条件是

$$\left.\begin{aligned}&z=0(\text{海面}):\rho A_z\frac{\partial u}{\partial z}=0,\rho A_z\frac{\partial v}{\partial z}=-\tau_y;\\&z\to\infty \qquad\qquad u=v=0。\end{aligned}\right\}\tag{5.2—2}$$

为了求解方便，引进复数形式的速度 W 和复数形式的风应力 τ，即

$$\begin{aligned}W &= u + iv,\\\tau &= \tau_x + i\tau_y。\end{aligned}\tag{5.2—3}$$

于是(5.2—1)式中的两个运动方程可合并写成

$$\frac{d^2W}{dz^2}-j^2W=0,\tag{5.2—4}$$

其中

$$j^2=\frac{if}{A_z}=\frac{(1+i)^2f}{2A_z}=(1+i)^2a^2,$$

$$a=\sqrt{\omega\sin\varphi/A_z}。$$

边界条件相应地改为

$$\left.\begin{aligned}&z=0 \qquad \rho A_z\frac{\partial W}{\partial z}=-\tau,\\&z\to\infty \qquad\qquad W=0。\end{aligned}\right\}\tag{5.2—5}$$

(5.2—4)式的一般解为

$$W = Ae^{jz} + Be^{-jz}, \tag{5.2—6}$$

运用海底边界条件有 $A=0$，运用海面边界条件得 $B=\tau/(j\rho A_z)$，于是(5.2—6)变成

$$W = \frac{\tau}{jA_z\rho}e^{-jz} = \frac{\tau_y}{\sqrt{2}\,a\rho A_z}e^{-az+i(\frac{\pi}{4}-az)}。 \tag{5.2—7}$$

如果引进深度 D_0，它定义为

$$D_0 = \pi/a = \pi\sqrt{A_z/\omega\sin\varphi}, \tag{5.2—8}$$

于是(5.2—7)式可转写成

$$W = \frac{\tau_y}{\sqrt{2}\,aA_z\rho}e^{-\frac{\pi}{D_0}z+i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{D_0}z)}, \tag{5.2—9}$$

其分量形式为

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\tau_y}{\sqrt{2}\,aA_z\rho}e^{-\frac{\pi}{D_0}z}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{D_0}z\right),\\ v &= \frac{\tau_y}{\sqrt{2}\,aA_z\rho}e^{-\frac{\pi}{D_0}z}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{D_0}z\right)。\end{aligned}\right\} \tag{5.2—10}$$

根据(5.2—9)式，在海面 $z=0$ 处的漂流

$$W_0 = \frac{\tau_y}{\sqrt{2}\,aA_z\rho}e^{i\frac{\pi}{4}},$$

其大小 $|W_0| = \dfrac{\tau_y}{\sqrt{2}\,aA_z\rho}$，其方向与 x 轴成 45°。在任意深度 z 处，漂流的量值为 $|W_z| = \dfrac{\tau_y}{\sqrt{2}\,aA_z\rho}e^{-\frac{\pi}{D_0}z}$，说明流速随深度增加而呈指数形式减小，而式中 $e^{i(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{D_0}z)}$ 部分表明流向随深度加大而向右偏。于 $z=D_0$ 处，流的大小为 $|W_{D_0}| = \dfrac{\tau_y e^{-\pi}}{\sqrt{2}\,aA_z\rho} = e^{-\pi}|W_0| = 0.043|W_0|$，即为海面漂流量值的百分之四，而 $z=D_0$ 处的流向与 x 轴成 $-145°$，即与海面的流向相反。图 5—3 示出了漂流大小和方向随深度的变化，流矢量端点的连线所构成的曲线为 Ekman 螺旋，而它在水平

面上的投影为 Ekman 螺线。

以上讨论的是在北半球的情况。如果在南半球，则漂流大小随深度而减小，流向随深度增加而不断向左偏。

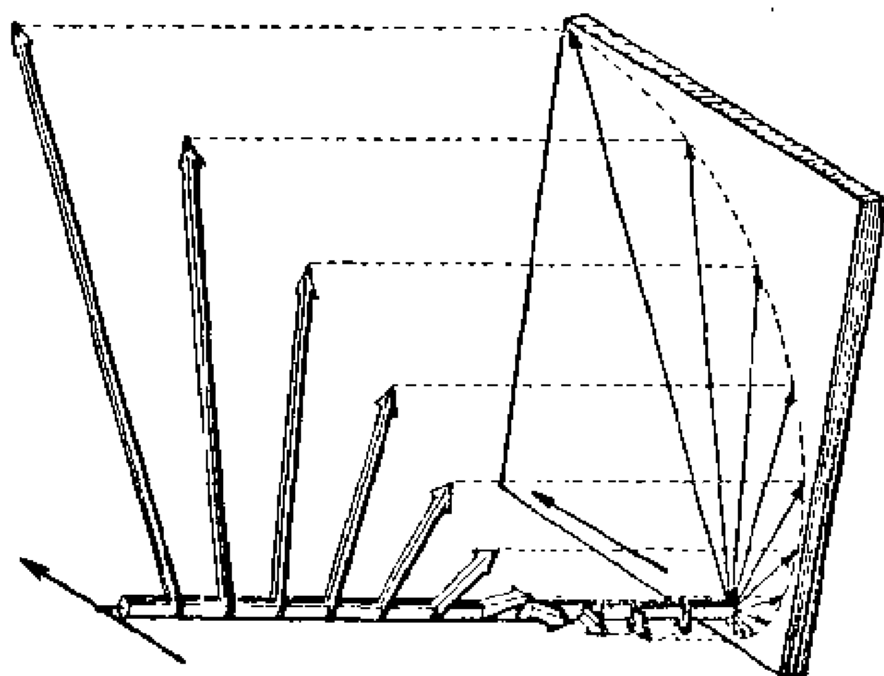


图 5—3 无限深海的漂流(北半球)

将(5.2—10)式对深度 z 从 0 到 ∞ 积分，得无限深海漂流的水平体积运输

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \int_0^\infty u dz = \frac{\tau_y}{2\omega \sin\varphi \rho}, \\ S_y &= \int_0^\infty v dz = 0。 \end{aligned}\right\} \tag{5.2—11}$$

可见水平体积运输只存在于与风向垂直的方向上，于北半球朝风向之右方输送，于南半球朝风向的左方输送。

将漂流表达式(5.2—9)对 z 求导并乘以 $-\rho A_z$，得铅直湍流水平切应力表达式

$$\tau'_z = -\rho A_z \frac{\partial W}{\partial z} = \tau_y \exp\left[-\frac{\pi}{D_0}z + i\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{D_0}z\right)\right], \tag{5.2—12}$$

其分量为

$$
\left.\begin{aligned}
\tau'_{zx} &= \tau_y e^{-\frac{\pi}{D_0}z}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{D_0}z\right),\\
\tau'_{zy} &= \tau_y e^{-\frac{\pi}{D_0}z}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{D_0}z\right)。
\end{aligned}\right\}\qquad(5.2—13)
$$

(5.2—12)或(5.2—13)式说明了湍流切应力随深度变化的特性。在海面 $z=0$ 处，$\tau'_0=\tau_y$。于任意深度处，切应力的量值 $|\tau'_z|=\tau_y e^{-\frac{\pi}{D_0}z}$，表明其量值随深度以指数形式减小；由 $e^{i(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{D_0}z)}$ 可以断定切应力的方向随深度的增加而向右偏。在 $z=D_0$ 处，$|\tau'_{D_0}|=\tau_y e^{-\pi}=0.043|\tau'_0|$，切应力的方向与 x 轴成—90°的角，它正好与海面的风向相反。由此可见，无限深海的铅直湍流的水平切应力也构成一个与 Ekman 螺旋完全相似的螺旋，只不过两者方向相差 45°。

在以风生海流为主的大洋和深海区域，实测流基本上符合以上所讨论的流动规律，特别是流偏角 α(表面漂流方向偏离风向之角)的符合程度很好。例如在我国南海，根据大量实测资料统计结果发现，流偏角在 0—45°之间的出现率最高，如图 5—4 所示。

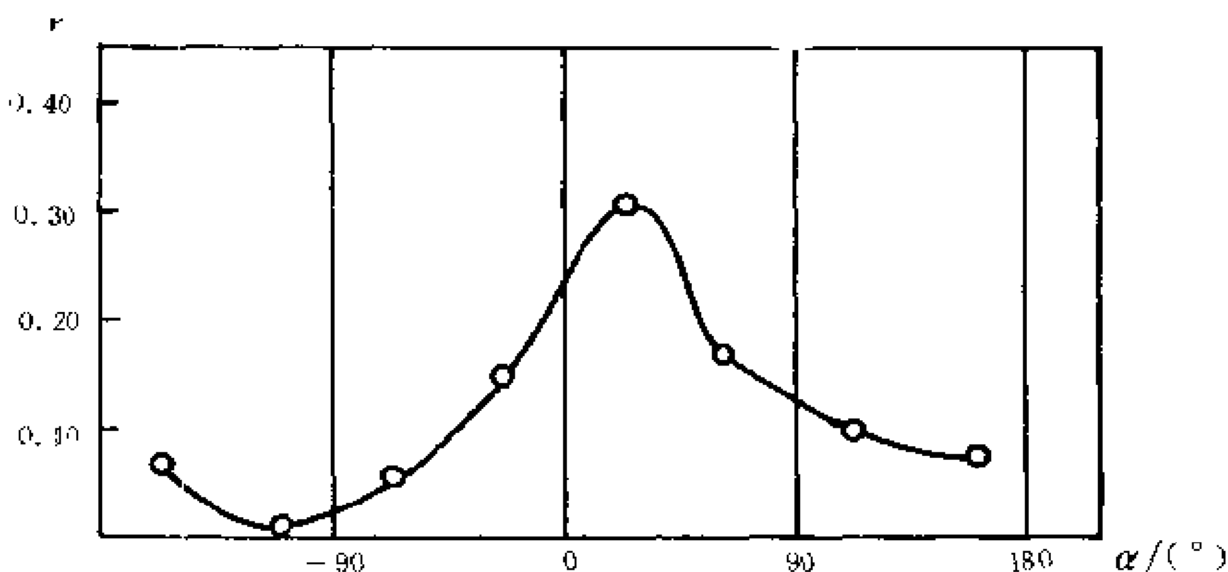


图 5—4　南海流偏角出现率

由前面的讨论已经知道，无限深海的漂流流速在距海面深度

为 D_0 之处已仅为海面流速的 0.043 倍了，因此漂流仅存在于深海大洋的薄薄的一上层中，此层称为 Ekman 边界层。过去曾把(5.2—8)式所定义的深度 D_0 叫做 Ekman 深度或 Ekman 摩擦深度，但现在根据 1985 年 UNESCO *No.* 45 的规定，Ekman 深度定义为 $D=\sqrt{\frac{A_z}{\omega\sin\varphi}}$，而不是像(5.2—8)式所定义的 $D_0=\pi\sqrt{\frac{A_z}{\omega\sin\varphi}}$。两者相差一个因子 π。

5.2.2 有限深海的漂流

当讨论有限深海的漂流时，除了需要引进一个深度有限的假定而外，其余的假定与无限深海的情形一样。描述有限深海漂流的运动方程和连续方程仍然为(5.2—1)式：

$$\left.\begin{aligned} 0 &= fv + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ 0 &= -fu + A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &+ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{aligned}\right\} \tag{5.2—1}$$

只是边界条件应改为

$$\left.\begin{aligned} &z = 0\text{ 处}, \rho A_z\frac{\partial u}{\partial z} = 0, \rho A_z\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \\ &z = h(\text{海底})\text{ 处}, u = v = 0。\end{aligned}\right\} \tag{5.2—14}$$

作变量代换 $z=h-\xi$，于是运动方程和边界条件变为

$$\left.\begin{aligned} 0 &= fv + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}, \\ 0 &= -fu + A_z\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}, \end{aligned}\right\} \tag{5.2—15}$$

$$\left.\begin{array}{ll}\text{在海面 } \xi = h \text{ 处} & \rho A_z \dfrac{\partial u}{\partial \xi} = 0, \rho A_z \dfrac{\partial v}{\partial \xi} = \tau_y, \\ \text{在海底 } \xi = 0 \text{ 处} & u = v = 0。\end{array}\right\} \tag{5.2—16}$$

类似于无限深海漂流求解时的情形，引进复数速度 $W = u + iv$，复数应力 $\tau = \tau_x + i\tau_y$，结果可得满足边界条件的解

$$W = \frac{(1+i)\tau_y}{2aA_z\rho}\frac{\mathrm{sh}(1+i)a\xi}{\mathrm{ch}(1+i)ah}, \tag{5.2—17}$$

其分量形式为

$$\left.\begin{aligned} u &= A\mathrm{sh}a\xi\cos a\xi - B\mathrm{ch}a\xi\sin a\xi, \\ v &= A\mathrm{ch}a\xi\sin a\xi + B\mathrm{sh}a\xi\cos a\xi, \end{aligned}\right\} \tag{5.2—18}$$

式中

$$A = \frac{\tau_y}{aA_z\rho}\frac{\mathrm{ch}ah\cos ah + \mathrm{sh}ah\sin ah}{\mathrm{ch}2ah + \cos 2ah},$$

$$B = \frac{\tau_y}{aA_z\rho}\frac{\mathrm{ch}ah\cos ah - \mathrm{sh}ah\sin ah}{\mathrm{ch}2ah + \cos 2ah}。$$

下面对有限深漂流的解(5.2—17)或(5.2—18)进行一些讨论。

在海面 $\xi = h$ 处，由(5.2—17)式和(5.2—18)式得

$$W_0 = \frac{(1+i)\tau_y}{2aA_z\rho}\mathrm{th}(1+i)ah, \tag{5.2—19}$$

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \frac{\tau_y}{2aA_z\rho}\frac{\mathrm{sh}2ah - \sin 2ah}{\mathrm{ch}2ah + \cos 2ah}, \\ v_0 &= \frac{\tau_y}{2aA_z\rho}\frac{\mathrm{sh}2ah + \sin 2ah}{\mathrm{ch}2ah + \cos 2ah}。\end{aligned}\right\} \tag{5.2—20}$$

由(5.2—20)式得表面漂流流向与风向之间的夹角(表层流流偏角)

$$\alpha_0 = \arctan\frac{u_0}{v_0} = \arctan\frac{\mathrm{sh}2ah - \sin 2ah}{\mathrm{sh}2ah + \sin 2ah}。 \tag{5.2—21}$$

按(5.2—21)式和(5.2—20)式，取不同海深 h 进行计算，求得表层流偏角 α_0 和表层流大小 $|W_0|=\sqrt{u_0^2+v_0^2}$；再求出 $|W_0|$ 与无限深海的表层漂流流速大小 $\tau_y/(\sqrt{2}\,aA_z)$ 之比值 r_0；然后将不同 h 情况下的 α_0 和 r_0 列制成表 5－1。由表可以看出，当相对水深 $h/D_0\geqslant 2$ 时，表面漂流的大小和方向均与无限深海的表面漂流大小和方向一致；当相对水深 $h/D_0<2$ 时，表面漂流比值 r_0 在 1 左右变动，表面流偏角在 45°左右变动；特别是在相对水深 h/D_0 很小时，r_0 和 α_0 都很小。

表 5－1　不同海深 h 情况下的表层流偏角 α_0 和表层流大小与无限深海表层流大小之比值 r_0［D_0 依(5.2－8)式定义］

h/D_0	1/10	1/4	1/2	3/4	1	2	∞
$\alpha_0/(°)$	3.7	21.5	45	45.5	45	45	45
$r_0=\lvert W_0\rvert/\frac{\tau_y}{\sqrt{2}\,aA_z}$	0.6027	1.0904	1.0948	1.0002	0.9963	1.0000	1.0000

直接从(5.2－17)式或(5.2－18)式计算有限深海漂流大小和方向随深度的变化。图 5－5 示出了相对水深 $h/D_0=0.1, 0.25, 0.5$ 和 1.25 情况下的 Ekman 螺线。可以看出：海深越浅，流速随深度增加而向右偏转的角度越小；在水深很浅的海洋里，漂流从表面到海底几乎都沿着风向流动；海深越深，漂流随深度增加所发生的变化就越接近无限深海漂流的情形。

将 $z=h-\xi$ 代入有限深海漂流公式(5.2－17)式得

$$W=\frac{(1+i)\tau_y}{2aA_z\rho}\frac{\operatorname{sh}(1+i)a(h-z)}{\operatorname{ch}(1+i)ah}$$

$$=\frac{(1+i)\tau_y}{2aA_z\rho}[\operatorname{th}(1+i)ah\cdot\operatorname{ch}(1+i)az-\operatorname{sh}(1+i)az],$$

当 $h\geqslant 2D_0$ 时，$\operatorname{th}(1+i)ah\rightarrow 1$，于是有

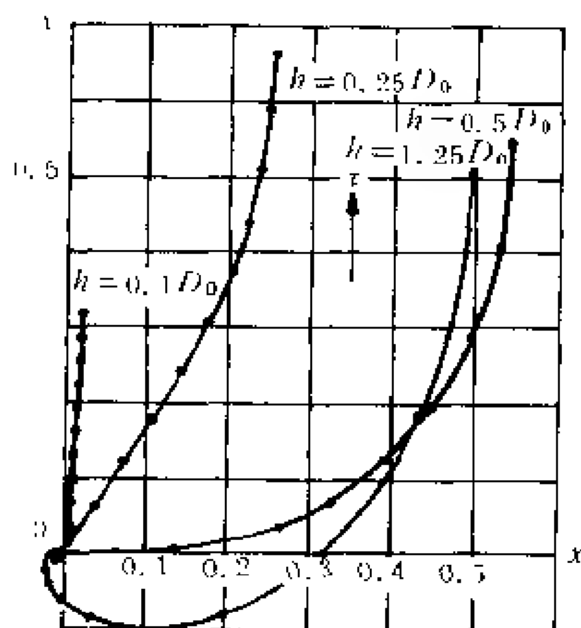


图 5—5　有限深海的漂流

$$W=\frac{(1+i)\tau_y}{2aA_z\rho}[\mathrm{ch}(1+i)az-\mathrm{sh}(1+i)az]$$

$$=\frac{(1+i)\tau_y}{2aA_z\rho}e^{-(1+i)az}$$

$$=\frac{\tau_y}{\sqrt{2}\,aA_z\rho}e^{-az+i(\frac{\pi}{4}-az)},\qquad(5.2—22)$$

显然该式与无限深海漂流表达式(5.2—7)一致。

将有限深海漂流的水平流速(5.2—17)式对 ξ 从海底到海面积分得

$$S=\int_0^h Wd\xi=\frac{\tau_y}{2a^2A_z\rho}\Big[\frac{\mathrm{ch}2ah+\cos2ah-2\mathrm{ch}ah\cos ah}{\mathrm{ch}2ah+\cos2ah}$$

$$+i\,\frac{2\mathrm{sh}ah\sin ah}{\mathrm{ch}2ah+\cos2ah}\Big],\qquad(5.2—23)$$

其实部和虚部为

$$
\left.\begin{aligned}
S_x &= \frac{\tau_y}{2a^2A_z\rho}\frac{\mathrm{ch}2ah + \cos2ah - 2\mathrm{ch}ah\cos ah}{\mathrm{ch}2ah + \cos2ah},\\
S_y &= \frac{\tau_y}{a^2A_z\rho}\frac{\mathrm{sh}ah\sin ah}{\mathrm{ch}2ah + \cos2ah}。
\end{aligned}\right\} \quad (5.2-24)
$$

由(5.2—24)式看，有限深海漂流的体积输送与无限深海的不同，除了有 x 方向(即向风向的右方)的输送而外，还有沿 y 方向(沿风向)的输送。S_x 恒为正值，而 S_y 则有时为正，有时为负。当 $0<h\leqslant D_0$ 时，$ah\leqslant\pi$，因此 $s_y\geqslant0$；当 $D_0<h\leqslant2D_0$ 时，$\pi<ah\leqslant2\pi$，因此 $S_y\leqslant0$；当 $h>2D_0$ 时，(5.2—24)式简化成

$$
S_x = \frac{\tau_y}{2a^2A_z\rho},\quad S_y = 0, \qquad (5.2-25)
$$

与无限深海漂流的体积输送情形一样。

将(5.2—17)式对 z 求导并乘以($-\rho A_z$)便得到有限深海漂流的湍流应力表达式

$$
\tau'_z = -\rho A_z\frac{\partial W}{\partial z} = i\tau_y\frac{\mathrm{ch}(1+i)a\xi}{\mathrm{ch}(1+i)ah}。 \qquad (5.2-26)
$$

分解为实部和虚部后得

$$
\left.\begin{aligned}
\tau'_{zx} &= A_1\mathrm{ch}a\xi\cos a\xi - B_1\mathrm{sh}a\xi\sin a\xi,\\
\tau'_{zy} &= A_1\mathrm{sh}a\xi\sin a\xi + B_1\mathrm{ch}a\xi\cos a\xi,
\end{aligned}\right\} \qquad (5.2-27)
$$

其中

$$
A_1 = \frac{2\tau_y\mathrm{sh}ah\sin ah}{\mathrm{ch}2ah + \cos2ah},
$$

$$
B_1 = \frac{2\tau_y\mathrm{ch}ah\cos ah}{\mathrm{ch}2ah + \cos2ah}。
$$

应力 τ'_z 与风向的夹角为

$$
\beta = \arctan\frac{\tau'_{zx}}{\tau'_{zy}}。 \qquad (5.2-28)
$$

由(5.2—27)式和(5.2—28)式可以计算出应力大小和方向随深度的变化：大小随深度增加而减小，其方向在北半球随深度增加也是逐渐向右偏。

5.2.3 漂流的分离

实测海流资料是包括各种流动在内的综合结果，既有周期性的流动，也有非周期性的流动，既有定常的流动，也有非定常的流动。作为分离的第一步，应先将周期性流动分离出去，获得余流资料。第二步将漂流从余流资料中分离出来。下面介绍的几种漂流分离方法比较粗糙，其中假定余流由两部分组成：一是漂流，一是恒量的常流。

1. 利用风速量值相等但风向相反时观测到的两个余流来分离漂流。

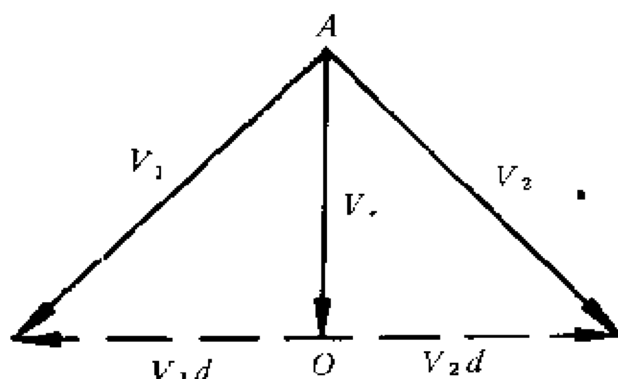


图 5－6 利用一对风速大小相同风向相反的实测余流分离漂流（虚线向量为漂流）

由漂流理论知道，相同风速在固定海区所产生的漂流量值是相等的，其方向与风向的偏角也是相同的；相反风向产生的漂流方向相反。据此，可以使用作图法从余流中把漂流分离出来。如图 5—6 所示，测流站 A 有二个余流向量 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$，分别表示风速相等而风向相反的风况 I 和风况 Ⅱ 时的实测余流。联结向量 $\boldsymbol{V}_1$ 和 $\boldsymbol{V}_2$ 的端点，找出线段的中点 0，则由 $\boldsymbol{A}$ 点指向 0 点的向量 $\boldsymbol{V}_r$ 为恒定常流，由 0 点指向 $\boldsymbol{V}_1$ 端点的向量 $\boldsymbol{V}_{1d}$ 和由 0 点指向 $\boldsymbol{V}_2$ 端点的向量 $\boldsymbol{V}_{2d}$ 分别为风况 I 时的漂流和风况 Ⅱ 时的漂流。

2. 利用一组风速大小相同风向各不相同时的实测余流分离漂流

当资料较多时，可抽出一组风速大小相近但风向不同的测流

资料来进行分析。由于风速大小相等，因此在固定测站所产生的漂流大小相同、流偏角一样。故而漂流的向量端点应落在同一个圆周上。如前所述，由于近似认为实测余流由恒定常流与漂流构成，因此可以以测流站 A 为中心，将风速大小相等但风向不同的实测余流作向量图，然后过向量的端点作一圆并求得圆心 0，最后作由 0 指向余流向量端点的向量，便求得漂流。如图 5—7 所示，实线向量 V_1，V_2……为实测余流，以圆心 0 为中心的虚线向量 V_{1d}，V_{2d}……为漂流，由 A 指向圆心 0 的向量 V_r 为恒定常流。作圆时不一定所有的余流向量端点都能恰好在圆周上，只能尽量使其落在圆周附近。

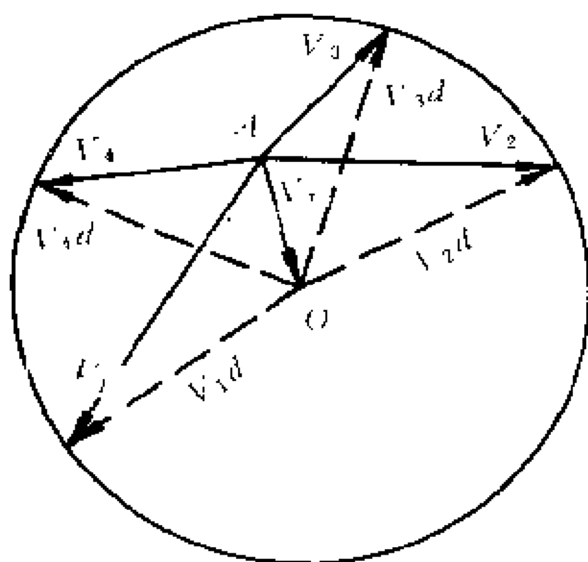


图 5—7　用一组风速大小相等风向不同的实测余流分离漂流

5.2.4　底流

由漂流理论，风的直接效应仅仅限于 Ekman 边界层中。对于有限深海的近岸区域，由于漂流的体积运输，将会导致增水和减水现象，发生海面倾斜，从而产生倾斜流(因为假定海水密度是均匀的)。由(5.1—31)式知，如果忽略摩擦力，倾斜流从海面直至海底具有相同的速度，并且由海面坡度来决定。但是海底的摩擦效应在海底附近的薄层里是不可忽略的，它使近海底处流速很快减小，而在海底流速变为零，结果形成一个酷似漂流那样的底流。

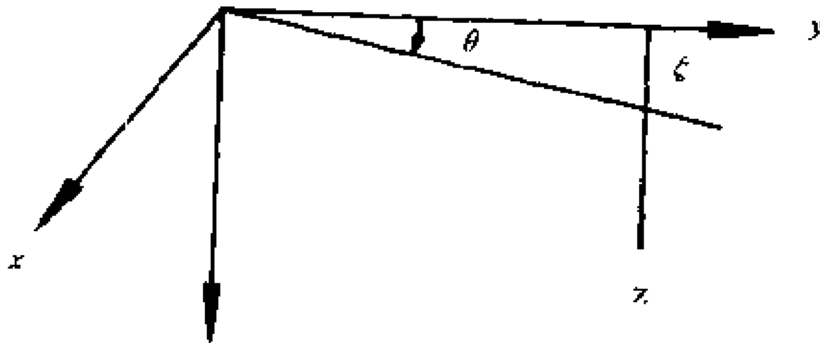


图5-8 海面倾斜示意图

为讨论方便起见，令由漂流体积运输所产生的海面倾斜仅沿 y 方向，其倾角 α 为常量，如图5—8所示。相应的海面升高为

$$\zeta = y\tan\alpha。 \qquad (5.2—29)$$

由于密度均匀和静压假定，则海面以下任意深度 z 处的压强为

$$p = p_a + \int_{\zeta}^{z} \rho g dz = p_a + \rho g(z-\zeta), \qquad (5.2—30)$$

相应地压强梯度力的 x 和 y 分量可表为

$$\left.\begin{aligned} -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} &= 0, \\ \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} &= g\frac{\partial \zeta}{\partial y} = g\tan\alpha 。\end{aligned}\right\} \qquad (5.2—31)$$

对于这由漂流体积运输引起的海面倾斜所形成的流动，在研究它时又不考虑风的直接作用，因此流动可以认为是压强梯度力、湍流摩擦力和 Coriolis 力三者平衡的产物，即可描述为

$$\left.\begin{aligned} 0 &= fv + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ 0 &= -fu + A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + g\tan\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (5.2—32)$$

边界条件为

$$\left.\begin{array}{ll} z=\zeta & A_z\dfrac{\partial u}{\partial z}=A_z\dfrac{\partial v}{\partial z}=0, \\ z=h & u=v=0. \end{array}\right\} \tag{5.2—33}$$

将(5.2—32)式改写成

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}+\dfrac{f}{A_z}v=0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\dfrac{f}{A_z}u+\dfrac{g}{A_z}\tan\alpha=0, \end{array}\right\} \tag{5.2—34}$$

再令 $u_1=u-\dfrac{g}{f}\tan\alpha$，则(5.2—34)变成

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^2 u_1}{\partial z^2}+\dfrac{f}{A_z}v=0, \\ \dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}-\dfrac{f}{A_z}u_1=0, \end{array}\right\} \tag{5.2—35}$$

相应地边界条件转化为

$$\left.\begin{array}{ll} z=\zeta & A_z\dfrac{\partial u_1}{\partial z}=A_z\dfrac{\partial v}{\partial z}=0, \\ z=h & u_1=-\dfrac{g}{f}\tan\alpha,\quad v=0。 \end{array}\right\} \tag{5.2—36}$$

引进复速度 $W_1=u_1+iv$，则运动方程(5.2—35)和边界条件(5.2—36)简化为

$$\frac{d^2W_1}{dz^2}-(1+i)^2a^2W_1=0, \tag{5.2—37}$$

$$\left.\begin{array}{ll} z=\zeta & A_z\dfrac{dW_1}{dz}=0, \\ z=h & W_1=-\dfrac{g}{f}\tan\alpha。 \end{array}\right\} \tag{5.2—38}$$

满足边界条件(5.2—38)的解为

$$W_1=-\frac{g\tan\alpha}{f}\frac{\mathrm{ch}(1+i)az}{\mathrm{ch}(1+i)ah}, \tag{5.2—39}$$

由其实部和虚部得

$$
\left.\begin{aligned}
u &= \frac{g\tan\alpha}{f}\left[1 - \frac{\mathrm{ch}\alpha(h+z)\cos\alpha(h-z) + \mathrm{ch}\alpha(h-z)\cos\alpha(h+z)}{\mathrm{ch}2\alpha h + \cos 2\alpha h}\right], \\
v &= \frac{g\tan\alpha}{f}\,\frac{\mathrm{sh}\alpha(h+z)\sin\alpha(h-z) + \mathrm{sh}\alpha(h-z)\sin\alpha(h+z)}{\mathrm{ch}2\alpha h + \cos 2\alpha h}.
\end{aligned}\right\}
\tag{5.2-40}
$$

由(5.2—40)式可知，流速由两部分组成，一种是纯倾斜流，一种是倾斜流受底摩擦影响部分。其中纯倾斜流为

$$
\left.\begin{aligned}
u_s &= \frac{g\tan\alpha}{f}, \\
v_s &= 0,
\end{aligned}\right\}
\tag{5.2-41}
$$

倾斜流受底摩擦影响的部分为

$$
\left.\begin{aligned}
u_F &= -\frac{g\tan\alpha}{f}\,\frac{\mathrm{ch}\alpha(h+z)\cos\alpha(h-z) + \mathrm{ch}\alpha(h-z)\cos\alpha(h+z)}{\mathrm{ch}2\alpha h + \cos 2\alpha h}, \\
v_F &= \frac{g\tan\alpha}{f}\,\frac{\mathrm{sh}\alpha(h+z)\sin\alpha(h-z) + \mathrm{sh}\alpha(h-z)\sin\alpha(h+z)}{\mathrm{ch}2\alpha h + \cos 2\alpha h}.
\end{aligned}\right\}
\tag{5.2-42}
$$

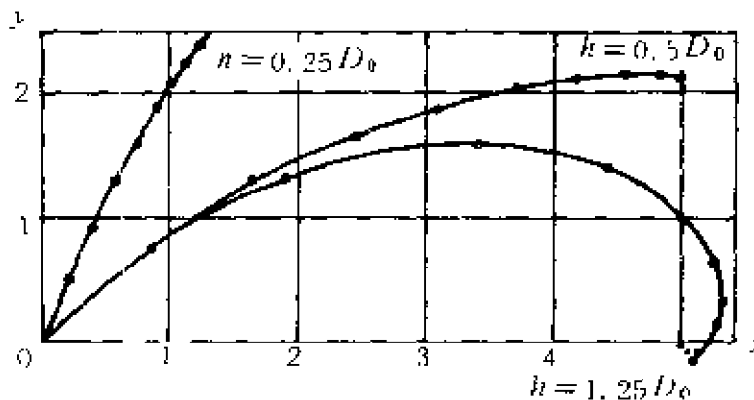


图 5—9　底流螺线

假定 $h \geqslant 2D_0$[D_0 依(5.2—8)式定义]，在 $z=0$ 和 $z \ll h$ 之处，$u_F \to 0$，$v_F \to 0$，故只存在纯倾斜流 u_s；在 $z=h-D_0$ 处，$u_F \to 0$，$v_F \to 0$，也只有 u_s 存在。可见在 $z=0$ 到 $z=h-D_0$ 的范围内，只有倾斜流存在。在 $z=h$ 处，$u_F \to -\frac{g}{f}\tan\alpha$，$v_F \to 0$。而在 $z=h$ 到 $z=h-D_0$ 之间。u_F 和 v_F 均随 z 的增加而变化，结果 u_s、u_F 和 v_F 形成一个由底向上发展的 Ekman 螺旋。图 5—9 所示的为底流螺线。比较图 5—3 和图 5—9 可以看出，深海漂流的 Ekman 螺线为右旋的，而底流的 Ekman 螺线是左旋的。

如将倾斜流及其底流的表达式(5.2—40)对 z 从海底到海面积分，可得体积运输

$$\left.\begin{aligned} S'_x &= \frac{D_0 g\tan\alpha}{2f}\left(2ah-\frac{\mathrm{sh}2ah+\sin 2ah}{\mathrm{ch}2ah+\cos 2ah}\right),\\ S'_y &= \frac{D_0 g\tan\alpha}{2f}\frac{\mathrm{sh}2ah-\sin 2ah}{\mathrm{ch}2ah+\cos 2ah}。\end{aligned}\right\} \quad (5.2—44)$$

当 $h\geqslant 2D_0$ 时，上式简化为

$$\left.\begin{aligned} S'_x &\to \frac{D_0 g\tan\alpha}{2f}(2ah-1),\\ S'_y &\to \frac{D_0 g\tan\alpha}{2f}。\end{aligned}\right\} \quad (5.2—45)$$

由复速度(5.2—39)可得湍流应力

$$\tau'_z = -\rho A_z\frac{\partial W_1}{\partial z} = \frac{\rho A_z g\tan\alpha}{f}(1+i)a\frac{\mathrm{sh}(1+i)az}{\mathrm{ch}(1+i)ah}, \quad (5.2\text{-}46)$$

其实部和虚部

$$\left.\begin{aligned} \tau'_{zx} &= A_2\mathrm{sh}az\cos az - B_2\mathrm{ch}az\sin az,\\ \tau'_{zy} &= A_2\mathrm{ch}az\sin az + B_2\mathrm{sh}az\cos az,\end{aligned}\right\} \quad (5.2\text{-}47)$$

式中

$$A_2 = \frac{g\tan\alpha}{a}\frac{\mathrm{ch}ah\cos ah+\mathrm{sh}ah\sin ah}{\mathrm{ch}2ah+\cos 2ah},$$

$$B_2 = \frac{g\tan\alpha}{a}\frac{\mathrm{ch}ah\cos ah-\mathrm{sh}ah\sin ah}{\mathrm{ch}2ah+\cos 2ah}。$$

显然，τ'_z 随 z 的分布不同，当 $z=0$ 或 $z\ll h$ 时，$\tau'_z\to 0$，只有当 $z=(h-D_0)$ 到 $z=h$ 之间才有值，且随深度增大而增大。

5.2.5 非均匀风场的风生流

非均匀分布的定常风力作用于海面所产生的风生流，由于体积输送不均匀，因而形成海面起伏，导致产生压强梯度力。可以予料，这种流动包括漂流和倾斜流两部分。

如果假定海水密度 ρ 为常量，海深 $h=h(x,y)$，海面非均匀风应力 $\tau(x,y)=(\tau_x,\tau_y)$，由非均匀的体积运输引起的海面起伏为 $z=\zeta(x,y)$，则在 z 轴指向下为正的左手坐标系中运动可用下述运动方程和连续方程描述

$$\left.\begin{aligned} -fv &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \\ fu &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ 0 &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + g, \end{aligned}\right\} \tag{5.2—48}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \tag{5.2—49}$$

边界条件为

$$\left.\begin{aligned} &z=\zeta \quad \rho A_z\frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \rho A_z\frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, \\ &z=h(x,y) \quad u=v=w=0。 \end{aligned}\right\} \tag{5.2—50}$$

由于已假定 ρ 为常量，再考虑静力方程，因此压梯度力可用海面起伏表示。于是运动方程可表为

$$\left.\begin{aligned} A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + fv &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial x}, \\ A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - fu &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial y}。 \end{aligned}\right\} \tag{5.2—51}$$

引进复速度 $W=u+w$，$G=-\frac{g}{A_z}\left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}+i\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)$，则(5.2—51)及边界条件(5.2—50)可表为

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - j^2 W = G, \tag{5.2—52}$$

$$\left.\begin{aligned} z &= \zeta \quad \rho A_z \frac{\partial W}{\partial z} = -\tau, \\ z &= h \qquad W = 0。\end{aligned}\right\} \tag{5.2—53}$$

其中 $j^2=\frac{if}{A_z}-(1+i)^2a^2$，(5.2—52)方程的满足边界条件之解为

$$W = \frac{\tau}{jA_z\rho}\frac{\mathrm{sh}j(h-z)}{\mathrm{ch}j(h-\zeta)} + \frac{G}{j^2}\left[\frac{\mathrm{ch}j(z-\zeta)}{\mathrm{ch}j(h-\zeta)}-1\right], \tag{5.2—54}$$

如写成分量形式，有

$$\left.\begin{aligned} u &= N\tau_x + M\tau_y + B\frac{\partial\zeta}{\partial x} + A\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \\ v &= -M\tau_x + N\tau_y - A\frac{\partial\zeta}{\partial x} + B\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \end{aligned}\right\} \tag{5.2—55}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} N &= \bar{\delta}\mathrm{ch}\eta\sin\eta + \bar{r}\mathrm{sh}\eta\cos\eta, \\ M &= \bar{\delta}\mathrm{sh}\eta\cos\eta - \bar{r}\mathrm{ch}\eta\sin\eta, \\ B &= \frac{g}{f}\bar{e}(\mathrm{sh}\bar{\theta}\sin\eta + \mathrm{sh}\eta\sin\bar{\theta}), \\ A &= \frac{g}{f}[1-\bar{e}(\mathrm{ch}\bar{\theta}\cos\eta - \mathrm{ch}\eta\cos\bar{\theta})]。\end{aligned}\right\} \tag{5.2—56}$$

如果符号

$$\left.\begin{aligned} \theta &= ah\left(1+\frac{z}{h}\right), \\ \eta &= ah\left(1-\frac{z}{h}\right), \\ e &= \frac{1}{\mathrm{ch}2ah + \cos 2ah}, \\ \delta &= \frac{e}{\rho aA_z}(\mathrm{ch}ah\cos ah + \mathrm{sh}ah\sin ah), \\ r &= \frac{e}{\rho aA_z}(\mathrm{ch}ah\cos ah - \mathrm{sh}ah\sin ah), \end{aligned}\right\} \tag{5.2—57}$$

则在(5.2—57)式中，以 $h-\zeta$ 代替 h，以 $z-\zeta$ 代替 z 便得到 $\bar{\theta}$，$\bar{\eta}$，$\bar{e}$，

$\bar{\delta}$和 $\bar{r}$。

现在已经可以看出，(5.2—55)式的前两部分与风应力 τ 有关，为风力直接作用产生的漂流，而后两部分与海面坡度有关，系风力间接作用产生的并受摩擦影响的倾斜流部分。

表达式(5.2—55)中的风应力 τ_x 和 τ_y 算是已知的，而 ζ，从而 $\frac{\partial\zeta}{\partial x}$和$\frac{\partial\zeta}{\partial y}$还是未知的。为了确定 ζ，我们来建立流函数 $\psi(x,y)$与 $\zeta(x,y)$的关系。先从确定 ψ 入手，使问题得以解决。

将(5.2—54)式对 z 从海面到海底积分，得

$$S = \int_{\zeta}^{h} W dz = \frac{\tau}{j^2 A_z \rho} \frac{\operatorname{ch} j(h-\zeta)-1}{\operatorname{ch} j(h-\zeta)} + \frac{G}{j}\left[\frac{1}{j}\operatorname{th} j(h-\zeta)-(h-\zeta)\right]。$$

其实部和虚部为

$$\left.\begin{aligned} S_x &= \bar{n}\tau_x + \bar{m}\tau_y + \bar{\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \bar{\alpha}\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \\ S_y &= -\bar{m}\tau_x + \bar{n}\tau_y - \bar{\alpha}\frac{\partial\zeta}{\partial x} + \bar{\beta}\frac{\partial\zeta}{\partial y}。 \end{aligned}\right\} \qquad (5.2—58)$$

其中带短横的意义同前，且有

$$m = \frac{1}{2a^2 A_z \rho}(1-2e\operatorname{ch}ah\cos ah),$$

$$n = \frac{1}{a^2 A_z \rho} e\operatorname{sh}ah\sin ah,$$

$$\alpha = \frac{gh}{f} - \frac{ge}{2af}(\operatorname{sh}2ah + \sin 2ah),$$

$$\beta = \frac{ge}{2af}(\operatorname{sh}2ah - \sin 2ah)$$

显然，全流分量也是分为漂流形成的和倾斜流形成的两个部分。

从连续方程(5.2—49)出发，对 z 从海面至海底积分可得

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = 0, \qquad (5.2—59)$$

其中已应用了运动学边界条件以及定常运动的假定。由(5.2—

59)式可知存在全流流涵数 $\psi(x,y)$，并有如下关系

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=S_y,\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=-S_x。\tag{5.2—60}$$

利用关系式(5.2—60)以及 $\zeta\ll h$ 的假定，于是由(5.2—58)式可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\zeta}{\partial x}&=-m'\tau_x+n'\tau_y-\alpha'\frac{\partial\psi}{\partial x}-\beta'\frac{\partial\psi}{\partial y},\\ \frac{\partial\zeta}{\partial y}&=-n'\tau_x-m'\tau_y+\beta'\frac{\partial\psi}{\partial x}-\alpha'\frac{\partial\psi}{\partial y}。\end{aligned}\right\}\tag{5.2—61}$$

其中

$$m'=\frac{m\alpha+n\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$n'=\frac{n\alpha-m\beta}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$\alpha'=\frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2},$$

$$\beta'=\frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}。$$

将(5.2—61)式代入(5.2—55)式，于是流速表达式变为

$$\left.\begin{aligned}u=&(N-Bm'-An')\tau_x+(M+Bn'-Am')\tau_y\\&+(A\beta'-\alpha'B)\frac{\partial\psi}{\partial x}-(B\beta'+A\alpha')\frac{\partial\psi}{\partial y},\\ v=&(-M+Am'-Bn')\tau_x+(N-An'-Bm')\tau_y\\&+(A\alpha'+\beta'B)\frac{\partial\psi}{\partial x}+(A\beta'-B\alpha')\frac{\partial\psi}{\partial y}。\end{aligned}\right\}$$

(5.2—62)

这便是通过给定风应力分布以及全流流函数分布来计算任意深度 z 处水平流速的公式。为了确定全流函数 ψ，将(5.2—61)式进行交叉微分后可得

$$\beta'\nabla^2\psi+\left(\frac{\partial\beta'}{\partial x}+\frac{\partial\alpha'}{\partial y}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x}+\left(\frac{\partial\beta'}{\partial y}-\frac{\partial\alpha'}{\partial x}\right)\frac{\partial\psi}{\partial y}$$

$$= \mathrm{rot} m'\tau + \mathrm{div} n'\tau, \qquad (5.2—63)$$

求解(5.2—63)方程的边界条件为

$$\text{陆地边界 } \Gamma_1: \psi = 0,$$

$$\text{水　　界 } \Gamma_2: \psi = \Phi,$$

Φ 为已知的流量函数。(5.2—63)为一椭圆型方程，对于某些简化了的情形(如风力为恒量，或海深为常量，海域形状规则等)可化为拉普拉斯方程，进而可解；对于普遍情形，很难获得解析解，只能借助于数值解法。不管哪种解法，ψ 总是可求的。因此由(5.2—62)式可以求出水平流速，由(5.2—61)式可确定海面的起伏变化。

至于铅直流速，可用连续方程积分和运动学边界条件求得计算公式

$$w(x,y,z) = \int_z^h \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) dz \qquad (5.2—64)$$

5.2.6 升降流

根据海水的连续性，只要水平流动的散度不为零，就必然产生铅直方向的运动。在某些海区，这种铅直运动表现较强烈，称之为升降流。使海水水平流动散度不为零的主要原因是由于风力的作用，当非均匀风力作用于海面时，除了产生漂流和梯度流(如果海水密度非均匀)等水平流动之外，还有铅直运动；而在近岸地区，由于海岸的影响使海水堆积或流失，便加强了海水水平流动的散度，因此升降流的现象显得更加强烈。

Thorade(1909)首先研究了当平行于海岸的风吹过海面时，由于增减水所生成的升降流。Sverdrup(1938)发现加里福利亚海岸地区的升降流正是由于在一段时间里几乎与海岸平行、风力变化很小的风不断吹过所造成的。Defant(1936)研究了南非洲沿岸的升降流，获得了与Sverdrup(1930)相似的结论，即上升流系来自海面以下百余米深度处。Defant(1952)研究了非平行于海岸风所生成

的升降流。Hidaka(1954)更为全面和系统地研究了各种形式风作用下所产生的定常升降流现象，而 Yoshida(1955)进一步研究了非定常的升降流。

近岸的升降流由于现象显著，对海区的水文要素分布和海洋生产力具有重要意义，但大洋中的升降流也不可忽视。在亚热带，中纬度以及南极大陆附近都存在着一条海水辐聚带，从而使海水下降，而在赤道区则产生海水的辐散使海水上升。这些辐聚、辐散带处的显著铅直升降运动，对整个大洋海水的铅直循环及温盐分布都起着重要作用。

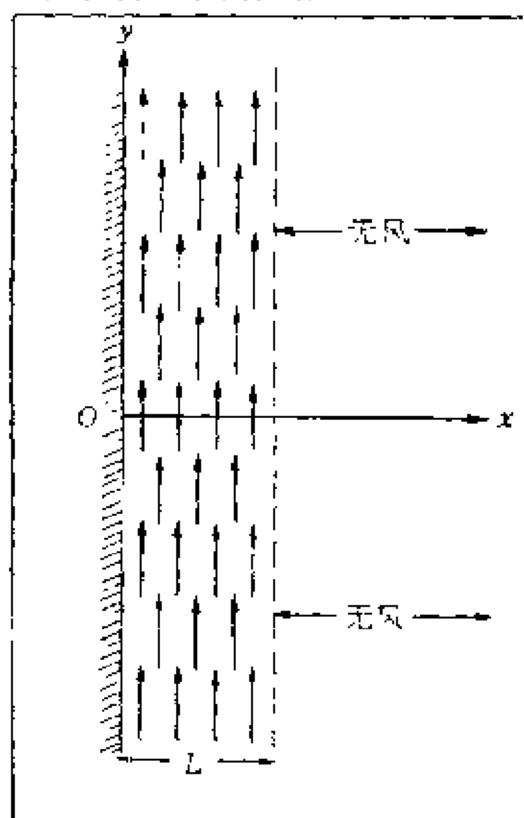


图 5—10　平行于海岸的风系

1. 由平行于海岸的直线风系所生成的升降流

这里选取 y 轴与直线海岸重合、z 轴指向下为正的左手直角坐标系(图 5—10)。设直线风系的宽度为 L，风仅沿 x 方向有变化，而沿 y 方向没有变化，整个风场是定常的。相应于这种风场的特征，水平流速和海面升降与 y 无关；由于 x 方向的运动尺度和 z 方向的运动尺度较小，海岸侧向摩擦和海面风应力、海底摩擦都必须考虑；再假定海水密度均匀，於是描述运动的基本方程可表为

$$\left.\begin{aligned} A_l\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+fv+g\frac{\partial\zeta}{\partial x}=0,\\ A_l\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}-fu=0,\end{aligned}\right\}\qquad(5.2\text{—}65)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{5.2—66}$$

边界条件

$$\left.\begin{array}{l}z=0(\text{海面}),\rho A_z\dfrac{\partial u}{\partial z}=0,\rho A_z\dfrac{\partial v}{\partial z}=-\tau_y,(0\leqslant x\leqslant L)\\ z=h(\text{海底}),u=v=0,\\ x=0(\text{海岸}),u=v=0,\\ x\to\infty(\text{远离海岸})u=v=0,\dfrac{\partial\zeta}{\partial x}=0。\end{array}\right\} \tag{5.2—67}$$

设海深 $h\geqslant 2D_0$,求解过程中利用了拉普拉斯变换,可求得水平流速

$$\left.\begin{array}{l}u(x,z)=\dfrac{4\pi\tau_y}{f\rho}D_0\displaystyle\int_0^\infty G(\lambda,z)R(\lambda,x)d\lambda,\\ v(x,z)=\dfrac{4\pi\tau_y}{f\rho}D_0\displaystyle\int_0^\infty H(\lambda,z)R(\lambda,x)d\lambda。\end{array}\right\} \tag{5.2—68}$$

利用连续方程(5.2—66),按 $w=-\frac{\partial}{\partial x}\int_0^z udz$ 求得

$$w(x,z)=\frac{4\pi\tau_y}{f\rho}D_l\int_0^\infty L(\lambda,z)S(\lambda,x)d\lambda。 \tag{5.2—69}$$

其中

$$D_l=\pi\sqrt{\frac{A_l}{\omega\sin\varphi}},$$

$$G(\lambda,z)=\{[Q\cos(\frac{Qz}{D_0})+P\sin(\frac{Qz}{D_0})]/(P^2+Q^2)\}e^{-\frac{Pz}{D_0}},$$

$$H(\lambda,z)=\{[P\cos(\frac{Qz}{D_0})-Q\sin(\frac{Qz}{D_0})]/(P^2+Q^2)\}e^{-\frac{Pz}{D_0}}$$

$$L(\lambda,z) = \{2PQ[\cos(\frac{Qz}{D_0})e^{-\frac{Pz}{D_0}}-1]$$

$$+ (P^2-Q^2)\sin(\frac{Qz}{D_0})e^{-\frac{Pz}{D_0}}\}/(P^2+Q^2),$$

$$R(\lambda,x) = \sin(\frac{\lambda x}{D_l})[1-\cos(\lambda L/D_l)]\lambda,$$

$$S(\lambda,x) = \cos(\frac{\lambda x}{D_l})[1-\cos(\lambda L/D_l)]\lambda,$$

$$P = \sqrt{(\sqrt{\lambda^4+4\pi^2}+\lambda^2)/2},$$

$$Q = \sqrt{(\sqrt{\lambda^4+4\pi^2}-\lambda^2)/2}。$$

根据以上的 u,v 和 w 之解，可以求得水平流速分量差不多为铅直分量的 D_l/D_0 倍。

在 oxz 平面上引进流函数 $\psi(x,z)$，它满足

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial z},\quad w = \frac{\partial\psi}{\partial x},$$

这个函数可表为下列函数的实部

$$\psi(s,z) = Re\,\frac{4\pi\tau_y}{f\rho}i\int_0^\infty\{[(e^{-\sqrt{a^2+2\pi^2 i}z/D_0}-1)/(\lambda^2+2\pi^2 i)]\}$$

$$\times\ \{\sin(\lambda x/D_l)[1-\cos(\lambda L/D_l)]/\lambda\}d\lambda。\qquad (5.2-70)$$

利用表达式(5.2—70)可以作出铅直断面上的流线分布图，如图 5—11 所示。由图 5—11 可知，在近岸产生上升流，而风系外沿为下降流，上升流来自 $z=1.5D_0$(约 200m)或更深的深层，最大铅直速度出现在 $z=D_0$ 处。在海洋上层水平流动为离岸流，下层为向岸流。这样共同组成一个循环。

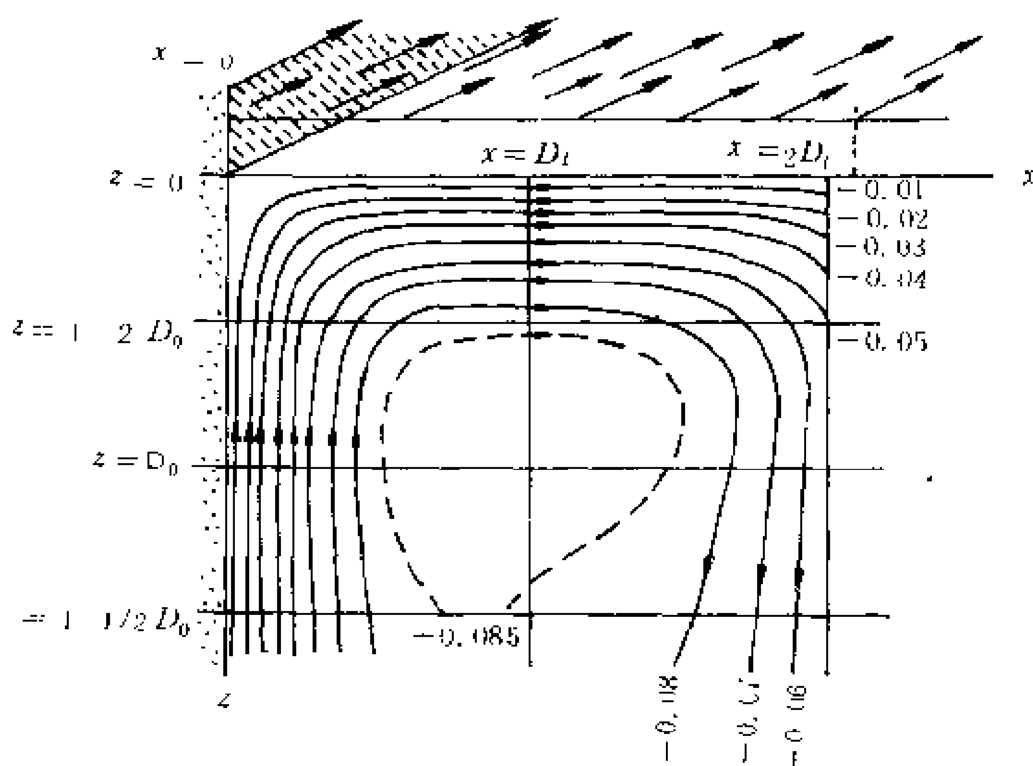


图 5—11 由平行于海岸的风所生成的升降流在 oxy 平面上的流线分布(据景振华的海流原理,1966)

2. 由非平行于海岸的直线风系所生成的升降流

如图 5—12 所示,设风向与海岸成 β 角。描述运动的基本方程仍为(5.2—65)—(5.2—66),求解的边界条件中唯有海面边界条件改为:

$$z = 0 \text{处} \quad \rho A_z \frac{\partial u}{\partial z} = -\tau_x, \rho A_z \frac{\partial v}{\partial z} = -\tau_y, 0 \leqslant x \leqslant L,$$

其它条件与前面的相同。如同平行于海岸风系情形那样,在 oxz 平面中引进流函数,其解为下列函数的实部

$$\psi(x,z) = Re\left[\frac{4\pi}{\rho f}(\tau_x + i\tau_y)\right] \int_0^\infty \left[\left(e^{-\sqrt{\lambda^2+2\pi z/D_0}} - 1\right)/ (\lambda^2 + 2\pi^2 i)\right]\{\sin(\lambda x/D_l)[1-\cos(\lambda L/D_l)]\lambda\} d\lambda, \tag{5.2—71}$$

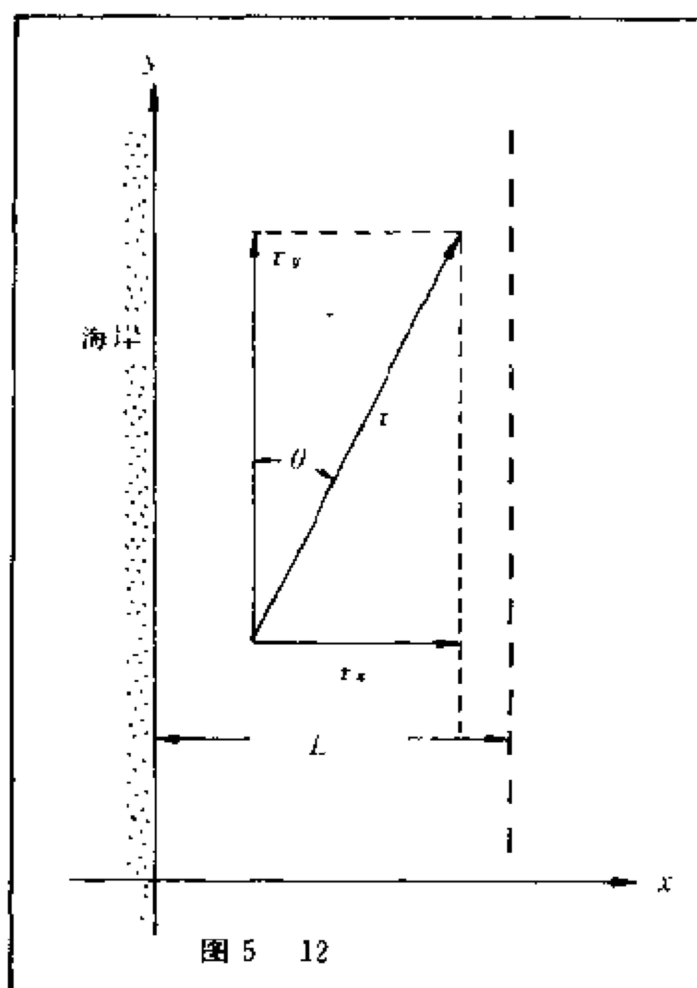


图 5—12　非平行于海岸的风系

其实部形式为

$$\psi(x,z)=\frac{4\pi\tau_x}{\rho f}\Phi_x(x,z)+\frac{4\pi\tau_y}{\rho f}\Phi_y(x,z),\qquad(5.2—72)$$

式中

$$\Phi_x(x,z)=\int_0^\infty\{(P^2-Q^2)[e^{-\frac{Pz}{D_0}}\cos(\frac{Qz}{D_0})-1]-2PQe^{-\frac{Pz}{D_0}}\sin(\frac{Qz}{D_0})\}$$
$$\times(P^2+Q^2)^{-2}\{\sin(\lambda x/D_t)[1-\cos(\lambda L/D_0)]/\lambda\}d\lambda,$$

$$\Phi_{y}(x,z) = \int_{0}^{\infty} \{ (P^{2}-Q^{2}) e^{-\frac{Pz}{D_0}} \sin(\frac{Qz}{D_0}) - 2PQ[e^{-\frac{Pz}{D_0}} - 1] \}$$
$$\times (P^{2}+Q^{2})^{-2} \{ \sin(\lambda x/D_l) [1-\cos(\lambda L/D_l)]/\lambda \} d\lambda。$$

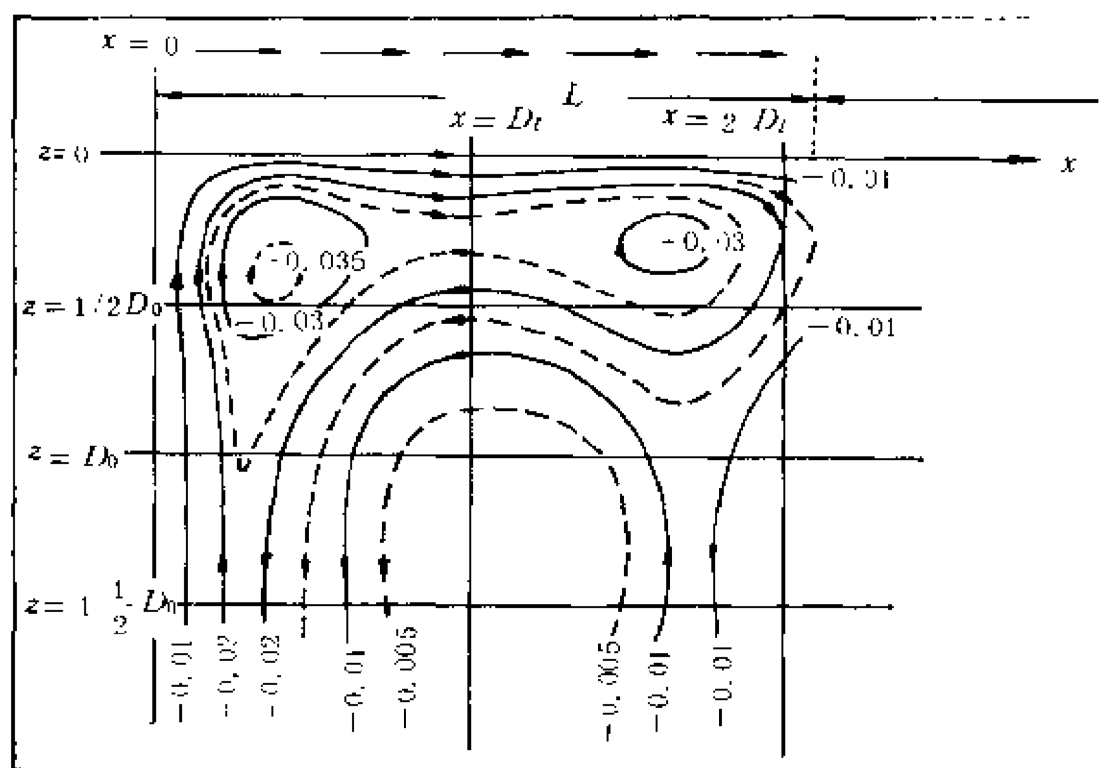


图 5—13　由非平行于岸线的风系所产生的升降流流线分布

（据景振华的海流原理，1966）

由(5.2—72)式可以看出，流函数由两部分组成，一部分决定于铅直于岸的风应力 τ_x，另一部分则决定于平行于岸的风应力 τ_y。前面所获得的流函数(5.2—70)是(5.2—71)的特殊情况，即 $\tau_x=0$ 的特殊情形。非平行于岸线的风系所生成的升降流在 oxz 平面上的流线分布如图 5—13 所示，形式比较复杂。它具有三个升降流系统。一个靠近海岸，一个位于风系的外沿，而第三个则在风系的中部。第一个系统要比第二个系统能使更深的海水上升，第三个系统则不能使海水上升到海表面。三个系统的流线均依顺时针方向旋转：近岸处为上升流，风系外沿为下降流，海洋表层为离岸流，深处

为向岸流，从而构成铅直断面上的大循环。

对于具有相同的风应力大小、但风向与岸线交角 β 不同的风系来说，所形成的升降流的强度是不同的。今取一 $\triangle y=1$、$\triangle x=x$ 的面积，通过该面积的铅直质量运输为

$$M = \int_0^x \rho w dx = \rho \int_0^x \frac{\partial \psi}{\partial x} dx$$

$$= \rho\psi(x,z) - \rho\psi(0,z) = \rho\psi(x,z)。 \qquad (5.2—73)$$

如果取定一个 x，使 $\Phi_x(x,z)$ 和 $\Phi_y(x,z)$ 有最大的负值，那么 M 就会有最大值，经求得，对沿岸风和离岸风该最大值分别为

$$M_y = -0.090 \frac{4\pi\tau_y}{f}$$

$$M_x = -0.0355 \frac{4\pi\tau_x}{f}。$$

将 $\tau_x = \tau\sin\beta$ 和 $\tau_y = \tau\cos\beta$ 代入，便得

$$M = M_x + M_y = (-0.0355\sin\beta - 0.090\cos\beta) \frac{4\pi\tau}{f}。$$

$$(5.2—74)$$

最强烈的升降流应在 $\frac{dM}{d\beta}=0$ 时发生，即当

$$\tan\beta = 0.0355/0.090$$

时发生，由此求得

$$\beta = 21°.5。$$

这表明当风向与海岸成 21°.5 时，升降流可达最大强度。根据在秘鲁沿岸的观测，那里最强的升降流确系风向与海岸稍不平行的风吹过时出现的。

以上讨论了平行于岸线的风系和非平行于岸线的风系所产生的升降流，从两种风系的 oxz 平面上的流函数表达式(5.2－70)和(5.2－71)来看，都在分母上有 $f=2\omega\sin\varphi$ 这个因子，这表示纬度越低，升降流越强。之所以实际上在低纬处深水沿岸水域受风力作

用产生较强的升降流，其理论根据可能就在这里。

§5.3 非定常流动

5.3.1 漂流的发展

在远离海岸的深海大洋里，一旦有一定常恒速的风力作用于广阔的海面，海水便因风应力而发生流动，并且这种流动凭借海水的铅直湍流混合往深处发展。随着时间的进展，各层的流速和流动所及的深度将趋于定常。本节所讨论的是流动转变为定常恒速之前的非定常的发展阶段，即研究漂流随时间的变化情形。

描述非定常的发展阶段流动的运动方程可表为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}-fv &= A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\ \frac{\partial v}{\partial t}+fu &= A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\end{aligned}\right\}\tag{5.3—1}$$

求解的初始条件为

$$t=0, u=v=0,\tag{5.3—2}$$

和边界条件

$$\left.\begin{aligned}&z=0\text{ 处}\quad A_z\frac{\partial u}{\partial z}=0, \rho A_z\frac{\partial v}{\partial z}=-\tau_y(t>0),\\ &z\to\infty\quad u=v\to 0。\end{aligned}\right\}\tag{5.3—3}$$

满足初始条件(5.3—2)和边界条件(5.3—3)的解为

$$\left.\begin{aligned}u &= \frac{\tau_y}{\rho\sqrt{\pi A_z}}\int_0^t\frac{\sin(f\xi)}{\sqrt{\xi}}e^{-\frac{z^2}{4A_z\xi}}d\xi,\\ v &= \frac{\tau_y}{\rho\sqrt{\pi A_z}}\int_0^t\frac{\cos(f\xi)}{\sqrt{\xi}}e^{-\frac{z^2}{4A_z\xi}}d\xi。\end{aligned}\right\}\tag{5.3—4}$$

作变量置换，令

$$t' = \frac{f}{2\pi}t$$

于是(5.3—4)式变为

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{2\pi\tau_y}{\rho f D_0}\int_0^{t'} \frac{\sin 2\pi\eta}{\sqrt{\eta}} e^{-\frac{\pi z^2}{4D_0^2\eta}} d\eta, \\ v &= \frac{2\pi\tau_y}{\rho f D_0}\int_0^{t'} \frac{\cos 2\pi\eta}{\sqrt{\eta}} e^{-\frac{\pi z^2}{4D_0^2\eta}} d\eta。\end{aligned}\right\} \quad (5.3—5)$$

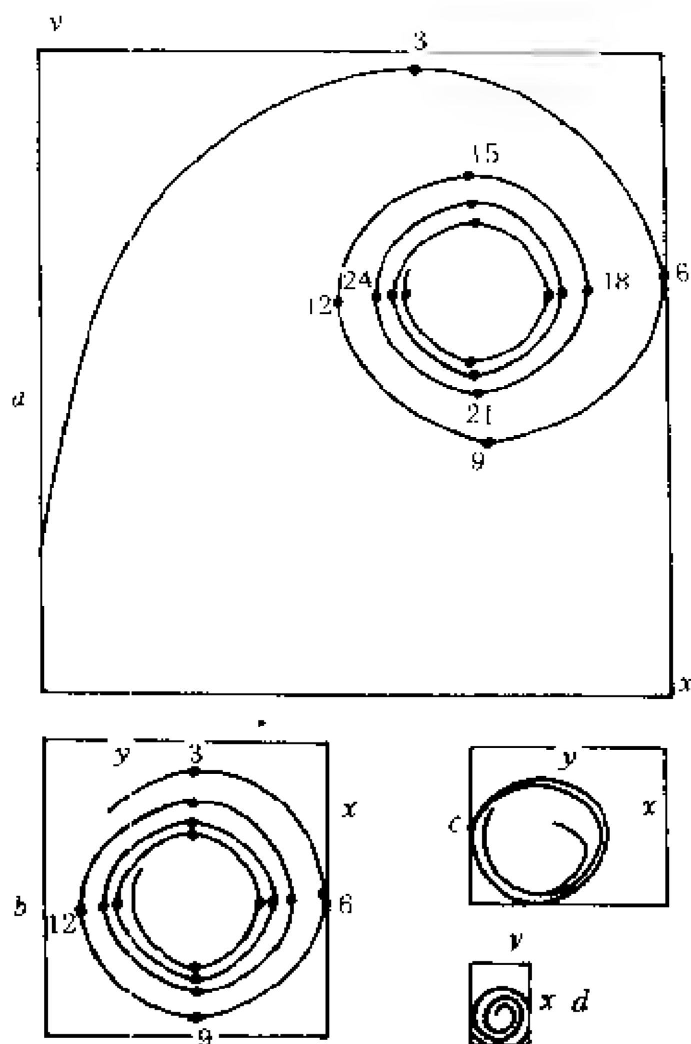


图 5—14 无限深海漂流的发展(四个不同深度处)(据景振华的海流原理)

根据上式可以计算出不同深度 z 处的流速随时间的变化。图 5—14 为 $z=0, 0.5D_0, D_0$ 和 $2D_0$ 处的水平流速随时间的变化图。由图可以看出，随着时间的增加，空间某一点的流速逐渐趋向于一个极限值，即趋向于稳定的漂流。流速趋于稳定需要很长时间，但在实际上认为恒定风吹刮数十小时，甚至几小时(对于浅海)之后，流动便趋于稳定了。

5.3.2 惯性流

当风力维持的漂流一旦流出风力强制作用的海区后，便由强制的漂流转变为自由的流动。在广阔大洋里，其运动的铅直尺度远小于水平尺度，因此是 Coriolis 力、铅直湍流摩

擦力与质点加速度三者的平衡。如果不考虑摩擦力，则此时的运动可用下述方程描述

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}&=fv,\\ \frac{dv}{dt}&=-fu。\end{aligned}\right\}\qquad(5.3\text{—}6)$$

如将上式的第一式乘以 u，第二式乘以 v，然后相加并对时间 t 积分，即得

$$u^2+v^2=\text{常量}=V_0^2,\qquad(5.3\text{—}7)$$

其中 V_0 为流速量值，它为一常值。因此对固定地点 (x,y) 处，不同时刻的流速向量端点的轨迹为一个圆。又由(5.3—7)式可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy}{dt}&=v=\frac{1}{f}\frac{du}{dt},\\ \frac{dx}{dt}&=u=-\frac{1}{f}\frac{dv}{dt}。\end{aligned}\right\}\qquad(5.3\text{—}8)$$

上式对 t 积分，再利用(5.3—7)式，有

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=V_0^2/f^2=r^2\qquad(5.3\text{—}9)$$

这说明水质点沿半径为 r 的圆周作匀速运动。这个圆称之为惯性圆，对应的流动称之为惯性流。

在这种惯性流动中，沿惯性圆作圆周运动的单位质量海水所受的向心力 $\frac{V_0^2}{r}$ 与 Coriolis 力 fV_0 相平衡，即有

$$\frac{V_0^2}{r}=2\omega\sin\varphi V_0,\qquad(5.3\text{—}10)$$

于是惯性流流速为

$$V_0=2\omega\sin\varphi r,\qquad(5.3\text{—}11)$$

惯性圆半径为

$$r=\frac{V_0}{2\omega\sin\varphi}。\qquad(5.3\text{—}12)$$

由(5.3—12)知，惯性圆半径随纬度 φ 的增加而减小，在赤道附

近，水质点的轨迹是平直的；如果流动海区的纬度变化不大，则轨迹的半径几乎不变。

惯性流中水质点运动的周期为

$$T_i=\frac{2\pi r}{V_0}=\frac{\pi}{\omega\sin\varphi},\tag{5.3—13}$$

与半摆日周期相同。

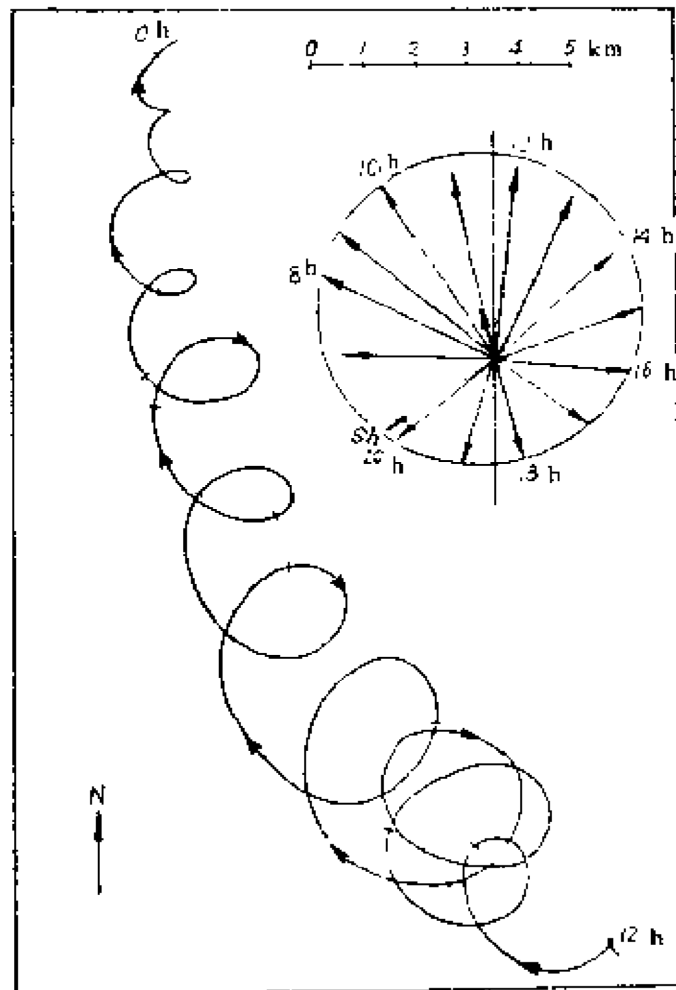


图 5—15　在波罗的海观测到的具有半摆日周期的惯性流

(左图表示从 1933 年 8 月 17 日到 8 月 24 日的前进矢量图；

右图表示 8 月 21 日 6 点与 20 点之间的中央矢量图)

(Gustafson 和 Kullenberg，1936)

惯性流中水质点运动的形式有两种:一是当无其它外加流动存在时,所有惯性圆的圆心均位于同一条铅直线上,因而海水就像以角速度 $2\omega\sin\varphi$ 旋转的刚体一样;另一是有其它外加流动存在时,同一水平面上的所有海水质点的运动则是沿惯性圆的圆周运动与外加流动的合成。关于第二种形式的惯性流动曾在波罗的海被 Gustafson 和 Kullenberg(1936)观测到。该海区海深略大于100m,连续观测了162个小时。8月17日开始观测,当时海水有明显的分层:0—24m 范围内海水密度几乎为恒量,24—30m 范围内密度随深度迅速增加,30m 以下密度随深度缓慢递减。测流是在上层均匀层中进行的。将根据每小时的平均流速计算所得的位移,作成前进矢量图,且每12个小时作一记号,则得到海水质点的轨迹图,如图5—15所示。由于当时有外加流动,所以海水质点移动的轨迹先向西北而后转向北。因为实际上存在摩擦力,因此惯性圆的半径开始很大,后来逐渐变小。在北半球,Coriolis 力使运动向右方偏移,其结果使惯性流中的海水质点沿顺时针方向在惯性圆圆周上运动,这从图5—15中的轨迹变化方向可以看出。该图右上角的附图是惯性流流速矢量分布图,矢量端点几乎在同一圆周上,矢量随时间沿顺时针方向旋转,而圆心则有一定的速度,方向指向西北。另外根据8个完整的惯性圆所求得的周期 T_i=13h59min,与该纬度的半摆日周期14h08min 很相符合。惯性流的最大流速可达到 V_0=0.15m/s,因而最大惯性圆半径可达 r=1.2km。

§5.4 风生大洋环流

风应力和热盐作用是形成大洋总环流的最基本动力。在大洋上层1000m 左右的范围内,风应力起着主导作用,因此,风生大洋环流决定了大洋上层环流的主要特征。

大洋环流的水平尺度为10000km,属大尺度运动,$R_0\ll1$、$E_l\ll$

1，地转运动是最基本的流动。海洋上层的大洋环流是由一些流环所组成的，在副热带处的流环，其流速东西不对称，在狭窄的西海岸边界层中，海流速度特别强，这就是所谓的西向强化现象，是大洋环流的最突出的特征。在赤道海区、南极附近海区以及大洋中部海区的流动也具有各自不同的特点。

本节介绍几种主要的风生大洋环流理论，阐述大洋环流的主要特征。

5.4.1 边界层技术

实际大洋里存在着边界区域和内部区域，边界区域包括海面边界层和沿岸边界层。例如 Ekman 漂流理论中的受风应力影响的厚度差不多为 D_0 的水层，就是海面边界层。

根据以前讨论的尺度分析，对于大尺度运动来说，由于 $R_0 \ll 1$，$E_l \ll 1$ 和 $E_z \ll 1$，因此，非线性平流项和湍流摩擦项对于 Coriolis 力项可以忽略不计，地转运动是最基本的流动，运动方程形式上变得简单了。大洋内部的运动就属于这种情况。然而，对于边界层来说，由于垂直于边界方向的水平尺度（如果边界为海岸）或垂直尺度（如果边界为海面）很小，因此，非线性惯性项和湍流摩擦项变得重要起来了，例如，对于西海岸的边界层来说，由于沿 x 方向的水平尺度 L 很小，因此 $u\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$A_l\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$显得重要了。结果，在边界层里基本方程要比大洋内部的复杂些。

作为整个大洋来说，发生在其中的运动应该有一个统一的解。现在如果将大洋分为边界层和内部区域，根据尺度分析得到描述边界层和内部区域运动的简化方程，然后求得各自的解，那么就有一个如何使边界层的解和内部解“衔接”起来，共同组成一个大洋环流解的问题。这就是所谓的边界层技术。这种方法在分析研究中是一种很有用的工具。

为了利用边界层技术，首先要选择切合边界层厚度的长度尺度，对方程进行尺度分析，使边界层中的方程进行简化，从而相对容易地求解，并使其解满足边界条件，而当边界层的坐标很大时，又能接近内部区域的解，从而使边界层与内部区域衔接起来。由于边界层相对于整个大洋很薄，而中部区域的解变化缓慢，因此边界层与内部区域之解的衔接是可能的，可以匹配得使内部解正好与边界层交界处之值相同。

前面所讨论的 Ekman 漂流理论就是一个边界层解，由于运动的铅直尺度很小，所以铅直湍流摩擦项很大，由相应的方程所求得之解满足海面边界条件，具有边界层特性。由于流速随深度急剧衰减，在相对于大洋深度是相当薄的边界层之底部，流速基本上为零，这样可以很容易地直接匹配内部的解。

5.4.2 大洋中部海区风生环流的 Sverdrup 解

设海面有定常的风力作用，产生定常的恒速流动。通常情况下，定常风应力分布不均匀，存在压强梯度力。于是，所形成的大洋中部的流动是压强梯度力、Coriolis 力和铅直湍流摩擦力三者平衡的产物。在 z 轴向上的直角坐标系中，描述上述运动的基本方程可由方程组(4.5—33)简化后得到

$$-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad (5.4—1)$$

$$fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \qquad (5.4—2)$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g, \qquad (5.4—3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \qquad (5.4—4)$$

相应的边界条件为

海面 $z=\zeta$ 处，$\rho A_z\frac{\partial u}{\partial z}=\tau_{x\zeta}$，$\rho A_z\frac{\partial v}{\partial z}=\tau_{y\zeta}$；

很大深度 $z=-h$ 处，$u=v=0,\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=0,\frac{\partial p}{\partial x}=\frac{\partial p}{\partial y}=0$。

若只关心环流的质量运输分布，则可参照铅直向积分方程(4.4—10)、(4.1—11)和(4.4—9)，由运动方程(5.4—1)和(5.4—2)以及连续方程(5.4—4)经类似的推导得到

$$-fM_y=-\frac{\partial P}{\partial x}+\tau_{x\zeta}, \qquad (5.4—5)$$

$$fM_x=-\frac{\partial P}{\partial y}+\tau_{y\zeta}, \qquad (5.4—6)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}=0, \qquad (5.4\text{-}7)$$

其中假定了 $\zeta\ll h$，且引进了符号

$$M_x=\int_{-h}^{0}\rho u dz,\quad M_y=\int_{-h}^{0}\rho v dz,$$

$$P=\int_{-h}^{0}p dz。$$

将(5.4—5)式对 y 求导，(5.4—6)式对 x 求导，然后相减并利用(5.4—7)式，结果有

$$M_y\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial\tau_{y\zeta}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y},$$

或

$$\beta M_y=\mathrm{rot}_z\tau_\zeta。 \qquad (5.4—8)$$

此式便是著名的 Sverdrup 方程(Sverdrup，1947)。

为了更清楚地阐明Sverdrup方程的物理意义，将流量 M_x 和 M_y 表示成两部分之和

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M_{xE} + M_{xg}, \\ M_y &= M_{yE} + M_{yg}, \end{aligned}\right\} \tag{5.4—9}$$

其中 M_{xE} 和 M_{yE} 为Ekman漂流的流量，M_{xg} 和 M_{yg} 为地转流的流量。这样，便可以得出

$$\left.\begin{aligned} -fM_{yE} &= \tau_{x\zeta}, \\ fM_{xE} &= \tau_{y\zeta}, \end{aligned}\right\} \tag{5.4—10}$$

$$\left.\begin{aligned} -fM_{yg} &= -\frac{\partial P}{\partial x}, \\ fM_{xg} &= -\frac{\partial P}{\partial y}。 \end{aligned}\right\} \tag{5.4—11}$$

将(5.4—10)式交叉微分，然后相减得Ekman漂流的水平散度

$$\frac{\partial M_{xE}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yE}}{\partial y} = (-\beta M_{yE} + \mathrm{rot}_z \tau_\zeta)/f。 \tag{5.4—12}$$

这表明风海流的水平散度不仅与风应力的旋度有关，还与 f 随度的变化有关。同样地，对(5.4—11)式进行交叉微分，然后相减得到地转流的水平散度

$$\frac{\partial M_{xg}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yg}}{\partial y} = -\frac{\beta M_{yg}}{f}。 \tag{5.4—13}$$

上式表明，所有向南向北的地转运动，必须显示水平散度。方程(5.4—12)与(5.4—13)之和应等于零，并得到Sverdrup方程(5.4—8)。这样一来，Sverdrup方程的物理意义便清楚了：它表示Ekman漂流流量的散度和地转流流量的散度正好取得平衡。因此Sverdrup方程又称之为Sverdrup平衡。另外，由(5.4—8)式可以看出，当 $\mathrm{rot}_z\tau_\zeta = 0$ 时，$M_y = 0$，此时只存在 M_x，即只有东西向的质量运输，而无南北向的质量运输。当 $\mathrm{rot}_z\tau_\zeta > 0$ 时，M_y 为正，质量运输向北，反之，当 $\mathrm{rot}_z\tau_\zeta < 0$ 时，M_y 为负，质量运输向南。

根据(5.4—8)—(5.4—10)式估算一下质量运输的量级。取北大西洋 35°N 处一地点，那里风向为 W，风速 7—8m/s，相应的风应力 $\tau_{x\zeta}=10^{-1}\mathrm{Nm}^{-2}$(或者用单位 p_a)，$\tau_{y\zeta}=0$，则

$$\mathrm{rot}_z\tau_\zeta = -\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y} \approx -\frac{10^{-1}\mathrm{Nm}^{-2}}{1000\mathrm{km}} = -10^{-7}\mathrm{Nm}^{-3},$$

$$f \approx 10^{-4}\mathrm{s}^{-1},$$

$$\beta \approx 2 \times 10^{-11}\mathrm{m}^{-1}\mathrm{s}^{-1}。$$

利用这些值，由(5.4—8)式得

$$M_y = \frac{\mathrm{rot}_z\tau_\zeta}{\beta} = -5 \times 10^3\mathrm{kgm}^{-1}s^{-1},$$

由(5.4—10)式得

$$M_{yE} = -\frac{\tau_{x\zeta}}{f} = -10^3\mathrm{kgm}^{-1}\mathrm{s}^{-1},$$

再由(5.4—9)式得

$$M_{yg} = M_y - M_{yE} = -4 \times 10^3\mathrm{kgm}^{-1}\mathrm{s}^{-1}。$$

由这些估算值可见，由风旋度引起的地转流的南北质量运输比 Ekman 漂流的南北质量运输要大一些。

将 Sverdrup 方程应用于低纬度处。那里 $\tau_{y\zeta}$和$\frac{\partial\tau_{y\zeta}}{\partial x}$可以忽略，$\tau_{x\zeta}$仅为 y 的函数。由(5.4—8)式得

$$M_y = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y},$$

由于 $dy=ad\varphi$，a 为地球半径，则 $\beta=\frac{df}{dy}=2\omega\cos\varphi/a$，因此有

$$M_y = -\frac{a}{2\omega\cos\varphi}\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}。\qquad (5.4—14)$$

由(5.4—7)式得

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} = -\frac{\partial M_y}{\partial y} = \frac{1}{2\omega\cos\varphi}\left(a\frac{\partial^2\tau_{x\zeta}}{\partial y^2} + \frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}\tan\varphi\right),$$

积分后有

$$M_x = \frac{x}{2\omega\cos\varphi}\left(\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}\tan\varphi + \frac{\partial^2\tau_{x\zeta}}{\partial y^2}a\right), \qquad (5.4-15)$$

其中 $x=0$ 处为东海岸，由东海岸向西 x 取负值，$x=0$ 处 $M_x=0$。

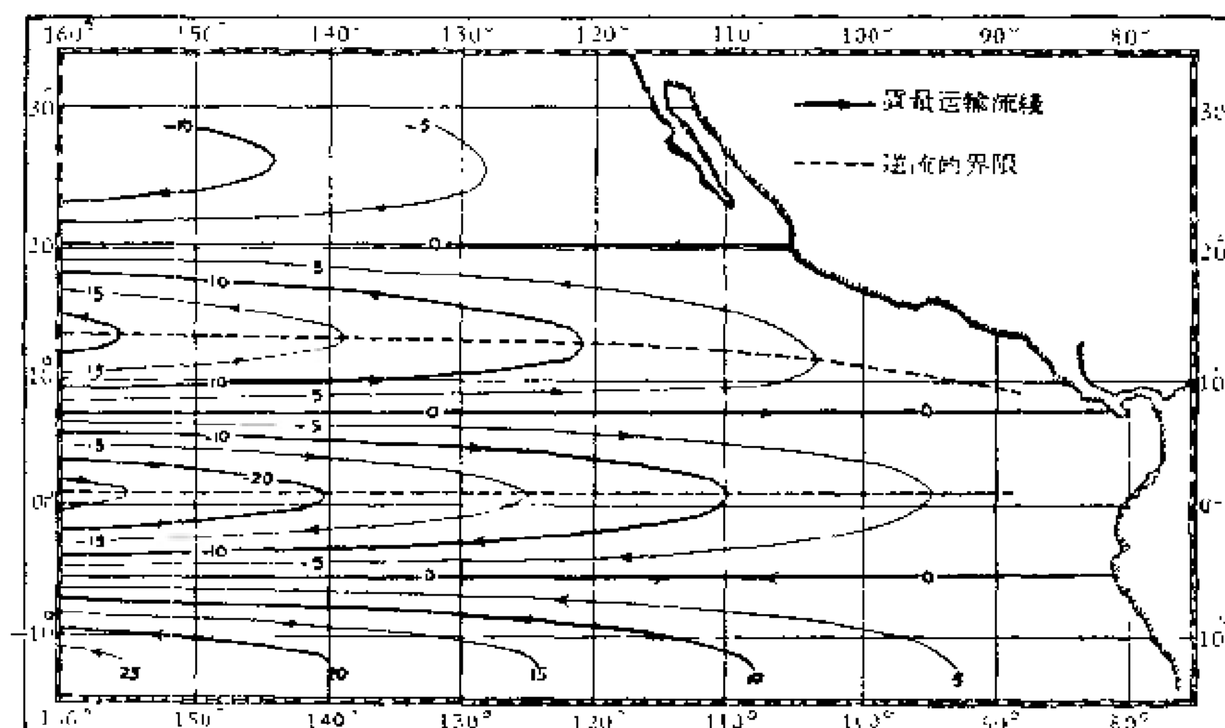


图 5—16　根据正弦状风应力分布对东太平洋作出的质量运输的流线

流函数 ψ 的单位为 1.0160469088×10^9kg/s。(Reid,1948)

(5.4—15)和(5.4—14)式所表示的解是满足东边界条件的解。Reid(1948)用一种简单形式的风应力对东太平洋进行了计算，流线分布如图 5—16 所示，与实际流场相当符合，但流线不封闭，因此根据实际大洋质量守恒规律，可以予言在西部窄边界区域中存在一强流。

将 Sverdrup 解与 Ekman 漂流理论的解作一比较，可以看出 Sverdrup 解不能给出不同深度层的流速，但考虑了大洋有一个东

边界.Ekman 的漂流解给出了不同层的流大小和方向,但假定大洋在水平方向上是无限的。从考虑了东边界这一点来讲比 Ekman 漂流理论进了一步。

Sverdrup 解的缺陷除了未考虑流的铅直结构之外,还有它只能应用于临近大洋东岸的中部海区,并且$|M_x|$随 x 向西变化而增大的程度比实际情况要快,这可能是由于侧向摩擦作用被忽略的缘故。另外,在求解基本方程时考虑了东边界条件,又由于当 $\mathrm{rot}_z\tau_s=0$ 时,只有东西运动,提供了一个自然的南边界和北边界,但没有给出西部的边界条件,所以 Sverdrup 解是不封闭的。为了能够应用更多的边界条件,例如西边界,非滑动的东边界等,需要建立比较复杂的方程。

5.4.3 Stommel 的西向强化理论

前面讨论的 Sverdrup 解不适用于西边界,如果考虑西边界区域需要提出较复杂的模式。在 Sverdrup 之后,Stommel(1948)建立了一个考虑海底摩擦效应、封闭大洋中的漂流模式。其结果指出了 f 随纬度变化,即 β 效应是产生海流西向强化的基本原因。但模式中仍然没有考虑非线性平流项和水平湍流摩擦项。

设大洋为一矩形大洋,静止时海深为一常量 h,海水密度为一常量 ρ。如果忽略非线性平流项和水平摩擦项,则定常的风生海流可用根据(4.5—33)方程组简化后的如下方程描述

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \qquad (5.4—16)$$

$$\left.\begin{aligned}-fv&=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\ fu&=-g\frac{\partial\zeta}{\partial y}+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.\end{aligned}\right\} \qquad (5.4—17)$$

如果讨论铅直向平均流动,则上列方程的铅直向平均形式可由(4

5 35)方程组简化而得到

$$\frac{\partial}{\partial x}[(h+\zeta)\langle u\rangle]+\frac{\partial}{\partial y}[(h+\zeta)\langle v\rangle]=0, \quad (5.4—18)$$

$$\left.\begin{aligned}-f\langle v\rangle&=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{A_z}{h+\zeta}\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_\zeta-\frac{A_z}{h+\zeta}\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{-h},\\ f\langle u\rangle&=-g\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{A_z}{h+\zeta}\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_\zeta-\frac{A_z}{h+\zeta}\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{-h},\end{aligned}\right\}$$

(5.4—19)

其中⟨　⟩表示铅直向平均值。

设矩形大洋的边界分别为$x=0$及a,$y=0$及b。作用在大洋海面的风应力通过垂直湍流传递给海水动量,以底摩擦的形式消耗能量。风的分布形式是,在大洋南半部(靠近赤道的一面)盛行信风,在其北半部则盛行西风。相应的风应力以简单的关系式表达

$$\tau_{x\zeta}=\rho A_z\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_\zeta=-F\cos(\pi y/b)。 \quad (5.4—20)$$

为使运动方程尽可能地简化,取底摩擦分量为与流速一次方成比例的形式,即

$$\tau_{x,-h}=\rho ku\simeq\rho k\langle u\rangle, \quad (5.4—21)$$

$$\tau_{y,-h}=\rho kv\simeq\rho k\langle v\rangle。 \quad (5.4—22)$$

再假定$\zeta\ll h$,并略去垂向平均符号⟨　⟩。于是将(5.4—20)—(5.4—22)式代入(5.4—18)式和(5.4—19)式后,积分平均方程可写成

$$\left.\begin{aligned}0&=f\rho hv-F\cos(\pi y/b)-\rho ku-\rho gh\frac{\partial\zeta}{\partial x},\\ 0&=-f\rho hu-\rho kv-\rho gh\frac{\partial\zeta}{\partial y},\end{aligned}\right\} \quad (5.4—23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0, \tag{5.4—24}$$

对(5.4—23)式进行交叉微分，并利用(5.4—24)式，于是有

$$\frac{h}{k}[\beta v+r\sin(\pi y/b)]+(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y})=0, \tag{5.4—25}$$

式中 $r=\frac{F\pi}{\rho hb}$，$\beta=\frac{\partial f}{\partial y}$。

根据连续方程(5.4—24)可导入流函数 ψ，它满足

$$u=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad v=-\frac{\partial\psi}{\partial x}。$$

代入(5.4—25)式后可得

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\frac{h}{k}\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{h}{k}r\sin\frac{\pi y}{b}。 \tag{5.4—26}$$

大洋边界为一流线，则边界条件为

$$\psi(0,y)=\psi(a,y)=\psi(x,0)=\psi(x,b)=0。 \tag{5.4—27}$$

如果 β 为常量，即 f 为 y 的线性函数，则方程(5.4—26)的满足边界条件(5.4—27)之解为如下形式

$$\psi(x,y)=\frac{Fb}{k\pi}\sin\frac{\pi y}{b}\left[\frac{e^{\frac{h\beta}{2k}(a-x)}\text{sh}\,\alpha x+e^{-\frac{h\beta}{2k}x}\text{sh}\,\alpha(a-x)}{\text{sh}\,\alpha a}-1\right], \tag{5.4—28}$$

其中

$$\alpha=\sqrt{(\frac{h\beta}{2k})^2+(\frac{\pi}{b})^2}。 \tag{5.4-29}$$

当 $\beta=0$ 时，$\alpha=\frac{\pi}{b}$，(5.4-28)式变成

$$\psi(x,y)=\frac{Fb}{k\pi}\sin\frac{\pi y}{b}\left[\frac{\text{sh}\,\frac{\pi}{b}x+\text{sh}\,\frac{\pi}{b}(a-x)}{\text{sh}\,\frac{\pi}{b}a}-1\right]。 \tag{5.4—30}$$

下面用数值例子来说明 $\psi(x,y)$所表示的流动趋势。取有关的数据为

$$a = 10000\text{km},$$

$$b = 2\pi \times 10^3\text{km},$$

$$h = 200\text{m}$$

$$k = 0.02$$

$$F = 10^{-2}\text{Nm}^{-2}。$$

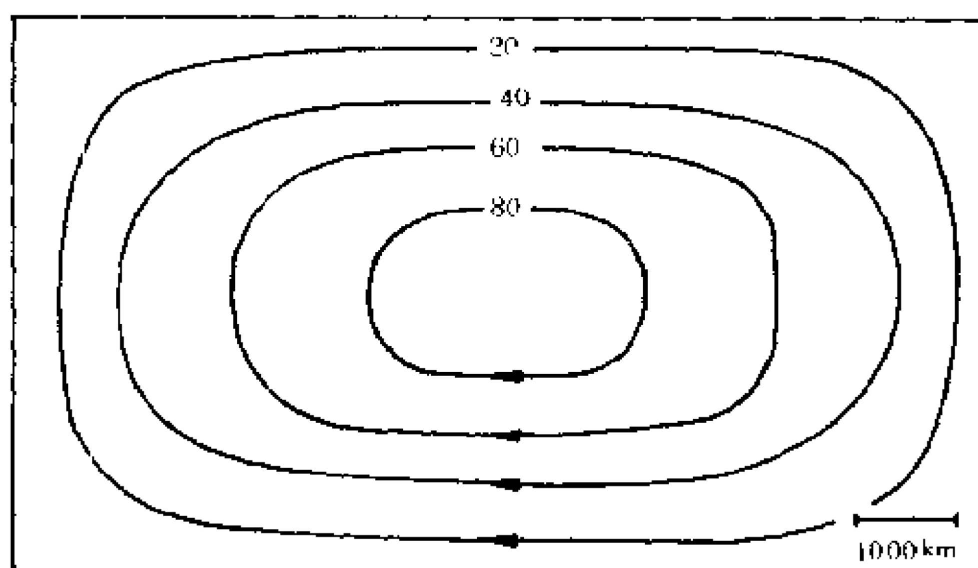


图 5～17　$\beta=0$ 时的大洋流线分布(Stommel,1948)

首先根据(5.4—30)式,取 $\psi(x,y)$＝某一常数绘制流线,即得 $\beta=0$ 情况下的大洋流线分布,如图 5—17 所示。由图可以看出 f—平面大洋里的漂流系统的总趋势为一广阔的环流系统,其流线呈东西向对称和南北向对称,没有西向强化现象。再利用(5.4—28)式,取

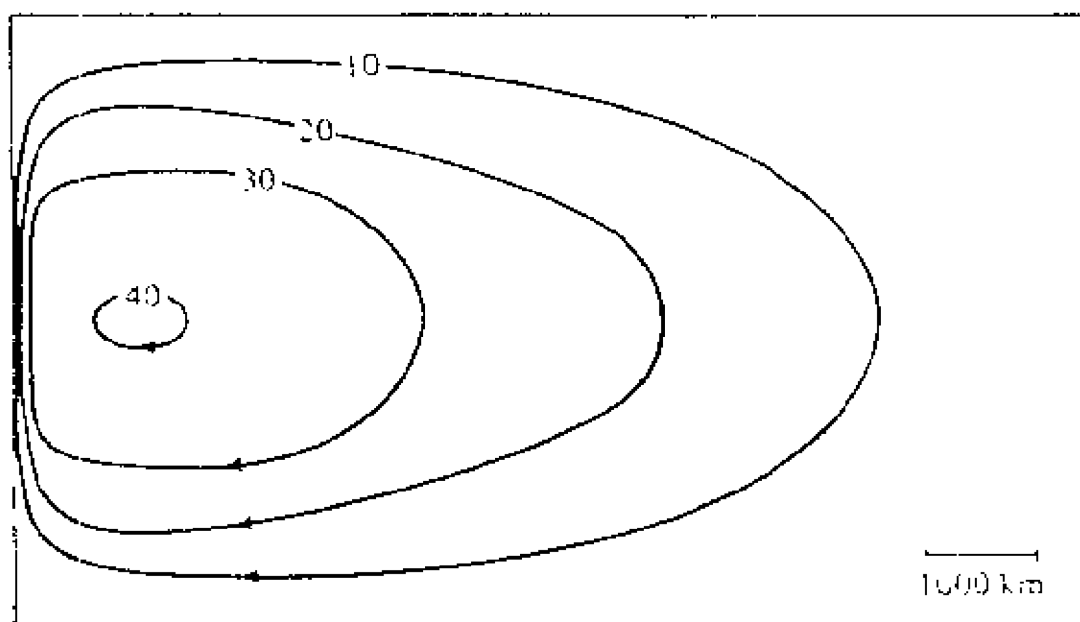


图 5－18　$\beta=0$ 时的大洋流线分布(Stommel,1948)

$\psi(x,y)$＝某一常数绘制流线，可得 $\beta\neq0$ 情况下的大洋流线分布，如图 5－18 所示。该图呈现出东西向流线的不对称性，西部流线密集，东部流线稀疏，显示出流场的西部强化现象。由此可以断定，f 随纬度的变化，即 β 效应导致了西向强化现象。

以上讨论的是北半球的情形，对南半球有相同的结果。因此，不论是北半球还是南半球，流线均在大洋西部密集，均发生西向强化现象。

5.4.4　Munk 的大洋风生环流理论

Munk(1950))在 Ekman，Sverdrup 和 Stommel 的研究基础上提出了所谓的粘性理论。该理论考虑了水平湍流摩擦和铅直湍流摩擦，但仍忽略非线性惯性项。Munk 的结果较全面地阐明了大洋风生环流的主要特征，并根据风应力的分布得到大洋环流的正确量级。Munk 认为大洋西部海流强化是风应力涡度、行星涡度和侧向湍流应力涡度三者取得平衡的产物。

Munk(1950a)首先研究了矩形大洋的风生环流，后来 Munk 和 Carrier(1950b)又针对太平洋将其抽象成三角形大洋进行了讨论。这里仅介绍 Munk 的矩形大洋中的风生环流。

设矩形大洋的长度为 r，宽度为 $2S$，且西边界和东边界分别位于 $x=0$ 和 $x=r$ 处，南边界和北边界分别位于 $y=-S$ 和 $y=+S$ 处。考虑水平的和铅直的湍流摩擦，对于在定常风力作用下的大洋环流，可用 z 轴指向上为正的直角坐标系中的方程组(4.5—33)经简化后获得的下列方程组来描述

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \qquad (5.4—31)$$

$$-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (5.4—32)$$

$$fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_l\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (5.4—33)$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g。 \qquad (5.4—34)$$

相应的海面动力学边界条件

$$\rho A_z\frac{\partial u}{\partial z}=\tau_{x\zeta}, \quad \rho A_z\frac{\partial v}{\partial z}=\tau_{y\zeta},$$

海底 $z=-h$ 处的条件

$$u=v=0, \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\partial v}{\partial z}=0。$$

对基本方程从海底到海面积分，并利用海面和海底的边界条件，结果可得全流方程组

$$\left.\begin{aligned}-fM_y &= -\frac{\partial P}{\partial x}+A_l\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_x}{\partial y^2}\right)+\tau_{x\zeta},\\ fM_x &= -\frac{\partial P}{\partial y}+A_l\left(\frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\right)+\tau_{y\zeta},\end{aligned}\right\} \quad (5.4-35)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}=0, \quad (5.4-36)$$

其中

$$P=\int_{-h}^{0} p dz,$$

$$M_x=\int_{-h}^{0}\rho u dz,\ M_y=\int_{-h}^{0}\rho v dz。$$

据(5.4—36)式，引入流函数 $\psi(x,y)$，并满足

$$M_x=-\frac{\partial\psi}{\partial y},M_y=\frac{\partial\psi}{\partial x}。\quad (5.4-37)$$

将(5.4—37)式代入(5.4—35)式后，再用交叉微分消去 P，结果有

$$A_l\left(\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\psi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\psi}{\partial y^4}\right)-\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\left(\frac{\partial\tau_{y\zeta}}{\partial x}-\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}\right),$$

或

$$A_l\nabla^4\psi-\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\mathrm{rot}_z\tau_\zeta。\quad (5.4-38)$$

此方程表示侧向湍流应力涡度、行星涡度与风应力涡度三者平衡。设作用在海面的风应力仅限于 $-S<y<+S$ 之间，且

$$\left.\begin{aligned}\tau_{y\zeta}&=0,\\ \tau_{x\zeta}&=a\cos ny+b\sin ny+c,\ n=\frac{j\pi}{S},j=1,2,3\cdots\cdots\end{aligned}\right\}$$

(5.4—39)

求解的边界条件

$$\left.\begin{array}{ll} x=0 \text{ 及 } x=r \text{ 处} & \psi=0, \dfrac{\partial\psi}{\partial x}=0, \\ y=-S \text{ 及 } y=+S \text{ 处} & \psi=0, \dfrac{\partial\psi}{\partial y}=0。\end{array}\right\} \quad (5.4\text{—}40)$$

利用边界层技术求解方程(5.4—38)。将大洋分为三个区域：西边界区、中部区和东边界区。将方程(5.4—38)在各区中进行简化并求解，然后在交界处用同一边界条件将三个区域中的解衔接起来，获得整个大洋的环流解。

首先讨论中部区，由于远离东边界和西边界，因此(5.4—38)式中的与侧向湍流应力有关的第一项可以忽略不计，于是得到

$$\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=\mathrm{rot}_z\tau_\zeta, \quad (5.4\text{—}41)$$

这便是 Sverdrup 方程(5.4—8)。由风应力表达式(5.4—39)，上式可写成

$$\beta\frac{\partial\psi}{\partial x}=-\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}。\quad (5.4\text{—}42)$$

上式对 x 积分，得

$$\psi=-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}x+f_1(y),$$

其中的积分常数 $f_1(y)$ 可由东边界条件 $\psi|_r=0$ 确定为

$$f_1(y)=\frac{1}{\beta}\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}r。$$

因此中部区的解的形式是

$$\psi=-\frac{1}{\beta}\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}(x-r)。\quad (5.4\text{—}43)$$

当 $x=0$，有

$$\psi(0,y)=\frac{r}{\beta}\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}, \quad (5.4\text{—}44)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big|_{x=0} = M_x(0,y) = -\frac{1}{\beta}\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}。\qquad (5.4\text{—}45)$$

以上两式为中部区的解与西边界区的解在交界处应满足的衔接条件。

对于西边界区，由于侧向湍流应力必须保留，但又因 $x \ll y$，因此(5.4—38)可简化为

$$A_l\frac{\partial^4\psi}{\partial x^4} - \beta\frac{\partial\psi}{\partial x} = \frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}。\qquad (5.4\text{—}46)$$

用试解法求解。设其解为

$$\psi = X(x)\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y},\qquad (5.4\text{—}47)$$

代入(5.4—46)式之后得 $X(x)$ 所满足的方程

$$A_l X^{(4)} - \beta X' = 1。\qquad (5.4\text{—}48)$$

该方程的通解为

$$X(x) = A + Be^{kx} + De^{-\frac{k}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx + E\right) - \frac{x}{\beta},\qquad (5.4\text{—}49)$$

其中 $k=\sqrt[3]{\beta/A_l}$，A、B、D 和 E 为积分常数。

$$X'(x) = Bke^{kx} - D\left[\frac{k}{2}e^{-\frac{k}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx + E\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-\frac{k}{2}x}k\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx + E\right)\right] - \frac{1}{\beta}。\qquad (5.4\text{—}50)$$

所得通解(5.4—49)应满足如下边界条件

$$\left.\begin{aligned} &X(0) = 0,\\ &X'(0) = 0,\\ &X(x)\big|_{x\to\delta w} = \frac{r}{\beta},\\ &X'(x)\big|_{x\to\delta w} = -\frac{1}{\beta}, \end{aligned}\right\}\qquad (5.4\text{—}51)$$

由上列边界条件可确定出积分常数，最后 $X(x)$ 可表为

$$X(x) = -\frac{r}{\beta}Ke^{-\frac{1}{2}kx}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx + \frac{\sqrt{3}}{2kr} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{r}{\beta} - \frac{x}{6}, \quad (5.4—52)$$

其中 $K = \frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{kr}$。于是西边界区的解为

$$\psi(x,y) = \left[-\frac{r}{\beta}Ke^{-\frac{1}{2}kx}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx + \frac{\sqrt{3}}{2kr} - \frac{\pi}{6}\right) + \frac{r}{\beta} - \frac{x}{\beta}\right]\frac{\partial \tau_{x\xi}}{\partial y}。 \quad (5.4—53)$$

在西边界区，由于 $x \ll r$，因而(5.4—52)和(5.4—53)可写成

$$X(x) = \frac{r}{\beta}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}kx}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{\pi}{6}\right)\right], \quad (5.4—54)$$

$$\psi(x,y) = \frac{r}{\beta}\left[1 - \frac{2}{\sqrt{3}}e^{-\frac{1}{2}kx}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{\pi}{6}\right)\right]\frac{\partial \tau_{x\xi}}{\partial y}。 \quad (5.4—55)$$

对于东边界区，先对方程(5.4—38)进行变量变换。作置换 $\xi = r - x$，由于 $\xi \ll r$，所以同西边界区类似，东边界区的简化方程为

$$A_l \frac{\partial^4 \psi}{\partial \xi^4} + \beta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} = \frac{\partial \tau_{x\xi}}{\partial y}, \quad (5.4—56)$$

也用试解法求解。令

$$\psi(\xi, y) = X(\xi)\frac{\partial \tau_{x\xi}}{\partial y}$$

可得

$$X(\xi) = \frac{r}{\beta}\left[\frac{\xi}{r} + \frac{1}{kr}(e^{-k\xi} - 1)\right],$$

$$\psi(\xi,y)=\frac{r}{\beta}\left[\frac{\xi}{r}+\frac{1}{kr}(e^{-k\xi}-1)\right]\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y},$$

其中 k 的意义同前。将 ξ 还原为 $x-r$，于是得

$$X(x)=\frac{r}{\beta}\left[1-\frac{x}{r}+\frac{1}{kr}(e^{-k(r-x)}-1)\right] \quad (5.4—57)$$

$$\psi(x,y)=\frac{r}{\beta}\left[1-\frac{x}{r}+\frac{1}{kr}(e^{-k(r-x)}-1)\right]\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}。$$

(5.4—58)

这是东边界区的解。

将中部区的解(5.4—43)、西部区的解(5.4—53)和东部区的解(5.4—58)合起来，便得到整个大洋环流的解：

$$\psi=-\frac{r}{\beta}f(x)\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}, \quad (5.4—59)$$

其中

$$f(x)=-Ke^{-\frac{1}{2}kx}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx+\frac{\sqrt{3}}{2kr}-\frac{\pi}{6}\right)+1$$
$$-\frac{1}{kr}\left[kx-e^{-k(r-x)}+1\right]。 \quad (5.4—60)$$

由(5.4—60)式求得

$$\frac{f'(x)}{k}=Ke^{-\frac{1}{2}kx}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx+\frac{\sqrt{3}}{2kr}\right)$$
$$-\frac{1}{kr}\left[1-e^{-k(r-x)}\right]。 \quad (5.4—61)$$

利用风应力分布函数(5.4—39)式，根据流函数(5.4—59)式计算得到 ψ 场，如图 5—19 所示。可以看出，大洋风生环流(全流)分成几个迴旋部分。迴旋之间分界处只有东西向的流动，分界线所对应的地理纬度 φ_0 由 $M_x=0$(即 $f'(x)=0$)或 $\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}=0$ 确定。它们分

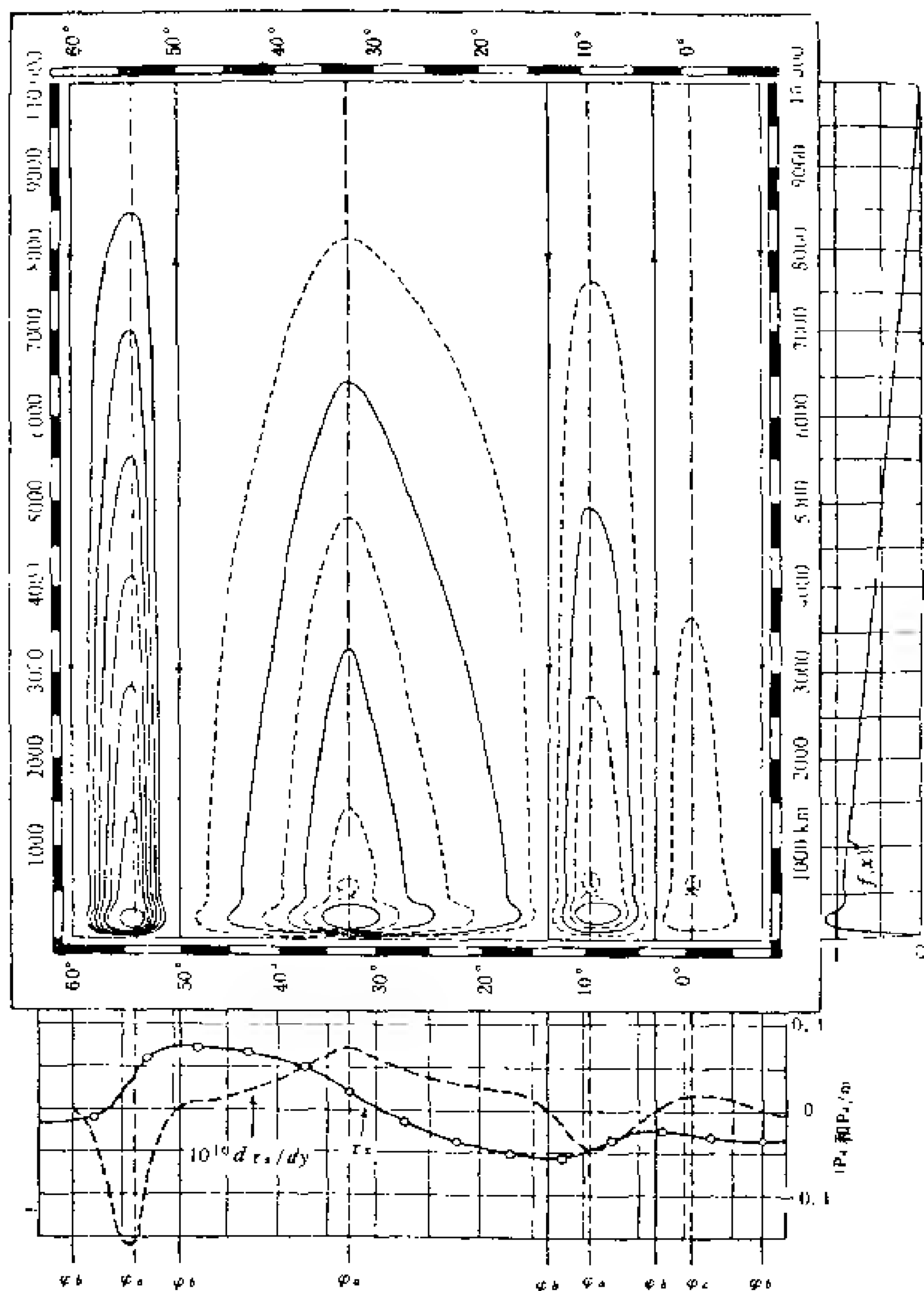


图 5—19　大洋风生环流的迴旋部分及风应力分布(Munk,1950a)

别位于西风带，南北信风带及赤道无风带处。涡旋主轴处只有南北向流动，对应的纬度 φ_0 由 $M_x=0$(即 $f(x)=0$)或$\frac{\partial^2 \tau_{x\zeta}}{\partial y^2}=0$ 决定。

对大洋西边界区，由于 $x \ll r$，因此相应地流函数 ψ 的表达式(5.4—59)可简化为

$$\psi_W = -\frac{r}{\beta} f_W(x) \frac{\partial \tau_{x\zeta}}{\partial z}, \tag{5.4—62}$$

其中

$$f_W(x) = -\frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}kx} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{\pi}{6}\right) + 1, \tag{5.4—63}$$

以及

$$f'_W(x) = \frac{2}{\sqrt{3}} k e^{-\frac{1}{2}kx} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}kx, \tag{5.4—64}$$

由此可求得西边界区的质量运输

$$\begin{aligned} M_{xW} &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{r}{\beta} f_W(x) \frac{\partial^2 \tau_{x\zeta}}{\partial y^2} \\ &= \frac{r}{\beta}\left[\frac{-2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{1}{2}kx} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx - \frac{\pi}{6}\right) + 1\right] \frac{\partial^2 \tau_{x\zeta}}{\partial y^2}, \end{aligned} \tag{5.4—65}$$

$$\begin{aligned} M_{yW} &= \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{r}{\beta} f'_W(x) \frac{\partial \tau_{x\zeta}}{\partial y} \\ &= -\frac{r}{\beta}\left[\frac{2}{\sqrt{3}} k e^{-\frac{1}{2}kx} \sin\frac{\sqrt{3}}{2}kx\right] \frac{\partial \tau_{x\zeta}}{\partial y}, \end{aligned} \tag{5.4—66}$$

(5.4—65)和(5.4—66)式表明，大洋西边界区的运动是一种随 x 增大而衰减的阻尼振动，振动的波长为

$$\lambda_W = 2\pi/\left(\frac{\sqrt{3}}{2}k\right) = \frac{4\pi}{\sqrt{3}k}。 \tag{5.4—67}$$

对于任意给定的纬度，M_{xW}的极值由 $f_W(x)$的极值决定，M_{yW}的极值由 $f'_W(x)$的极值决定。使 $f_W(x)$发生前两个极值的位置为

$$x_{1,2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}k}, \frac{4\pi}{\sqrt{3}k}。$$

使 $f'_W(x)$发生前两个极值的位置为

$$x_{a,b} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}k}, \frac{8\pi}{3\sqrt{3}k}。$$

相应的极值为

$$\left.\begin{aligned} f_W(x_1) &= 1 + e^{-\pi/\sqrt{3}}, \\ f_W(x_2) &= 1 - e^{-2\pi/\sqrt{3}}, \\ f'_W(x_a) &= ke^{-\pi/3\sqrt{3}}, \\ f'_W(x_b) &= -ke^{-4\pi/3\sqrt{3}}。 \end{aligned}\right\} \tag{5.4—68}$$

由此可以看出，$f_W(x)$的极值在 1 左右变动，而比值

$$f'_W(x_b)/f'_W(x_a) = -e^{-\pi/\sqrt{3}} = -0.17, \tag{5.4—69}$$

因而在西边界区内以 $x=x_a$ 为主轴处有一主流，以 $x=x_b$ 为主轴处存在一逆流，逆流的量值仅为主流的 0.17 倍。该比值与实际观测资料求得的 0.19 很相近。

对于大洋中部，流函数 ψ 可简化为

$$\psi_c = -\frac{r}{\beta}f_c(x)\frac{\partial \tau_{x\zeta}}{\partial y}, \tag{5.4—70}$$

其中

$$f_c(x) = 1 - \frac{x}{r}, \tag{5.4—71}$$

以及

$$f'_c(x) = -\frac{1}{r}, \tag{5.4—72}$$

中部的质量运输

显然，同西部流动和中部流动相比，东部流动最弱。这就是大洋流动的西部强化现象。

Munk 风生大洋环流理论是 Ekman、Sverdrup 和 Stommel 研究基础上提出的考虑沿岸边界层的粘性理论，但仍不计及非线性惯性效应。Munk 取 $A_l=5\times10^3\mathrm{m^2s^{-1}}$，利用(5.4—67)式所求的波长表达式求得了主流宽度和逆流宽度各为 200km，此值约为实际观测到的宽度的 3 倍。因此 A_l 应取为 $10^2\mathrm{m^2s^{-1}}$，对于这样的边界层尺度，非线性惯性项已不能略去不计了。另外，依西部解计算得到的西部总流量仅为实测值之半，Munk 认为是由于风应力之值计算偏低。

5.4.5 大洋环流西向强化的惯性理论

前节讨论的 Munk 大洋风生环流理论考虑了水平湍流摩擦项，引进了湍流粘性边界区域，成功地获得了大洋环流模式，阐明了西边界流动的强化现象。可是由于计算得到的西部流动宽度过大，流量过小，致使理论有很大缺陷。近年来，更多的海洋家认为，惯性效应是控制西边界的重要因子，非线性惯性项比湍流摩擦项大一个量级，后者可以忽略。这样的理论称之为惯性理论。由于惯性理论考虑了非线性惯性效应，因此描述运动的方程变成非线性的了，求解比较困难。但从绝对涡度守恒，可以阐明西向强化现象[Charney(1955)，Morgan(1956)等]。

考虑惯性效应后，描述运动的基本方程可取为如下右手直角坐标系中的形式

$$M_{xc} = -\frac{r}{\beta}\left(1-\frac{x}{r}\right)\frac{\partial^2\tau_{x\zeta}}{\partial y^2},\tag{5.4—73}$$

$$M_{yc} = \frac{1}{\beta}\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}。\tag{5.4—74}$$

由(5.4—74)式知，对于任意给定纬度处，大洋中部的 y 方向的质量运输为一常量。西边界区 y 方向质量运输极值与中部 y 方向质量运输之比为

$$\frac{M_{yW}\big|_{x=x_0}}{M_{yc}} = -rke^{-\pi/3\sqrt{3}} = 0.55rk。\tag{5.4—75}$$

对大西洋 $r=1000\text{km}$，$k=\sqrt[3]{\beta/A_l}$，其中 $\beta=2\times10^{-11}\text{m}^{-1}\text{s}^{-1}$，$A_l=5\times10^{3}\text{m}^2\text{s}^{-1}$，可得 $kr=100$。由此看出，沿 y 方向，西部流动比中部流动要强得多。比较(5.4—65)式和(5.4—73)式也可以看出，沿 x 方向，西部流动也比中部流动要强，中部流动随着 x 的增大而不断减小。

对于东边界区，由于 $x\to r$，因此流函数可简化为

$$\psi_E = -\frac{r}{\beta}f_E(x)\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y},\tag{5.4—76}$$

其中

$$f_E(x) = 1-\frac{x}{r}+\frac{1}{kr}\left[1-e^{-k(r-x)}\right]。\tag{5.4—77}$$

由此得

$$f'_E(x) = -\frac{1}{r}\left[1-e^{-k(r-x)}\right],\tag{5.4—78}$$

$$M_{xE} = -\beta^{-1}\left\{r-x+\frac{1}{k}\left[1-e^{-k(r-x)}\right]\right\}\frac{\partial^2\tau_{x\zeta}}{\partial y^2},\tag{5.4—79}$$

$$M_{yE} = \beta^{-1}\left[1-e^{-k(r-x)}\right]\frac{\partial\tau_{x\zeta}}{\partial y}。\tag{5.4—80}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{du}{dt}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\&\frac{dv}{dt}+fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\\&0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g,\end{aligned}\right\}\tag{5.4—81}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0。\tag{5.4—82}$$

设大洋仍为矩形，坐标原点位于西岸，$x=0$ 和 $x=r$ 为西岸和东岸，$y=0$ 和 $y=s$ 为南岸和北岸。设海深 h 为常量。

对于大洋中部区域，上述基本方程前进一步简化为

$$\left.\begin{aligned}&-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\&fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\\&0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g,\\&\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0。\end{aligned}\right\}\tag{5.4—83}$$

该简化方程组与 Sverdrup 研究大洋中部风生环流所采用的基本方程组(5.4—1)和(5.4—2)完全一致。因此可以得到 Sverdrup 方程

$$\beta M_y=\mathrm{rot}_z\tau_\zeta$$

其中 $M_y=\int_{-h}^{0}\rho v dz$。若用流函数表示，$M_y=\frac{\partial\psi}{\partial x}$，又设风力

$$\tau_{x\zeta}=-W\left(1-\frac{y^2}{s^2}\right),\tau_{y\zeta}=0,(0\leqslant y\leqslant s)\tag{5.4—84}$$

于是可得解

$$\psi=\frac{2W}{\beta s^2}y(r-x)。\tag{5.4—85}$$

对于大洋西岸边界区域，由于惯性理论认为湍流摩擦项相对

于惯性项可以忽略，因此对西边界区域来说，基本方程(5.4—81)简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{du}{dt}-fv&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \frac{dv}{dt}+fu&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ 0&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g,\end{aligned}\right\}\tag{5.4—86}$$

和

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0。\tag{5.4—87}$$

将 x 方向和 y 方向的运动方程交叉微分后再相减，可得

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+u\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+v\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\\ &+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+v\frac{\partial f}{\partial y}=0。\end{aligned}\tag{5.4—88}$$

其中若引进相对涡度的符号 ζ_r，即

$$\zeta_r=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y},$$

并注意 $\frac{\partial f}{\partial t}=0$，$\frac{\partial f}{\partial x}=0$，于是(5.4—88)式可简记为

$$\frac{d(\zeta_r+f)}{dt}=-(\zeta_r+f)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right).\tag{5.4—89}$$

式中 $\zeta_r+f=\zeta_a$ 为绝对涡度。对连续方程(5.4—87)求铅直向平均，得

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial[(h+\zeta)\langle u\rangle]}{\partial x}+\frac{\partial[(h+\zeta)\langle v\rangle]}{\partial y}=0,$$

进一步可得

$$\frac{dH}{dt}+H\left(\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x}+\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y}\right)=0,\tag{5.4—90}$$

其中 $H=h+\zeta$。如果忽略 u 和 v 的沿 z 方向的变化，则可由(5.4—89)式和(5.4—90)式得到

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\zeta_r+f}{H}\right)=0。 \tag{5.4—91}$$

再近似地认为在西边界区 $\frac{\partial u}{\partial y}=0$，以及利用 v 不随 z 而变的假定，从而有 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)$，结果(5.4—91)式变为

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+f}{H}\right]=0, \tag{5.4—92}$$

于是可得

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+f}{H}=F(\psi)。 \tag{5.4—93}$$

因为 f 可近似表为[参见(4.5—27)式]

$$f=f_0+\beta y$$

因此(5.4—93)式可写成

$$\frac{1}{H}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+f_0+\beta y=HF(\psi)=G(\psi), \tag{5.4-94}$$

式中认为 H 为常量。若 $x=L$ 处为西边界层的边缘，并且 L 是足够大，以致边界层的解在那里即为内部的解，惯性项可以忽略，因此在 $x=L$ 处有

$$f_0+\beta y=G(\psi_i), \tag{5.4-95}$$

其中下标 i 表示内部之意。另外，根据内部区域中的解(5.4—85)式，由于在西边界区域 $L\ll r$ 因而

$$\psi_i(L,y)=\frac{2W}{\beta s^2}\tau y=U^* y。 \tag{5.4—96}$$

于是(5.4—95)式可表为

$$f_0+\beta y=G(U^* y), \tag{5.4—97}$$

而由(5.4—95)式和(5.4—96)式有

$$G(\psi) = f_0 + \beta \frac{\psi}{U^*}。 \tag{5.4—98}$$

将上式代入(5.4—94)式得

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{H\beta}{U^*}\psi = -H\beta y, \tag{5.4—99}$$

此方程在西边界应满足的边界条件为

$$x = 0 \text{ 处} \qquad \psi(0, y) = 0,$$

于是,满足边界条件的解为

$$\psi = U^* y\left[1 - e^{-(H\beta/U^*)^{1/2} x}\right]。 \tag{5.4—100}$$

由此求得

$$M_y = (U^* H\beta)^{1/2} y e^{-(H\beta/U^*)^{1/2} x}, \tag{5.4—101}$$

表明在西边界区域有一强烈的北向流动,近岸处质量运输很大,随着离岸距离的增加,质量运输迅速减小。这种西向强化现象是非线性惯性项导致的结果。

§5.5 热盐环流

前面讨论的风生大洋环流,迄今已有较多的理论研究。在实际大洋里,除了因风力作用产生的海流而外,还存在着因海水受热、冷却等引起的密度分布不均匀所产生的流动——热盐环流,这方面的研究工作还比较少,然而这方面的问题是十分重要的。实际海洋里动力环流和热盐环流是并存的,在海洋的下层则以热盐环流为主,因为风生动力环流只能影响上层。在海洋深层的温度、盐度和密度的变化都比较小,一般说来热盐环流的速度是缓慢的。但实际观测表明,并非所有的深层热盐环流速度都很缓慢。因此要研究大洋环流,不仅要研究风生大洋环流,而且还要研究热盐环流。对于由热盐因素产生的流动,在理论上进行研究时,除了需要描述海水动力学和运动学规律的运动方程和连续方程而外,还需要描述

海水热力学性质的热传导方程和盐扩散方程。下面讨论几种热盐环流理论模式。

5.5.1 由海底温度扰动引起的热盐环流

设海底平坦。取右手直角坐标系，z 轴指向上为正，原点位于海底。假定在 $z=0$ 处有一温度扰动 $\theta_b=\theta_0\cos ly$，结果产生对流。对流受海水湍流粘滞性和湍流热传导性的耗散作用，维持着一种定常的缓慢运动。描述这种运动的基本方程可表为

$$-\rho_0 f v = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho_0 A_z \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \qquad (5.5—1)$$

$$\rho_0 f u = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho_0 A_z \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \qquad (5.5—2)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g, \qquad (5.2—3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad (5.5—4)$$

$$w\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = K_{\theta z}\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \qquad (5.5—5)$$

$$\rho = \rho_0(1-K\theta)。 \qquad (5.5—6)$$

其中 K 为热膨胀系量，$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z}$为未受扰动时的温度梯度，为已知，即

$$\frac{\partial \bar{\theta}}{\partial z} = b, \qquad (5.5—7)$$

ρ_0 为 $\theta=0$ 时的常密度。当外加温度扰动之后，由于对流作用，温度场(从而密度场)产生不均匀分布。非均匀的密度分布 ρ 只在 z 方

向的运动方程中出现，表明只考虑密度的微小扰动所产生的阿基米德浮力(Boussinesq 近似)。

首先假定 $f=0$，并假定解与 x 无关，$u=0$。于是上述基本方程简化为

$$0=-\frac{\partial p}{\partial y}+\rho_0 A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{5.5—8}$$

$$0=-\frac{\partial p}{\partial z}-\rho g, \tag{5.5—9}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{5.5—10}$$

$$wb=K_{\theta z}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}, \tag{5.5—11}$$

$$\rho=\rho_0(1-K\theta)。 \tag{5.5—12}$$

求解的边界条件为

$$\left.\begin{array}{l} z=0\text{ 处}\quad w=0,\ v=0,\\ \theta_b=\theta_0\cos ly。\end{array}\right\} \tag{5.5—13}$$

由(5.5—8)和(5.5—9)分别对 z 和 y 微分后消去 p，得到

$$\rho_0 A_z\frac{\partial^3 v}{\partial z^3}+g\frac{\partial\rho}{\partial y}=0,$$

再对 y 求导，上式变成

$$\frac{\partial^4 v}{\partial z^3\partial y}+\frac{g}{\rho_0 A_z}\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}=0。 \tag{5.5—14}$$

由(5.5—11)式可得

$$\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{K_{\theta z}}{b}\frac{\partial^3\theta}{\partial z^3}。$$

利用连续方程(5.5—10)，上式变为

$$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{K_{\theta z}}{b}\frac{\partial^3 \theta}{\partial z^3},$$

再对 z 求导二次，结果有

$$\frac{\partial^4 v}{\partial y \partial z^3} = -\frac{K_{\theta z}}{b}\frac{\partial^6 \theta}{\partial z^6}。 \qquad (5.5—15)$$

由(5.5—14)式和(5.5—15)式可得

$$\frac{g}{\rho_0 A_z}\frac{\partial^2 \rho}{\partial y^2} = \frac{K_{\theta z}}{b}\frac{\partial^6 \theta}{\partial z^6},$$

再将状态方程(5.5—12)代入，上式变为

$$\frac{\partial^6 \theta}{\partial z^6} = -\frac{gbK}{A_z K_{\theta z}}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}。 \qquad (5.5—16)$$

考虑到海底扰动形如 $\theta_b = \theta_0 \cos ly$，可设方程(5.5—16)的解为 $\theta = \theta(z)\cos ly$，代入(5.5—16)式后，有

$$\frac{d^6 \theta(z)}{dz^6} = F^2 Q(z), \qquad (5.5—17)$$

其中 $F^2 = \frac{gbKl^2}{A_z K_{\theta z}}$。求解方程(5.5—17)的边界条件可由边界条件(5.5—13)转变而来。原来的海底边界条件 $w=0$，可利用(5.5—11)式转变为 $\frac{d^2\theta(0)}{dz^2}=0$，而 $v=0$ 可利用(5.5—10)式和(5.5—11)式，再对 y 积分，转变为 $\frac{d^3\theta(0)}{dz^2}=0$；原来的边界条件 $\theta_b = \theta_0 \cos ly$，可转变为 $\theta(0) = \theta_0$。于是求解方程(5.5—17)的边界条件可表为

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\theta(z)}{dz^2}\Big|_{z=0} = \frac{d^3\theta(z)}{dz^3}\Big|_{z=0} = 0, \\ &\theta(0) = \theta_0。\end{aligned}\right\} \qquad (5.5—18)$$

满足边界条件的解为

$$\theta(z) = \theta_0\left[\frac{1}{2}e^{-Fz} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}Fz}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}Fz + \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}Fz\right)\right],$$

最后得

$$\theta = \theta_0 \cos ly\left[\frac{1}{2}e^{-Fz} + \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}Fz}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}Fz - \frac{\sqrt{2}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}Fz\right)\right]。$$

(5.5—19)

再由热传导方程(5.5—11)和连续方程(5.5—10)可导出

$$v = \frac{F^3\theta_0 K_{\theta z}}{2bl}\sin ly\left[e^{-Fz} + e^{-\frac{1}{2}Fz}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}Fz + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}Fz\right)\right], \tag{5.5—20}$$

$$w = \frac{F^3\theta_0 K_{\theta z}}{2b}\cos ly\left[e^{-Fz} + e^{-\frac{1}{2}Fz}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}Fz + \frac{\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}Fz\right)\right]。 \tag{5.5—21}$$

可见，海底温暖处海水上升，而海底寒冷处则海水下降。温度和流速随高度的变化如图 5—20 所示。

其次，如果 f 为一常量，则 $u\neq 0$，但设解仍与 x 无关。此种情况下，方程组(5.5—1)—(5.5—6)变为

$$-fv - A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{5.5—22}$$

$$fu = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{5.5—23}$$

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g, \tag{5.5—24}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{5.5—25}$$

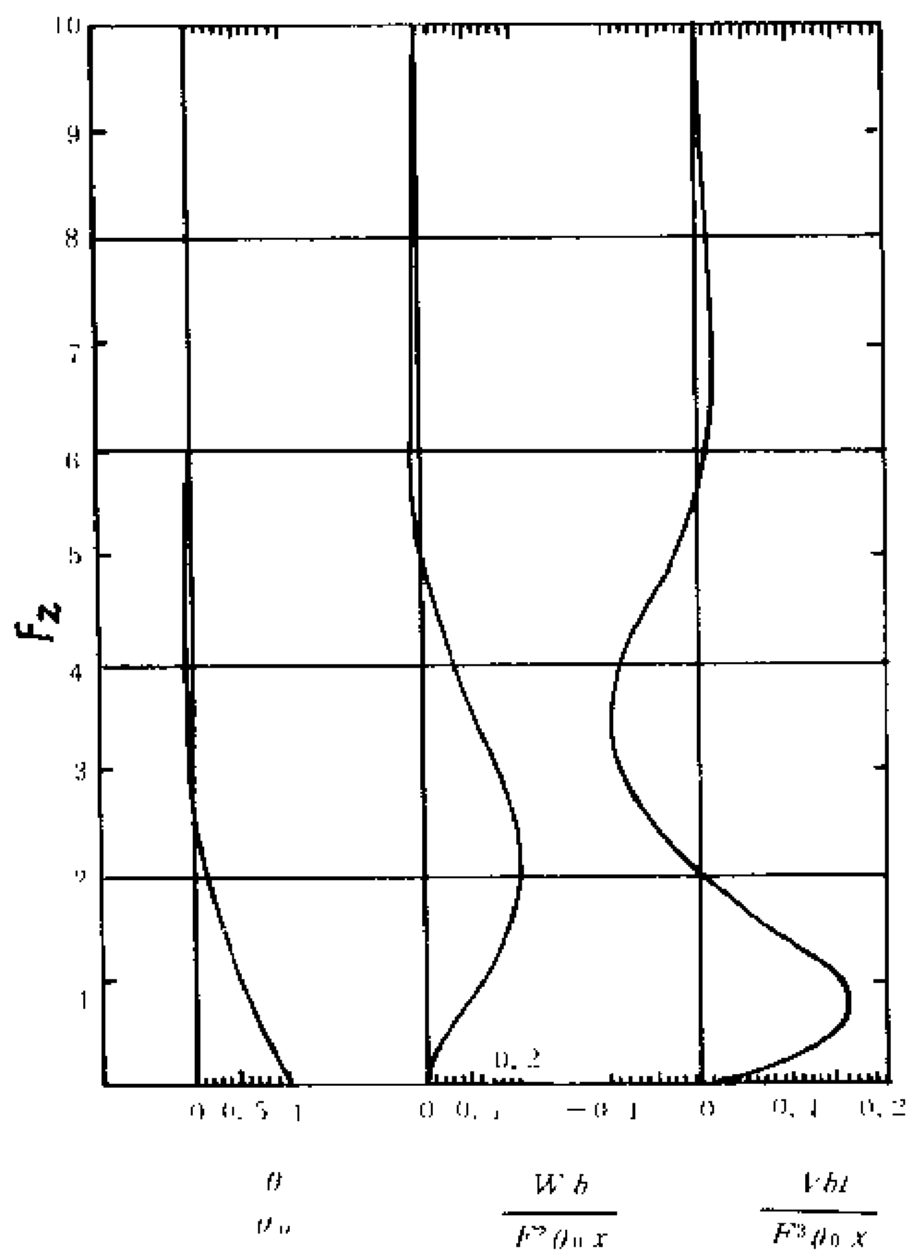


图 5—20　扰动温度、铅直和水平流速三者的振幅随高度的变化

($f=0$)(据景振华的海流原理，1966)

$$wb = K_{\theta z}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}, \tag{5.5—26}$$

$$\rho = \rho_0(1-K\theta)。 \tag{5.5—27}$$

消去 θ 以外的变量，得 θ 的微分方程

$$\frac{1}{E^4}\frac{d^7\theta}{dz^7} - \frac{d^3\theta}{dz^3} + L^2\frac{d\theta}{dz} = 0, \qquad (5.5\text{—}28)$$

其中

$$E^4 = -f^2/A_z^2, \quad L^2 = g\rho_0 Kbl^2 A_z/(f^2 K_{\theta z})。$$

其解为

$$\theta = \theta_0 \cos ly\{2e^{-Ez/\sqrt{2}}[D_1\cos\frac{1}{\sqrt{2}}Ez +$$

$$D_2\sin\frac{1}{\sqrt{2}}Ez] + Ce^{-Lz}\}。\qquad (5.5\text{—}29)$$

然后由(5.5—26)式，(5.5—25)式和(5.5—22)式可求得 w, v 和 u 的表达式：

$$u = \theta_0 \sin ly\{\frac{\sqrt{2}\,gKl}{Ef}[(D_1 - D_2)\sin\frac{1}{\sqrt{2}}Ez$$

$$(D_1 + D_2)\cos\frac{1}{\sqrt{2}}Ez]e^{-Ez/\sqrt{2}} - \frac{gKl}{Lf}Ce^{-Lz}$$

$$-\frac{\sqrt{2}\,A_z K_{\theta z} E^3}{flb}[(D_1 - D_2)\cos\frac{1}{\sqrt{2}}Ez$$

$$+ (D_1 + D_2)\sin\frac{1}{\sqrt{2}}Ez]e^{-Ez/\sqrt{2}} + \frac{A_z K_{\theta z}}{flb}CL^5 e^{-Lz}\},$$

$$(5.5\text{—}30)$$

$$v = \theta_0 \sin ly\{\frac{\sqrt{2}\,E^3 K_{\theta z}}{lb}[(D_1 - D_2)\sin\frac{1}{\sqrt{2}}Ez$$

$$-(D_1 + D_2)\cos\frac{1}{\sqrt{2}}Ez]e^{-Ez/\sqrt{2}}$$

$$+ \frac{K_{\theta z}L^3}{lb}Ce^{-Lz}\}, \qquad (5.5\text{—}31)$$

$$w=\theta_0\cos ly\{\frac{2E^2K_{\theta z}}{b}[D_1\sin\frac{1}{\sqrt{2}}Ez-D_2\cos\frac{1}{\sqrt{2}}Ez]$$

$$\times e^{-Ez/\sqrt{2}}+\frac{K_{\theta z}L^2}{b}Ce^{-Lz}\}。\qquad(5.5—32)$$

以上各式中

$$\left.\begin{aligned}D_1&=\frac{L^2(2L^2-E^2)}{4L^4-2L^2E^2+2\sqrt{2}LE^3+2E^4},\\D_2&=\frac{L^2(E^2+\sqrt{2}LE)}{4L^4-2L^2E^2+2\sqrt{2}LE^3+2E^4},\\C&=\frac{E^3}{E^3-EL^2+\sqrt{2}L^3}。\end{aligned}\right\}\qquad(5.5—33)$$

以上之解可绘制成图5－21。由图可以看出，考虑地转效应的情况下，对流运动的情形比较复杂，除了海水升降运动，底层的水平流速矢量随高度呈螺旋状变化。

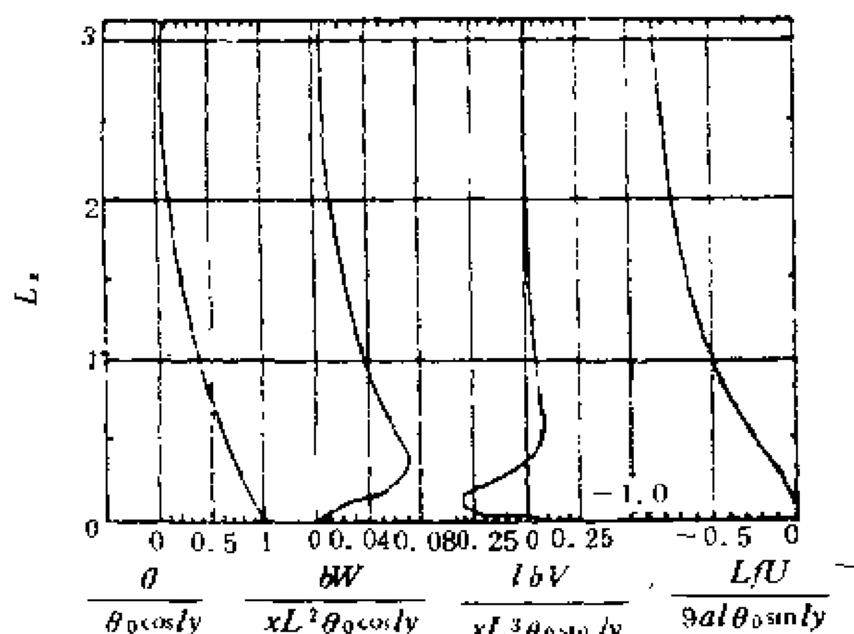


图5－21　扰动温度、流速分量随高度的变化

($f=0$)(据景振华的海流原理，1966)

5.5.2　海面温度扰动引起的热盐环流(β-平面)

现在考虑 f 随纬度的变化，即 $\beta=\frac{df}{dy}\neq0$ 的情形，并假定铅直湍流摩擦力可以略去。海面温度扰动取 $\theta_s=\theta_0\cos lx$ 的形式。若取 z 轴指向下为正的左手直角坐标系，描述运动的基本方程为

$$-fv = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x}, \qquad (5.5—34)$$

$$fu = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial y}, \qquad (5.5—35)$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g, \qquad (5.5—36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \qquad (5.5—37)$$

$$wb = K_{\theta z}\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}, \qquad (5.5—38)$$

$$\rho = \rho_0(1 - K\theta), \qquad (5.5—39)$$

边界条件为

$$\left.\begin{array}{lll} z = 0(\text{海面}) & \theta_s = \theta_0 \cos lx, & \\ z \to -\infty & \theta \to 0, & w,u,v \to 0。\end{array}\right\} \qquad (5.5—39)$$

由(5.5—35)式和(5.5—36)式交叉微分消去 p,得

$$f\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x}\right) + v\frac{df}{dy} = 0,$$

利用连续方程(5.5—37)和湍流热传导方程,结果可得仅包含温度 θ 的微分方程

$$\frac{\partial^4 \theta}{\partial z^4} = \frac{\beta g K b}{f^2 K_{\theta z}}\frac{\partial \theta}{\partial x}。 \qquad (5.5—40)$$

令 $\theta = \theta(z)e^{ilx}$,上式可写成

$$\frac{d^4\theta(z)}{dz^4} = iG^4\theta(z), \qquad (5.5—41)$$

其中

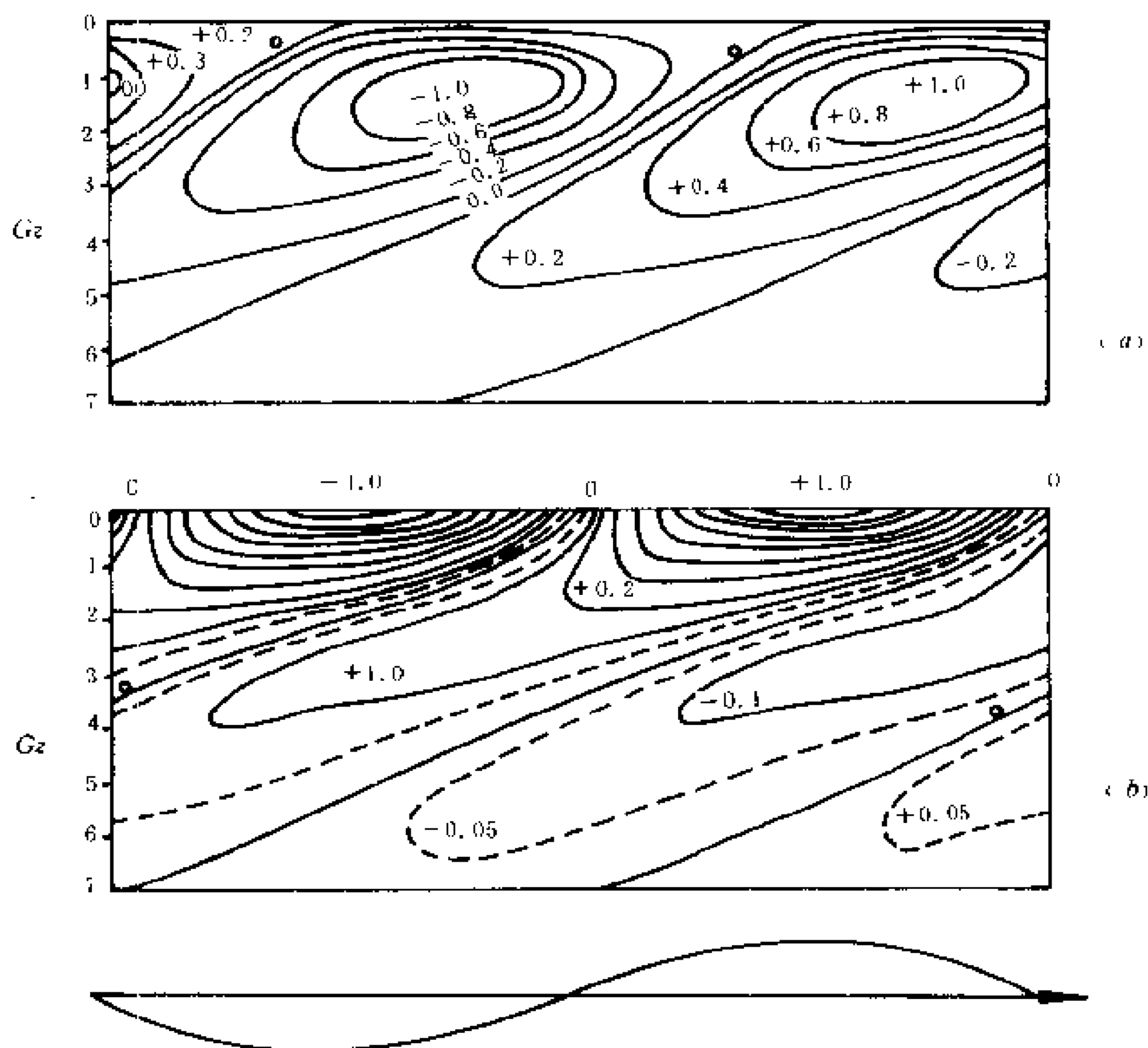


图 5—22 (a)等温度线。无维深度 Gz 向下为正，水平坐标 x 轴指向右为正，x 轴的原点在图的横轴中央，海面扰动温度 $\theta_s=\theta_0\sin ky$

(b)等铅直速度线(据景振华的海流原理，1966)

$$G=\sqrt{\frac{\beta gKbl}{f^2K_{\theta z}}}。$$

由(5.5—41)式解出 $\theta(z)$，然后由 $\theta=\theta(z)e^{ilx}$ 取实部得

$$\theta=\frac{\theta_0}{2}\{\cos lx[e^{-Gz\cos\frac{\pi}{8}}\cos(Gz\sin\frac{\pi}{8})+$$

$$e^{-Gz\cos\frac{3\pi}{8}}\cos(Gz\sin\frac{3\pi}{8})]+$$

$$\sin lx[e^{-Gz\cos\frac{\pi}{8}}\sin(Gz\sin\frac{\pi}{8})-$$

$$e^{-Gz\cos\frac{3\pi}{8}}\sin(Gz\sin\frac{3\pi}{8})]\}。\qquad(5.4—42)$$

由(5.5—38)式可求得铅直速度

$$w=\frac{\sqrt{2}}{4}\frac{G^2x\theta_0}{b}\{\cos lx[e^{-Gz\cos\frac{\pi}{8}}\cos(Gz\sin\frac{\pi}{8})+$$

$$e^{-Gz\cos\frac{\pi}{8}}\sin(Gz\sin\frac{\pi}{8})\quad e^{-Gz\cos\frac{3\pi}{8}}\cos(Gz\sin\frac{3\pi}{8})+$$

$$e^{-Gz\cos\frac{3\pi}{8}}\sin(Gz\sin\frac{3\pi}{8})]+\sin lx[-e^{-Gz\cos\frac{\pi}{8}}\cos(Gz\sin\frac{\pi}{8})+$$

$$e^{-Gz\cos\frac{\pi}{8}}\sin(Gz\sin\frac{\pi}{8})+e^{-Gz\cos\frac{3\pi}{8}}\cos(Gz\sin\frac{3\pi}{8})+$$

$$e^{-Gz\cos\frac{3\pi}{8}}\sin(Gz\sin\frac{3\pi}{8})]\}。\qquad(5.5—43)$$

根据以上的解，可以作出等温度线及等铅直速度线。图 5—22a 和图 5—22b 所示的是假定表面扰动温度为正弦函数 $\theta_s=\theta_0\sin lx$ 情形下的等温度线和垂直速度线。由图可见，有一个随深度增加而向西的相移，使得有相同符号的温度区域向西倾斜。

5.5.3 有东边界的热盐环流

前面讨论的热盐环流没有考虑边界的存在，而且认为有一个大的铅直温度梯度，是不太切合实际的。Robinson 和 Stommel

(1959)注意到有一个子午向的东边界，束缚着纬向的流动；并认为由于海面经常存在着子午向的温度梯度而产生流动。假定海面无风，海深无限，流动可认为是地转平衡，在右手直角坐标系中，运动可以用下述方程组描述

$$-f\rho_0 v = -\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{5.5—44}$$

$$f\rho_0 u = -\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{5.5—45}$$

$$g\rho_0(1-K\theta) = -\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{5.5—46}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{5.5—47}$$

$$v\frac{\partial \theta}{\partial y} + w\frac{\partial \theta}{\partial z} = K_{\theta z}\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}。 \tag{5.5—48}$$

边界条件

$$\left.\begin{array}{l} z=0(\text{海面}),\ w=0,\ \theta=\theta_0+\theta_1 y, \\ z\to-\infty,\ w\ \text{有限},\theta\to 0, \\ x=0(\text{东边界}),\theta=0。\end{array}\right\} \tag{5.5—49}$$

在(5.5—48)式中略去$u\frac{\partial \theta}{\partial x}$，是因为$\frac{\partial \theta}{\partial x}$可忽略地小。

由于我们所要研究的问题中，θ和w最重要，因此下面只限于讨论这两个变量以及与它们有关的方程。交叉微分(5.5—44)式和(5.5—46)式，然后两式相减得

$$f\frac{\partial v}{\partial z} - Kg\frac{\partial \theta}{\partial x} = 0。 \tag{5.5—50}$$

再交叉微分(5.5—44)和(5.5—45)式后相减得

$$f\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)+v\beta-0,$$

利用连续方程(5.5—47),上式变成

$$\beta v—f\frac{\partial w}{\partial z}=0。\qquad(5.5—51)$$

将(5.5—51)式分别代入(5.5—48)式和(5.5—50)式,可得所需的方程

$$K_{\theta z}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}—w\frac{\partial\theta}{\partial z}—\frac{f}{\beta}\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial\theta}{\partial y}=0,\qquad(5.5—52)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}-\frac{K\beta g}{f^2}\frac{\partial\theta}{\partial x}=0。\qquad(5.5—53)$$

利用边界条件(5.5—49),可得解(近似)(景振华,1966)

$$\theta=\theta_0(y)\exp\{—[\frac{1}{2K_{\theta z}}\frac{K\beta g}{3f^2}(\theta_0+\frac{\theta_1 f_0}{\beta}\times10^{-8})\frac{1}{x}]\frac{1}{3z}\},\qquad(5.5—54)$$

$$w=\theta_0(y)[\frac{K\beta g}{3f^2}(\frac{2K_{\theta z}}{\theta_0+\theta_1 f_0\beta^{-1}\times10^{-8}})^2\frac{1}{x}]^{1/2}\cdot(1—\exp\{\quad\})。\qquad(5.5—55)$$

其中 $\theta_0(y)=\theta_0+\theta_1 y+\frac{\theta_1 f_0}{\beta}\times10^{-8}$, $f_0=f—\beta y$,而(5.5－55)式中的{　}代表(5.5—54)式中指数部分的内容。

5.5.4 密度分布所产生的热盐环流

Takano(1958)研究了二层或三层海水中非均匀密度分布的海面无风力作用情况下的热盐环流。假定运动与经度无关,并且所有的变量均只是 y 和 z 的函数。运动为定常的大尺度运动,为求解方便,取铅直湍流摩擦力与速度的一次方成比例。于是在坐标原点位于静止海面、z 轴指向下为正的左手直角坐标系中,描述运动的基

本方程为

$$\left.\begin{aligned}
&-f\rho v = -ku,\\
&f\rho u = -\frac{\partial p}{\partial y} - kv,\\
&0 = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g,\\
&\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,\\
&\rho = f(y,z)。
\end{aligned}\right\} \qquad (5.5—56)$$

如果现在考虑二层海水，上下层海水中的物理变量分别以 1 和 2 指示．设上层海水厚度为 H，下层海水厚度为 $(D-H)$，上下层密度分布为已知形式，于是(5.5—56)式可具体写为

$$-f\rho_{1,2}v_{1,2} = -ku_{1,2}, \qquad (5.5—57)$$

$$f\rho_{1,2}u_{1,2} = -\frac{\partial p_{1,2}}{\partial y} - kv_{1,2}, \qquad (5.5—58)$$

$$0 = -\frac{\partial p_{1,2}}{\partial z} + \rho_{1,2}g, \qquad (5.5—59)$$

$$\frac{\partial v_{1,2}}{\partial y} + \frac{\partial w_{1,2}}{\partial z} = 0, \qquad (5.5—60)$$

$$\rho_1 = -\triangle\rho\cos\frac{\pi}{l}(y-y_0)[\mathrm{ch}\,rz - \mathrm{th}\,rH\,\mathrm{sh}\,rz] + \rho_s, \qquad (0\leqslant z\leqslant H)$$
$$(5.5—61)$$

$$\rho_2 = \beta_1(z-D) + \rho_f。 \qquad (H\leqslant z\leqslant D) \qquad (5.5—62)$$

其中 $2l$ 为海洋长度，$\triangle\rho$，ρ_s，ρ_f，β_1 和 r 均为常数，f 取为常量。在海面 $(z=0)$，有

$$\rho_1 = -\Delta\rho\cos\frac{\pi}{l}(y-y_0) + \rho_s,$$

而在海底($z=D$)有

$$\rho_2 = \rho_f。$$

求解上述基本方程的边界条件为

$$\begin{aligned} &z=0 \quad w_1=0, \\ &z=H \quad u_1=u_2,\ v_1=v_2,\ w_1=w_2, \\ &z=D \quad w_2=0。 \end{aligned} \tag{5.5—63}$$

根据连续方程(5.5—60),引进流函数 $\psi_{1,2}$,满足

$$v_{1,2}=\frac{\partial\psi_{1,2}}{\partial z},w_{1,2}=-\frac{\partial\psi_{1,2}}{\partial y}。 \tag{5.5—64}$$

由运动方程(5.5—57)和(5.5—58)中消去 $u_{1,2}$,得到

$$(k^2+f^2\rho_{1,2}^2)v_{1,2}=k\frac{\partial p_{1,2}}{\partial y}。 \tag{5.5—65}$$

再由第三个运动方程(5.5—59)和上式(5.5—65)交叉微分后相加,得

$$(k^2+f^2\rho_{1,2}^2)\frac{\partial v_{1,2}}{\partial z}+kg\frac{\partial\rho_{1,2}}{\partial y}=0,$$

近似地取 $f^2\rho_{1,2}^2=f^2$,再将(5.5—64)代入,有

$$(k^2+f^2)\frac{\partial^2\psi_{1,2}}{\partial z^2}+kg\frac{\partial\rho_{1,2}}{\partial y}=0。 \tag{5.5—66}$$

将密度的具体形式代入上式,得两个方程

$$\begin{aligned} (k^2+f^2)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2} &= -kg\frac{\pi}{l}\Delta\rho\sin\frac{\pi}{l}(y-y_0) \\ &\quad\times(\mathrm{ch}rz-\mathrm{th}rH\,\mathrm{sh}rz), \end{aligned} \tag{5.5—67}$$

$$(k^2+f^2)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}=0。 \tag{5.5—68}$$

由边界条件(5.5—63)转换成适合求解上面二个方程的边界条件

$$\left.\begin{aligned} &z=0, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial y}=0, \\ &z=H, \quad \frac{\partial\psi_1}{\partial z}=\frac{\partial\psi_2}{\partial z}, \frac{\partial\psi_1}{\partial y}=\frac{\partial\psi_2}{\partial y}, \\ &z=D, \quad \frac{\partial\psi_2}{\partial y}=0. \end{aligned}\right\} \tag{5.5—69}$$

方程(5.5—67)和(5.5—68)的通解为

$$(k^2+f^2)\psi_1=-kg\frac{\pi}{lr^2}\Delta\rho\sin\frac{\pi}{l}(y-y_0)\times$$

$$(\mathrm{ch}rz-\mathrm{th}rH\mathrm{sh}rz)+A_1z+B_1, \tag{5.5—70}$$

$$(k^2+f^2)\psi_2=A_2z+B_2. \tag{5.5—71}$$

由边界条件(5.5—69)可确定出积分常数

$$A_1=-kg\frac{\pi\Delta\rho}{lr^2D}\sin\frac{\pi}{l}(y-y_0)(1-\mathrm{ch}rH+\mathrm{th}rH\mathrm{sh}rH),$$

$$A_2=A_1$$

$$B_1=-kg\frac{\pi\Delta\rho}{lr^2}\sin\frac{\pi}{l}(y-y_0),$$

$$B_2=-A_1D,$$

最后得到流函数

$$\psi_1=-\sin\frac{\pi}{l}(y-y_0)\frac{kg\pi\Delta\rho}{lr^2(k^2+f^2)}[\mathrm{ch}rz-$$

$$\mathrm{th}rH\mathrm{sh}rz+\frac{z}{D}(1-\mathrm{ch}rH+\mathrm{th}H\mathrm{sh}rH)-1], \tag{5.5—72}$$

$$\psi_2=-\sin\frac{\pi}{l}(y-y_0)\frac{kg\pi\Delta\rho}{lr^2(k^2+f^2)}(1-\mathrm{ch}rH+\mathrm{th}rH\mathrm{sh}rH)\frac{z-D}{D}. \tag{5.5—73}$$

根据流函数表达式,取 $g=9.80\mathrm{ms}^{-1}$,地转角速率 $\omega=7.29\times10^{-5}$

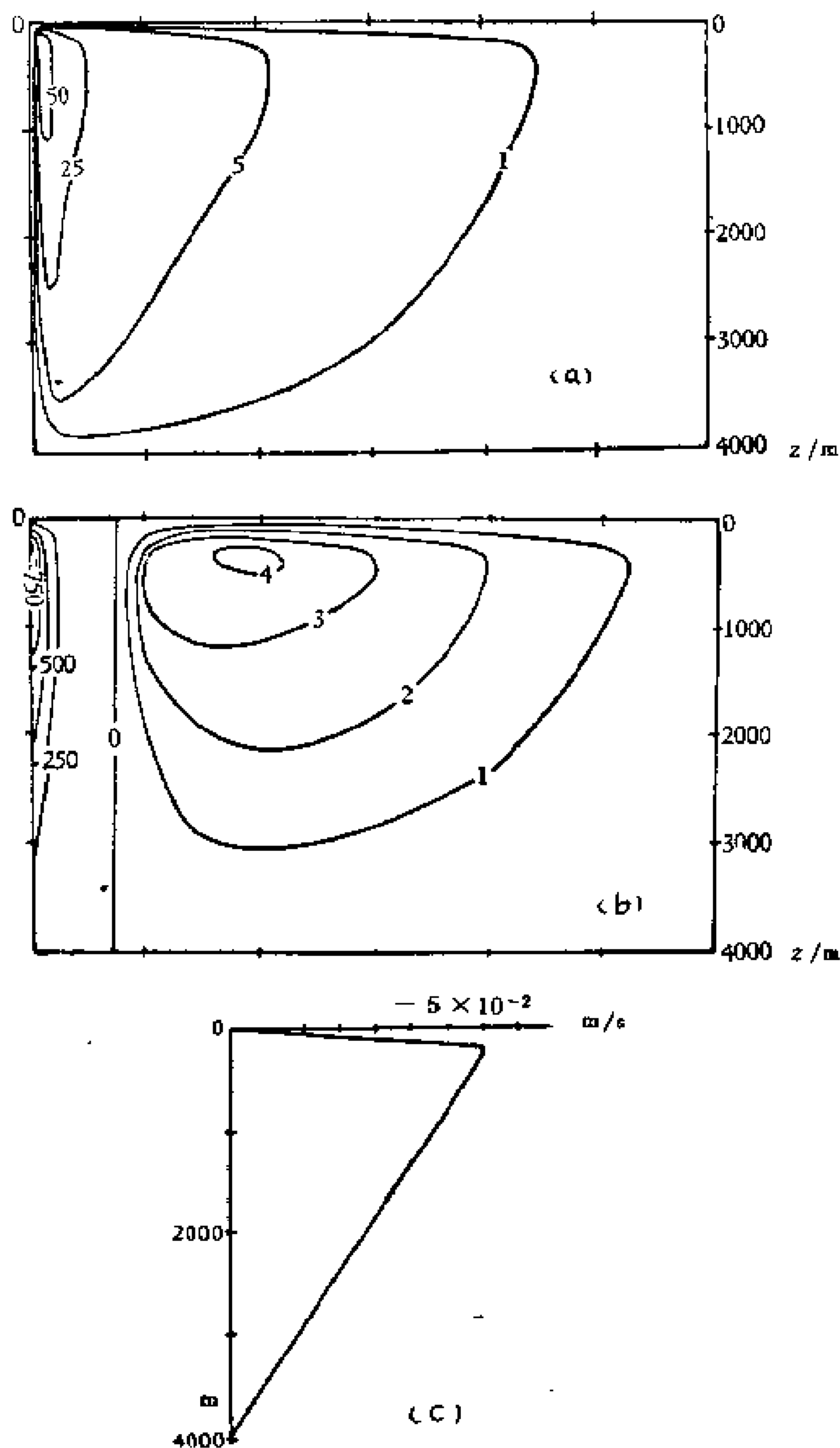


图 5—23　(*a*)$y_0=0$ 时的流线，(*b*)$y_0=\frac{1}{8}$时的流线，(*c*)铅直流速分布

(据景振华的海流原理，1966)

s^{-1}，$r=\frac{\pi}{l}10^4$，$l=2\pi\times10^3$km，$k=0.25\times10^{-5}s^{-1}$，$H=200$m，$D=4000$m，$y_0=0,\frac{1}{8}$，计算流线，如图 5—23($a$)和 5—23($b$)所示。图 5—23($c$)是铅直流速分布图。

§5.6 大洋风生—热盐环流

风生大洋环流理论只考虑了风应力的作用，而忽略了热盐因子的效应；热盐环流只考虑了热盐因子在形成环流中的作用，而滤掉了风力的影响。尽管风生大洋环流和热盐环流研究的许多成果，阐释了大洋环流的一些主要特征，但毕竟与实际有一定的距离。事实上，大洋是一个动力—热力系统，大洋环流是一种风生—热盐环流，是动力因子和热力因子相互制约、相互调整的结果(冯士笮，1979)。

设海水为非均匀不可压缩流体，忽略盐度的变化，密度仅由温度决定。基于这些假定，参照方程组(4.5—33)，大洋风生—热盐环流可描述为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+A_l\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\quad(5.6—1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}+A_l\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\quad(5.6—2)$$

$$0=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g,\quad(5.6—3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\quad(5.6—4)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = K_{\theta l}(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}) + K_{\theta z}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}, \tag{5.6—5}$$

$$\rho = \rho_0(1 - K\theta)。 \tag{5.6—6}$$

若考虑定常情形，并将(5.6—6)式代入(5.6—5)式，上列方程组变成

$$A_l(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + fv = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{5.6—7}$$

$$A_l(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) + A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - fu = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y}, \tag{5.6—8}$$

$$-g = \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}, \tag{5.6—9}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{5.6—10}$$

$$\frac{\partial \rho u}{\partial x} + \frac{\partial \rho v}{\partial y} + \frac{\partial \rho w}{\partial z} = K_l(\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}) + K_z\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}, \tag{5.6—11}$$

其中 A_l，A_z 为水平和铅直湍流运动粘滞系量，K_l，K_z 为水平和铅直湍流扩散系量。

方程组(5.6—7)—(5.6—11)为非线性的。如果我们仅着眼于描绘大洋环流的体积运输分布，则可以利用全流积分，将非线性问题转化为线性问题。

设斜压层厚度 H 为一常数，并且在 $z=-H$ 处，u,v,ρ,θ 对 z 的导数和 p 对 x,y 的导数以及它们的二阶导数为零，铅直流速 $w=0$；在海面 $z=\zeta$ 处，$w=0$，p 为常数。因 $|\zeta|\ll H$，近似取 $\zeta=0$。引进符

号

$$(S_x, S_y) = \int_{-H}^{0} (u, v) dz,$$

$$(M_x, M_y) = \int_{-H}^{0} (\rho u, \rho v) dz,$$

$$P = \int_{-H}^{0} p dz, \quad Q = \int_{-H}^{0} \rho dz,$$

$$\tau_x = \rho A_z \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}, \ \tau_y = \rho A_z \frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0},$$

$$\Gamma_0 = K_z \frac{\partial \rho}{\partial z}\Big|_{z=0},$$

于是,由上述方程组可得全流方程组

$$\rho A_l \left(\frac{\partial^2 S_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_x}{\partial y^2}\right) + \tau_x + f M_y = \frac{\partial P}{\partial x}, \qquad (5.6—12)$$

$$\rho A_l \left(\frac{\partial^2 S_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S_y}{\partial y^2}\right) + \tau_y - f M_x = \frac{\partial P}{\partial y}, \qquad (5.6—13)$$

$$-gQ = p\big|_{z=0} \quad p\big|_{z=-H}, \qquad (5.6—14)$$

$$\frac{\partial S_x}{\partial x} + \frac{\partial S_y}{\partial y} = 0, \qquad (5.6—15)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = \Gamma_0。 \qquad (5.6—16)$$

由(5.6—12)式和(5.6—13)式交叉微分后相减,消去 P,再假定 f

为常数并引入流函数 ψ，满足

$$(S_x, S_y) = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \tag{5.6—17}$$

结果得 f—平面上的风旋度—热盐梯度方程

$$\rho A_l \nabla^4 \psi = -\text{rot}_z\tau + f\Gamma_0, \tag{5.6—18}$$

式中

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$\text{rot}_z\tau = \frac{\partial \tau_y}{\partial x} - \frac{\partial \tau_x}{\partial y}。$$

方程(5.6—18)表明：全流函数 ψ 由风应力旋度和热盐梯度确定，当 $\text{rot}_z\tau = 0$ 时，大洋环流为纯热盐水平环流，而当 $\Gamma_0 = 0$ 时，为风生环流；由于方程(5.6—18)是线性的，因此热盐环流和风生环流的叠加便获得大洋风生—热盐环流；热盐梯度 Γ_0 与 f 相乘，说明在赤道附近热盐效应对产生水平环流没有显著贡献，赤道附近的水平流动主要是风生流；由于大洋中热盐要素的稳定结构，Γ_0 为负，因此在封闭大洋中的纯热盐环流为气旋式的。

如前所述，采用全流技术使非线性问题转化为线性问题，使问题得到了简化。但是这样的处理掩盖了流场和密度场的非均匀的铅直结构。一般说来，大洋风生—热盐环流的铅直结构是复杂的，对控制方程组的求解是困难的。然而大洋是密度层化的，并且不论其密度分布的具体形式如何，跃层的存在是其主要特征，因此，可将大洋抽象成一个两层的模型，中间以一个薄层——准不连续面将其分开。两层模型求解比较简单，所获得的大洋风生—热盐环流解析解能够阐释实际大洋环流的主要特征。

设两层大洋的水深 D 为常数，密度跃层深度 h 也为常数。描述该大洋中的定常风生—热盐环流的方程组仍应是(5.6—7)—(5.6—11)式所构成的方程组。现在规定：大洋上层中的物理量以下标1来指示，大洋下层的物理量以下标2指示，界面处物理量以下标

i 指示。下面对大洋上层和下层分别采用全流技术。首先假设:在海面 $z=0$ 处,铅直速度 $w_1=0$,压强 p_1 为常数,$\rho A_z \frac{\partial u_1}{\partial z}=\tau_x$,$\rho A_z \frac{\partial v_1}{\partial z}=\tau_y$,$K_z \frac{\partial \rho_1}{\partial z}=\Gamma_0$;在界面 $z=-h$ 处,铅直速度为 w_i,密度为 ρ_i,$K_z \frac{\partial \rho_i}{\partial z}=\Gamma_i$,$u_i$、$v_i$ 对 z 的导数为零,p_i 对 x 和 y 的导数以及二阶导数为零;在大洋底 $z=-D$ 处,$\frac{\partial p_2}{\partial x}=\frac{\partial p_2}{\partial y}=0$,$w_2$、$\frac{\partial p_2}{\partial z}$以及$\frac{\partial \rho_2}{\partial z}$为零,$\rho A_z \frac{\partial u_2}{\partial z}=\rho A_z \frac{\partial v_2}{\partial z}=0$。然后,在大洋上层对方程组(5.6—7)—(5.6—11)从 $z=-h$ 到 0 积分,在下层对方程组从 $z=-D$ 到 $-h$ 积分,并利用上述边界条件。消去与压强有关之项之后,最后得到上层和下层的全流闭合方程组:上层

$$\frac{\partial S_{x1}}{\partial x}+\frac{\partial S_{y1}}{\partial y}=w_i, \tag{5.6—19}$$

$$\rho\beta S_{y1}+\rho A_l\left(\frac{\partial^3 S_{x1}}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 S_{x1}}{\partial y^3}-\frac{\partial^3 S_{y1}}{\partial y^2\partial x}-\frac{\partial^3 S_{y1}}{\partial x^3}\right)$$
$$-\mathrm{rot}_z\tau+f(\Gamma_0-\Gamma_i+\rho_i w_i)=0, \tag{5.6—20}$$

其中 $\beta=\frac{df}{dy}$,$S_{x1}=\int_{-h}^{0}u_1dz$,$S_{y1}=\int_{-h}^{0}v_1dz$;

下层

$$\frac{\partial S_{x2}}{\partial x}+\frac{\partial S_{y2}}{\partial y}=-w_i, \tag{5.6—21}$$

$$\rho\beta S_{y2}+\rho A_l\left(\frac{\partial^3 S_{x2}}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial^3 S_{x2}}{\partial y^3}-\frac{\partial^3 S_{y2}}{\partial y^2\partial x}-\frac{\partial^3 S_{y2}}{\partial x^3}\right)$$
$$+f(\Gamma_i-\rho_i w_i)=0, \tag{5.6—22}$$

式中 $S_{x2}=\int_{-D}^{-h}u_2dz$,$S_{y2}=\int_{-D}^{-h}v_2dz$。

由方程组(5.6—19)—(5.6—20)和方程组(5.6—21)—(5.

6—22)可以得出一些有意义的结论。在这些结论中除去了方程(5.6—18)所包含的那些以外,还有一个重要结论:大洋下层的水平环流的形成,一部分是借助于 $\rho_i w_i$ 和 w_i 沟通上层的铅直对流所致,另一部分是由于跃层这一准不连续面所形成的强大湍流扩散所致;大洋下层的环流是纯热盐环流。

根据上列上层和下层全流闭合方程组的线性性质,如果滤掉对流式的热盐效应,则可得到仅包含风应力和湍流扩散的方程组,类似前面,引进全流函数,可得上层的风旋度—热盐梯度方程

$$\rho A_l \nabla^4 \psi_1 - \rho\beta \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = -\text{rot}_z \tau + f(\Gamma_0 - \Gamma_i), \quad (5.6—23)$$

和下层的热盐梯度方程

$$\rho A_l \nabla^4 \psi_2 - \rho\beta \frac{\partial \psi_2}{\partial x} = f\Gamma_i。 \quad (5.6—24)$$

现考虑以赤道为中心的±60°纬度以内的长度为 r 的矩形大洋。相应的边界条件为

$x=0$ 和 r 处

$$\psi_n = \frac{\partial \psi_n}{\partial x} = 0, n = 1,2$$

$\varphi=\pm 60°$处

$$\psi_n = \frac{\partial \psi_n}{\partial y} = 0, n = 1,2$$

又设风应力只有沿东西向分量,且仅依 y 而变化,即 $\tau = i\tau_x(y)$. 于是有

$$-\text{rot}_z \tau = \frac{d\tau_x(y)}{dy}。$$

又于跃层处密度梯度足够大,以致满足 $\Gamma_i \gg \Gamma_0$,再由于盐度的保守性,故认为密度分布主要取决于温度分布,自然可以合理地假设 Γ_i 仅随纬度而变化;并且对于密度稳定结构,因此有

$$\Gamma_i = \Gamma_i(y) < 0。$$

利用上述边界条件、风应力表达式和跃层密度梯度，由方程(5.6—23)和(5.6—24)解得

$$\psi_1 = \frac{r}{\rho\beta} X \left\{ \frac{d\tau_x(y)}{dy} - f\Gamma_i(y) \right\}, \tag{5.6—25}$$

$$\psi_2 = \frac{r}{\rho\beta} X f \Gamma_i(y), \tag{5.6—26}$$

其中

$$X = -\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{kr}\right) e^{-\frac{1}{2}kx} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}kx + \frac{\sqrt{3}}{2kr} - \frac{\pi}{6}\right) + 1 - \frac{1}{kr}\left(kx - e^{-k(r-x)} + 1\right), \tag{5.6—27}$$

式中 $k = \sqrt[3]{\beta / A_l}$。将解(5.6—25)和(5.6—26)与 Munk 大洋风生环流解(5.4—59)进行比较，可得如下结论：大洋上层为风生一热盐环流，下层为纯热盐环流，当不考虑热盐梯度[$\Gamma_i(y)=0$]时，此解蜕化为 Munk 的风生环流解(5.4—59)；由于 X 独立于强迫函数(不论是风应力旋度还是热盐梯度，或者它们两者)，并且 X 与 Munk 大洋风生环流解中的 $f(x)$[见(5.4—60)式]在形式上完全相同，因此 Munk 解所具有的特征，比如西向强化、在西部主流之东有一逆流存在，均保留在两层模型的解中，并且上层和下层都有西向强化现象；热盐水平环流增强了西部流，据计算大洋上层西部流总流量，计算值与实测值一致，从而克服了 Munk 风生环流理论的计算值仅为实测值之半的缺点。

第六章　海浪

海浪是人们十分熟悉和注意的海洋现象。当海面有风时，会发生许多高低不等、长短不齐的不规则波动；在无风的天气里，海面上也会出现表面光滑的规则波动。前者是风力直接作用下在当地产生的一种海面不规则的起伏，称之为风浪，后者是在外地产生的风浪由远方传来的，称之为涌浪。这是因为风的作用往往有一定的范围，当风区内产生的各种大小不等、长短不一的波动向前传播而脱离了风区之后，就不再受风力的作用，成为自由波动继续传播；此时，周期短（波长短）的波动衰减得快，而周期长（波长长）的波动则成为涌浪，于是涌浪显得光滑而规则。海洋中的海浪现象还有许多。当海浪由深水传入浅水之后，由于海底的起伏引起海浪的折射现象，当海浪遇到海面或海底的障碍物时会发生反射和绕射现象。有时候，海面上会出现一群较大的波动，继而海面又变得相对的平静，接着又出现一群较大的波动，这就是所谓的波群，它是一系列周期和波长比较接近的波动相互叠加的结果。

研究海浪的经典方法是利用流体动力学方程研究理想的规则波动（正弦余弦波动，Stokes 波，等等），把海水视为不可压缩的理想流体，运动是无旋的。这一类的研究成果，能够说明海洋中实际发生的一些比较规则的波动现象。研究海浪的另一种方法是将实际观测资料与波动理论结合起来，将实际海浪视为许许多多振幅不等，位相各不相同的正弦波动的叠加，利用谱分析方法确定组成波谱的特征。

本章首先讨论理想规则波动的主要特征，然后将实际海浪视为随机过程进行讨论。

§6.1 线性波动理论

6.1.1 无旋运动的基本方程

在研究理想规则波动时，常常认为海水是不可压缩的理想均质流体。对于短周期的小尺度波动来说，Coriolis 力相对来说是次要的，可以忽略不计。再假定重力是唯一的外力，于是描述理想波动的基本方程，根据小尺度运动基本方程(4.5－34)可得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}+w\frac{\partial u}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \frac{\partial v}{\partial t}+u\frac{\partial v}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial y}+w\frac{\partial v}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ \frac{\partial w}{\partial t}+u\frac{\partial w}{\partial x}+v\frac{\partial w}{\partial y}+w\frac{\partial w}{\partial z}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g,\end{aligned}\right\}\quad(6.1-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\qquad(6.1-2)$$

运动学边界条件

$$z=0(\text{海面}),\ \frac{\partial\zeta}{\partial t}+u\frac{\partial\zeta}{\partial x}+v\frac{\partial\zeta}{\partial y}=w,\qquad(6.1-3)$$

固体边界处，

$$V_n=0,\qquad(6.1-4)$$

动力学边界条件

$$z=0\qquad p_1=p_a(x,y,t)。\qquad(6.1-5)$$

可以证明，运动方程(6.1－1)所描述的运动为无旋运动：设 $t=t_0$ 时刻取流体中的一封闭曲线 C_0，构成 C_0 的流体质点于另一时刻 t 到达新位置并构成新的封闭曲线 C_t。C_t 上的环流可表为

$$\Gamma(t)=\oint_{C_t}V\cdot dl=\oint_{C_t}udx+vdy+wdz。\quad(6.1-6)$$

上式表明，t 时刻在 C_t 上的环流与其上的流体质点速度有关。对(6.1—6)式求实质微商

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt}=\oint_{C_t}\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz+\oint_{C_t}udu+vdv+wdw$$

$$=\oint_{C_t}\frac{du}{dt}dx+\frac{dv}{dt}dy+\frac{dw}{dt}dz。\quad(6.1-7)$$

将(6.1—1)式代入上式得

$$\frac{d\Gamma(t)}{dt}=\oint_{C_t}(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x})dx+(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y})dy+(-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g)dz$$

$$=\oint_{C_t}d(-\frac{p}{\rho}-gz)=0。\quad(6.1-8)$$

(6.1—8)式表明，不可压缩的理想流体中，由相同质点构成的封闭曲线上的环流不随时间而变。这就是环流定理。如果在重力场中理想流体于起始时刻为静止或作均匀运动，起始时刻任何封闭曲线上的环流为零，则根据环流定理，于任何时刻任何封闭曲线上的环流均为零。根据斯托克斯定理，有

$$\Gamma(t)=\oint_{C_t}V\cdot dl=\iint_{s}(\nabla\times V)\cdot d\sigma=0,\quad(6.1-9)$$

其中 s 为以封闭曲线 C_t 为边界的曲面。(6.1—9)式表明任意时刻任意点处的旋度为零。这就证明了基本方程描述的运动是无旋的。

作为无旋运动，流体速度可用速度势 φ 来表示，即

$$\left.\begin{aligned}&V=\nabla\varphi,\\&\text{或 }u=\frac{\partial\varphi}{\partial x},v=\frac{\partial\varphi}{\partial y},w=\frac{\partial\varphi}{\partial z}。\end{aligned}\right\}\quad(6.1-10)$$

将上式代入连续方程(6.1—2)和运动方程(6.1—1)，它们将具有非常简单的形式。其中连续方程变为

$$\triangle\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,\quad(6.1\text{-}11a)$$

运动方程具有如下积分形式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)+\frac{p}{\rho}+gz=C(t),$$

此式称为无旋积分，其中积分常数 $C(t)$ 为时间的函数，若令 $\varphi_1=\varphi+\int C(t)dt$，显然仍代表流场的速度势，因为 $\nabla\varphi_1=\nabla\varphi$。将 φ_1 代入上式，可得

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi_1)\cdot(\nabla\varphi_1)+\frac{p}{\rho}+gz=0。$$

如果略去下标，结果变成

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)+\frac{p}{\rho}+gz=0。\qquad(6.1-12a)$$

相应地，运动学边界条件变为

$$海面：\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=\zeta}=\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\Big|_{z=\zeta}=0,$$

$$(6.1-13a)$$

$$固定边界：\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=0,\qquad(6.1-14a)$$

海面动力学边界条件

$$p_\zeta=p_a(x,y,t)。$$

若将上式代入无旋积分，得动力学边界条件的另一种表达形式

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)\right)\Big|_{z=\zeta}+\frac{p_a}{\rho}+g\zeta=0。$$

$$(6.1-15a)$$

如果表面压强 $p_a=p_0=$常数，则可令 $\varphi'=\varphi+\frac{p_0}{\rho}t$，于是(6.1—11a)—(6.1—15a)式变成(如果用 φ 表示 φ')

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0, \qquad (6.1-11)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)+\frac{p-p_0}{\rho}+gz=0, \qquad (6.1-12)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=\zeta}=\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right)\Big|_{z=\zeta}, \qquad (6.1-13)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n}\Big|_{\text{固定边界}}=0, \qquad (6.1-14)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)\right)\Big|_{z=\zeta}+g\zeta=0。 \qquad (6.1-15)$$

(6.1—11)—(6.1—15)是研究无旋运动的基本方程和边界条件。

6.1.2 线性波动

实际海洋中的海浪，有时较规则，有时则很复杂。即使一些较规则的波动，其内部结构也是复杂的。在研究复杂波动之前，首先研究简单波动(简谐波动)是必要的。一方面简单波动可以近似地说明复杂波动的一些特征，更重要的是简单波动是研究更复杂波动的基础。

研究简单波动，除了前面已作出的关于不可压缩理想均质流体、运动是无旋的假定之外，如果再假定波动的振幅相对于波长来说很小，也就是说 ζ 和 φ 均为小量，因此无旋积分和边界条件中的 $(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)$，$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial x}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\zeta}{\partial y}$这些乘积项可以忽略不计，并且其中的 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}\big|_{z=\zeta}\simeq\frac{\partial\varphi}{\partial z}\big|_{z=0}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\big|_{z=\zeta}\simeq\frac{\partial\varphi}{\partial t}\big|_{z=0}$；如果研究的水域广阔等深，设水深

为 d，则二维线性波动基本方程和边界条件可写成

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \qquad (6.1-16)$$

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t} - gz, \qquad (6.1-17)$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=0}, \qquad (6.1-18)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=-d} = 0, \qquad (6.1-19)$$

$$0 = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{z=0} - g\zeta。 \qquad (6.1-20)$$

条件(6.1—18)和(6.1—20)可以合并为

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}\right)\Big|_{z=0} = 0。 \qquad (6.1-21)$$

由于我讨论简单波动，如果是前进波，则可以认为波场中有关的物理量也具有这一特性，因此速度势可以表示成如下形式

$$\varphi = \varphi_0(z)\cos(kx - \omega t)。 \qquad (6.1-22)$$

将上式代入(6.1—16)式、(6.1—21)式和(6.1—19)式后，得到确定 $\varphi_0(z)$ 的相应方程和边界条件

$$\frac{d^2 \varphi_0}{dz^2} - k^2 \varphi_0 = 0, \qquad (6.1-23)$$

$$\left(\frac{d\varphi_0}{dz} - \frac{\omega^2}{g}\varphi_0\right)\Big|_{z=0} = 0, \qquad (6.1-24)$$

$$\frac{d\varphi_0}{dz}\Big|_{z=-d} = 0。\tag{6.1-25}$$

由(6.1—23)式得 φ_0 的一般解

$$\varphi_0 = Ae^{kz} + Be^{-kz},\tag{6.1-26}$$

其中 A 和 B 为积分常数。将(6.1—26)式代入(6.1—24)和(6.1—25)式，得到

$$(\omega^2 - gk)A + (\omega^2 + gk)B = 0,\tag{6.1-27}$$

$$e^{-kd}A - e^{kd}B = 0。\tag{6.1-28}$$

A 和 B 不为零的解必须满足

$$\triangle = \begin{vmatrix} e^{-kd} & e^{kd} \\ \omega^2 - gk & \omega^2 + gk \end{vmatrix} = 0,$$

于是得到频散关系

$$\omega^2 = gk\,\frac{e^{kd} - e^{-kd}}{e^{kd} + e^{-kd}} = gk\,\mathrm{th}kd\tag{6.1-29}$$

和波速

$$c^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{k}\mathrm{th}kd。\tag{6.1-30}$$

根据(6.1—28)式知

$$Ae^{-kd} = Be^{kd} = \frac{1}{2}D,$$

D 为常数，于是 φ 可表为

$$\varphi = \left(\frac{1}{2}De^{kd}e^{kz} + \frac{1}{2}De^{-kd}e^{-kz}\right)\cos(kx - \omega t)$$

$$= D\mathrm{ch}[k(d+z)]\cos(kx - \omega t)。$$

将上式代入(6.1—20)式得

$$\zeta = -\frac{\omega}{g}D\mathrm{ch}kd\sin(kx - \omega t)。$$

若令 $a = -\frac{\omega}{g}D\mathrm{ch}kd$，则有

$$\zeta = a\sin(kx - \omega t), \qquad (6.1-31)$$

$$\varphi = -\frac{ag}{\omega}\frac{\mathrm{ch}[k(d+z)]}{\mathrm{ch}kd}\cos(kx - \omega t)。 \qquad (6.1-32)$$

利用(6.1—17)式求得压强分布

$$p = p_0 + \rho g a\frac{\mathrm{ch}[k(d+z)]}{\mathrm{ch}kd}\sin(kx - \omega t) - \rho g z。$$

$$(6.1-33)$$

由速度势定义 $V = \nabla\varphi$，得

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{agk}{\omega}\frac{\mathrm{ch}[k(d+z)]}{\mathrm{ch}kd}\sin(kx - \omega t), \\ w &= -\frac{agk}{\omega}\frac{\mathrm{sh}[k(z+d)]}{\mathrm{ch}kd}\cos(kx - \omega t)。\end{aligned}\right\} \qquad (6.1-34)$$

由(6.1—34)式来讨论水质点的运动轨迹。由于质点运动的路程极短，设质点的平衡位置为(x_0, z_0)，则可用(x_0, z_0)近似代替(x, z)，于是(6.1—34)可写为

$$\frac{dx}{dt} = u = \frac{agk}{\omega}\frac{\mathrm{ch}[k(d+z_0)]}{\mathrm{ch}kd}\sin(kx_0 - \omega t),$$

$$\frac{dz}{dt} = w = -\frac{agk}{\omega}\frac{\mathrm{sh}[k(d+z_0)]}{\mathrm{ch}kd}\cos(kx_0 - \omega t)。$$

对 t 积分，并利用频散关系式(6.1—29)，得

$$\left.\begin{aligned} x - x_0 &= a\frac{\mathrm{ch}[k(d+z_0)]}{\mathrm{sh}kd}\cos(kx_0 - \omega t), \\ z - z_0 &= a\frac{\mathrm{sh}[k(d+z_0)]}{\mathrm{sh}kd}\sin(kx_0 - \omega t)。\end{aligned}\right\} \qquad (6.1-35)$$

消去时间 t 之后，得质点轨迹

$$\frac{(x - x_0)^2}{\left[a\frac{\mathrm{ch}[k(d+z_0)]}{\mathrm{sh}kd}\right]^2} + \frac{(z - z_0)^2}{\left[a\frac{\mathrm{sh}[k(d+z_0)]}{\mathrm{sh}kd}\right]^2} = 1。$$

$$(6.1-36)$$

上式表明，质点的运动轨迹为椭圆，椭圆的水平轴和铅直轴随着离开自由表面向下而逐渐减小，于水底处，铅直轴变为零，质点只作水平运动。

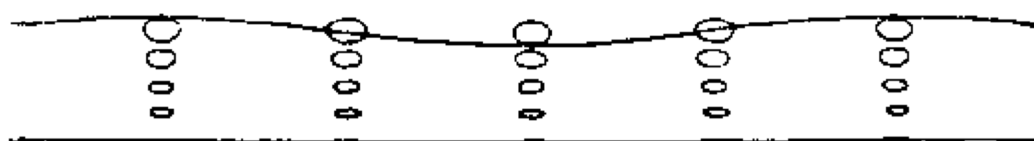


图 6—1　有限深水域中前进波水质点轨迹图

6.1.3　水深对线性波动的影响

以上结果是对有限深度而言的。如果水很深，即当 $kd=\frac{2\pi}{\lambda}d\to\infty$ 时，$\mathrm{th}kd\simeq 1$，$\mathrm{sh}kd\simeq\mathrm{ch}kd\simeq\frac{1}{2}e^{kd}$，于是(6.1—29)—(6.1—36)式简化为

$$\omega^2 = gk, \tag{6.1-37}$$

$$c^2 = g/k, \tag{6.1-38}$$

$$\zeta = a\sin(kx-\omega t), \tag{6.1-39}$$

$$\varphi = -\frac{ag}{\omega}e^{kz}\cos(kx-\omega t), \tag{6.1-40}$$

$$p = p_0-\rho gz + \rho gae^{kz}\sin(kx-\omega t), \tag{6.1-41}$$

$$\left.\begin{aligned} u &= a\omega e^{kz}\sin(kx-\omega t), \\ w &= -a\omega e^{kz}\cos(kx-\omega t), \end{aligned}\right\} \tag{6.1-42}$$

$$(x-x_0)^2+(z-z_0)^2=(ae^{kz_0})^2。\qquad (6.1-43)$$

由这些结果看出，波速与水深无关，只与波动性质有关；质点运动轨迹为一圆，而其半径随深度增加而减小；当到达很大深度时，运动消失，例如当深度到达 $z_0=-\lambda$（波长）处，$e^{kz_0}=e^{-2\pi}=0.0019$，由此可见表面波的性质。

另一方面，当水深很浅时，即 $kd=\frac{2\pi}{\lambda}d\to 0$ 时 $\mathrm{th}kd\simeq kd$，$\mathrm{sh}kd\simeq kd$，$\mathrm{ch}kd\simeq 1+\frac{k^2d^2}{2}\simeq 1$，于是(5.1−29)−(5.1−36)式简化为

$$\omega^2=gdk^2,\qquad (6.1-44)$$

$$c^2=gd\qquad (6.1-45)$$

$$\zeta=a\sin(kx-\omega t),\qquad (6.1-46)$$

$$\varphi=-\frac{ag}{\omega}\left[1+\frac{k^2(d+z)^2}{2}\right]\cos(kx-\omega t),\qquad (6.1-47)$$

$$p=p_0+\rho ga\sin(kx-\omega t)-\rho gz=p_0+\rho g(\zeta-z),\qquad (6.1-48)$$

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{a\omega}{kd}\sin(kx-\omega t),\\ w&=-a\omega\left(1+\frac{z}{d}\right)\cos(kx-\omega t),\end{aligned}\right\}\qquad (6.1-49)$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{\left(\frac{a}{kd}\right)^2}+\frac{(z-z_0)^2}{\left(a\left(1+\frac{z_0}{d}\right)\right)^2}=1。\qquad (6.1-50)$$

这些结果说明：浅水中，波速只与水深 d 有关，而与波动性质无关；

压强分布变为静压分布；质点的铅直速度大小显著地小于水平速度的大小，质点的运动轨迹仍为一椭圆，不过其水平轴（长轴）不随深度变化，而其铅直轴（短轴）相对于水平轴很短但仍随深度而变。

6.1.4 线性波动的能量

当流体发生波动时，流体质点具有速度，因而具有动能；由于海面的上下起伏，流体质点的位置不断发生上下变化，从而流体柱的重心位置发生变化，因而具有势能。另一方面，对进行波来说，流体的运动状态可从一点传播到另一点，因而在传播过程中还会伴随着能量的转移。下面我们将分别讨论简单前进波的动能、势能和能流。

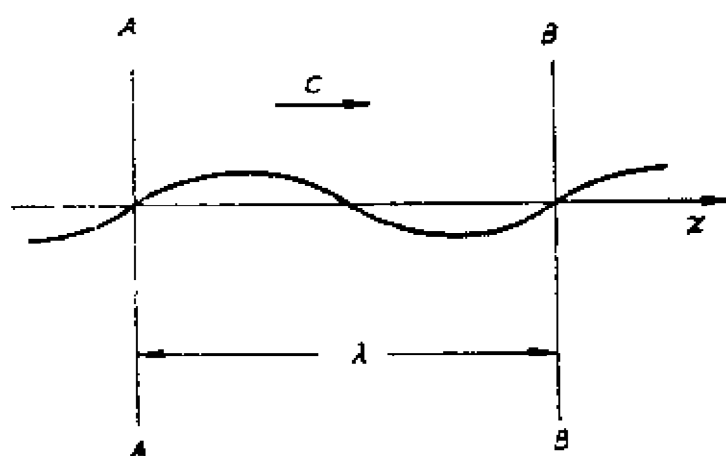


图6—2 波动能量积分区域

在讨论波动的动能和势能时，一般总是取一个波长范围来讨论，因为对简单波动来说，在一个波长范围内其流体总质量总是一定的，它等于无波动时在同一范围内的流体质量。在计算波动势能时，总是予先选定一个势能为零的参照面，可选取静止海面，即讨论的波动势能是相对于无波动的静止状态而言的。考虑二维前进波动，如图6—2所示，设沿波动传播方向（沿正 x 方向）取相距一个波长 λ 的两个铅直平面 AA 和 BB，两平面间的流体上界为自由表面，下界为海底，沿 y 方向的宽度为1，则所考虑区域内的波动动能

$$E_k = \int_0^\lambda \left[\int_{-d}^{\zeta} \frac{1}{2}\rho(u^2 + w^2)dz \right]dx$$

$$= \frac{\rho}{2} \int_0^\lambda \int_{-d}^{\zeta} \left[(\frac{\partial\varphi}{\partial x})^2 + (\frac{\partial\varphi}{\partial z})^2 \right] dzdx。$$

根据格林第一定理

$$\iiint_\tau \varphi\triangle\varphi d\tau + \iiint_\tau \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi = \oiint_s \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}ds,$$

由于流体被认为是不可压缩的,连续方程$\triangle\varphi=0$,因此波动动能可表为

$$E_k = \frac{\rho}{2} \oint_s \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}ds。$$

式中s为积分区域边缘所构成的曲线,n为其外法线方向。由于AA平面和BB平面上的$\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}$的量值相等方向相反,故相互抵消;海底的积分为零,因为$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=\frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=-d}=0$,故波动动能的计算式为

$$E_k = \frac{\rho}{2} \int_0^\lambda (\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial z})|_{z=\zeta}dx。$$

其中已考虑到小振幅假定,$z=\zeta$用$z=0$代替,ds用dx代。将有限深线性波动速度势表达式(6.1—32)代入上式,经计算得

$$E_k = \frac{1}{4}\rho g a^2 \lambda。 \qquad (6.1\text{-}51)$$

在相同区域内的势能

$$E_p = \int_0^\lambda \left[\int_0^\zeta \rho g z dz \right] dx = \frac{1}{4}\rho g a^2 \lambda。 \qquad (6.1\text{-}52)$$

总能量为动能与势能之和

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}\rho g a^2 \lambda, \qquad (6.1\text{-}53)$$

由于$E_k=E_p=\frac{1}{2}E$,故对于简单波动,动能与势能相等,为总能量之半。(6.1—51)—(6.1—53)式是有限深情况下的计算结果,对无

限水深和浅水情形有相同的结果。

其次讨论简单波动的能流。如图 6－2 所示，讨论单位时间内通过断面 AA 的能量。单位时间内 AA 平面输入的波动能量应等于该平面外侧有效压力所做之功。由无旋积分(6.1—17)式知有效压强 $p_e=-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}$，因而单位时间内由 AA 平面输入计算区域的能量为

$$P=\int_{-d}^{\zeta}p_e u dz=\int_{-d}^{\zeta}-\rho\frac{\partial\varphi}{\partial t}\frac{\partial\varphi}{\partial x}dz,$$

将有限水深速度势代入后，求得

$$P=\frac{1}{2}\rho g a^2 c\left(1+\frac{2kd}{\operatorname{sh}2kd}\right)\sin^2(kx-\omega t)。\quad (6.1-54)$$

显然，单位时间输入的能量随时间而变。在一个周期内的平均能流

$$\overline{P}=\frac{1}{T}\int_0^T P dt=\frac{1}{2}\rho g a^2\cdot\frac{c}{2}\left(1+\frac{2kd}{\operatorname{sh}2kd}\right),\quad (6.1-55)$$

这是有限深水域中简单波动的平均能流。对于水深很深的水域来说，$kd\to\infty$，$\frac{2kd}{\operatorname{sh}2kd}\to 0$，于是平均能流为

$$\overline{P}=\frac{1}{2}\rho g a^2\cdot\frac{c}{2},\quad (6.1-56)$$

对于浅水情形，$kd\to 0$，$\frac{2kd}{\operatorname{sh}2kd}\to 1$，于是

$$\overline{P}=\frac{1}{2}\rho g a^2\cdot c。\quad (6.1-57)$$

如果引进单位表面面积水柱内的总能量

$$\overline{E}=E/\lambda=\frac{1}{2}\rho g a^2,\quad (6.1-58)$$

就可以发现：在很浅水域中，平均能流在数值上等于单位表面面积水柱内的总能量乘上波速；对深水水域来说，是乘上波速之半；对有限深水域来说，是乘上因子$\frac{c}{2}\left(1+\frac{2kd}{\operatorname{sh}2kd}\right)$。

§ 6.2 线性波动的合成

前节讨论的简单波动是实际波动的一种近似和抽象，所得之结果可以近似地说明自然界的一些实际波动现象。如果将这些简单波动叠加，就可以说明一些比较复杂的波动，为进一步研究提供必要的基础。

6.2.1 驻波

这也许是由简单波动合成的最简单的例子。当两个沿相反方向传播的前进波动相迁便形成驻波

$$\zeta=\frac{1}{2}a\sin(kx-\omega t)+\frac{1}{2}a\sin(kx+\omega t)$$

$$=a\sin kx\cos\omega t。\qquad(6.2-1)$$

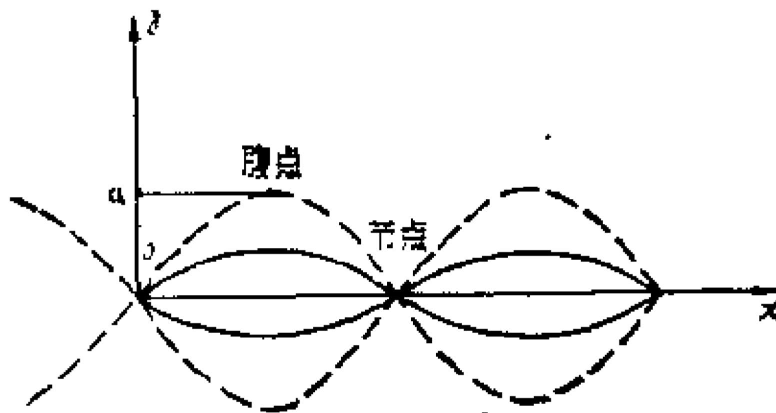


图 6—3 驻波波面示意图

这种合成波动在 $kx=n\pi$ 处($n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots$)，$\zeta$ 总为零，这些没有升降的点称之为节点，而在 $kx=(n+\frac{1}{2})\pi$ 处，波而总是处于最高点或最低点，这些点称之为腹点，如图 6—3 所示。实际波面在图中虚线所示的极限范围内振动。

若水深为有限深，相应于(6.2—1)式的速度势可表为

$$
\begin{aligned}
\varphi = & -\frac{ag}{2\omega}\frac{\mathrm{ch}[k(d+z)]}{\mathrm{ch}kd}\cos(kx-\omega t)+ \\
& \frac{ag}{2\omega}\frac{\mathrm{ch}[k(d+z)]}{\mathrm{ch}kd}\cos(kx+\omega t) \\
= & -\frac{ag}{\omega}\frac{\mathrm{ch}[k(d+z)]}{\mathrm{ch}kd}\sin kx\sin\omega t,
\end{aligned}
\qquad (6.2-2)
$$

由此求得速度

$$
\left.\begin{aligned}
u &= -\frac{agk}{\omega}\frac{\mathrm{ch}[k(d+z)]}{\mathrm{ch}kd}\cos kx\sin\omega t, \\
w &= -\frac{agk}{\omega}\frac{\mathrm{sh}[k(d+z)]}{\mathrm{ch}kd}\sin kx\sin\omega t。
\end{aligned}\right\}
\qquad (6.2-3)
$$

类似于前进波的情形，利用近似式

$$
\begin{aligned}
\frac{dx}{dt} &= -\frac{agk}{\omega}\frac{\mathrm{ch}[k(d+z_0)]}{\mathrm{ch}kd}\cos kx_0\sin\omega t, \\
\frac{dz}{dt} &= -\frac{agk}{\omega}\frac{\mathrm{sh}[k(d+z_0)]}{\mathrm{ch}kd}\sin kx_0\sin\omega t,
\end{aligned}
$$

求得

$$
\left.\begin{aligned}
x-x_0 &= a\frac{\mathrm{ch}[k(d+z_0)]}{\mathrm{ch}kd}\cos kx_0\cos\omega t, \\
z-z_0 &= a\frac{\mathrm{sh}[k(d+z_0)]}{\mathrm{ch}kd}\sin kx_0\cos\omega t,
\end{aligned}\right\}
\qquad (6.2-4)
$$

消去时间 t，得

$$
z-z_0 = (\mathrm{th}k(d+z_0)\tan kx_0)(x-x_0)。\qquad (6.2-5)
$$

上式表明，驻波中的流体质点轨迹是一段直线，每个质点都以自已的平衡位置(x_0, z_0)为中心，沿方向为 $\theta=\arctan[\mathrm{th}k(d+z_0)\tan kx_0]$ 的直线作振动。具有不同平衡位置的质点，其振动方向不同，在节点处，$kx_0=n\pi(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots)$，质点几乎沿水平方向振动；在腹点处，$kx_0=(n+\frac{1}{2})\pi$，质点沿铅直方向振动。随着离开表面向下的距离增加，水质点振动的振幅迅速减小。

实际海洋中的波动在传播过程中迂到障碍物或铅直岸壁而发

生反射，入射波与反射波相加形成驻波，这种现象可近似地看成两个相反方向传播的简单正弦波动的叠加，因为(6.2－1)－(6.2－5)式所描述的理想驻波的特征，与实际观测到的或实验室中的实验结果有许多相近之处。

6.2.2 波群

在实际海洋中，人们经常观测到如图6－4所示的现象。这种现象的主要特征是在固定地点，有时出现振幅大的波动，有时出现振幅很小的波动，两者相继交错发生。看起来大波是一群一群出现的，所以这种现象叫做波群。如果不是在固定点观测，而是在海面拍一张快照，那么人们会发现，海面上的大波也是成群出现的。

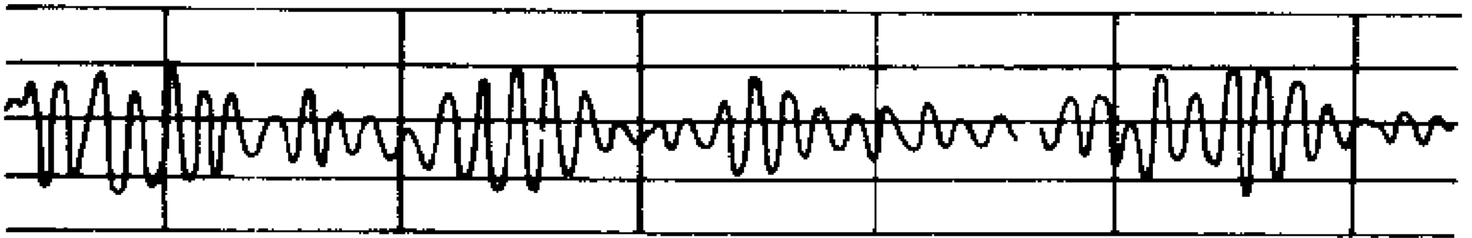


图6—4 观测到的波群

这种波群现象用简单的波动是无法解释的。当许多周期和波长不同但很相近的简单波动沿着同一方向传播时，就会形成波群。为了理解波群及其传播的概念，首先从二个简单波动叠加的简单情形开始，然后再讨论许许多多简单波动叠加的较复杂的情形。

设有二个振幅相同，但波长和周期有很小差别的正弦波同时在流体中沿同一方向传播，叠加的结果可表为

$$\zeta = a\sin(kx-\omega t) + a\sin(k'x-\omega' t)$$

$$= 2a\cos\left(\frac{k-k'}{2}x-\frac{\omega-\omega'}{2}t\right)\sin\left(\frac{k+k'}{2}x-\frac{\omega+\omega'}{2}t\right), \quad (6.2\text{-}6)$$

由于k与k'和ω与ω'都很接近，因此有$\frac{k+k'}{2}\simeq k$，$\frac{\omega+\omega'}{2}\simeq\omega$，$\frac{k-k'}{2}$

$=\triangle k, \frac{\omega-\omega'}{2}=\triangle\omega$。于是(6.2—6)式可改写为

$$\zeta = 2a\cos(\triangle kx-\triangle\omega t)\sin(kx-\omega t), \qquad (6.2-7)$$

其中的前一部分

$$\zeta_1 = 2a\cos(\triangle kx-\triangle\omega t)$$

代表一种波形，其振幅为 $2a$，波数为$\triangle k$，频率为$\triangle\omega$。这种波形叫包络线，它的传播速度为

$$c_g = \frac{\triangle\omega}{\triangle k} \simeq \frac{d\omega}{dk}, \qquad (6.2-8)$$

c_g 称之为群速。这种波形的波长为

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\triangle k} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}(k-k')} = \frac{\pi}{\frac{2\pi}{\lambda}-\frac{2\pi}{\lambda'}} = \frac{\lambda\lambda'}{2(\lambda'-\lambda)},$$

(6.2 — 9)

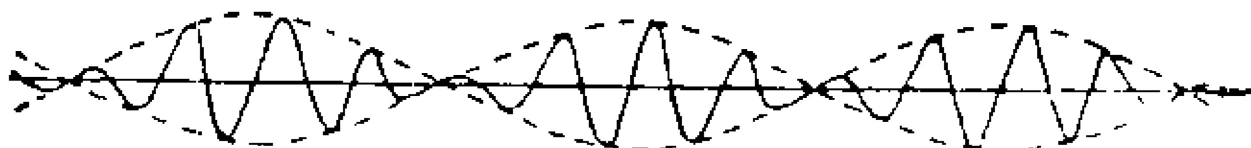


图 6—5　于同一方向传播的两个频率相近的简单前进波的合成波面

其中 λ 和 λ' 为简单波动的波长，可见 $\lambda_1 \gg \lambda$ 和 λ'。(6.2—7)式后一部分仍为原来的简单波动。根据(6.2—7)式，可以绘制出某一固定时刻的波剖面，如图 6—5 所示。这个波面与实际海洋中出现的波群有相似的特征。包络线的两个节点之间包含着许多波数为 k、频率为 ω 的波动，但振幅不断随时间和空间而变，这些波称之为个别波；两个节点之间的个别波构成一个波群。由(6.2—9)式知，两个简单波动的波长越接近，$\lambda'-\lambda$ 越小，λ_1 也就越长，一个波群中所包含的个别波便越多。

考虑不止两个简单波动，而是一组简单的正弦波动沿同一方向传播，它们的波长和周期都很接近。假定这组简单波动的波数范围为 $k_0-\triangle k\leqslant k\leqslant k_0+\triangle k$，频率范围为 $\omega_0-\triangle\omega\leqslant\omega\leqslant\omega_0+\triangle\omega$，于是合成波的波剖面可表为

$$\zeta=\int_{k_0-\triangle k}^{k_0+\triangle k}a(k)e^{i[kx-\omega(k)t]}dk。\qquad(6.2-10)$$

由频散关系 $\omega=\omega(k)$在 k_0 附近展成泰乐级数

$$\omega=\omega(k)=\omega[k_0+(k-k_0)]$$

$$=\omega_0(k_0)+(k-k_0)\frac{d\omega}{dk}\Big|_{k=k_0}+\cdots\cdots,\qquad(6.2-11)$$

于是(6.2—10)式可改写成

$$\zeta\simeq a(k_0)\int_{k_0-\triangle k}^{k_0+\triangle k}e^{i[k_0+(k-k_0)]x-i[\omega_0+(k-k_0)\frac{d\omega}{dk}]t}dk$$

$$=a(k_0)e^{i(k_0x-\omega_0t)}\int_{k_0-\triangle k}^{k_0+\triangle k}\exp[i(k-k_0)x-i(k-k_0)\frac{d\omega}{dk}t]dk。$$

作变换 $\xi=\frac{k-k_0}{k}$，于是有

$$\zeta=a(k_0)e^{i(k_0x-\omega_0t)}\int_{\triangle k/k_0}^{\triangle k/k_0}\exp[ik_0(\xi x-\xi\frac{d\omega}{dk}t)]k_0d\xi$$

$$=2a(k_0)\frac{\sin\triangle k(x-\frac{d\omega}{dk}t)}{x-\frac{d\omega}{dk}t}e^{i(k_0x-\omega_0t)}$$

$$=\widetilde{A}e^{i(k_0x-\omega_0t)}。\qquad(6.2-12)$$

上式表明，当一组振幅相同但波长和周期相近的简单波动沿同一方向传播时，合成波动近似于一种其振幅缓慢变化着的正弦波，这种振幅变化的波叫个别波，$\widetilde{A}=2a(k_0)\frac{\sin\triangle k(x-\frac{d\omega}{dk}t)}{x-\frac{d\omega}{dk}t}$为包络线，它以群速 $c_g=\frac{d\omega}{dk}$向前传播。图 6—6 为根据(6.2—12)式绘制的示意

图。

对有限水深区域中的简单波动，根据频散关系(6.1—29)，可求得群速

$$c_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\frac{\omega}{k}(1 + \frac{2kd}{\mathrm{sh}2kd}) = \frac{c}{2}(1 + \frac{2kd}{\mathrm{sh}2kd}),$$

(6.2 — 13)

对于深水可简化为

$$c_g = \frac{1}{2}c, \qquad (6.2 — 14)$$

对浅水来说有

$$c_g = c。 \qquad (6.2 — 15)$$

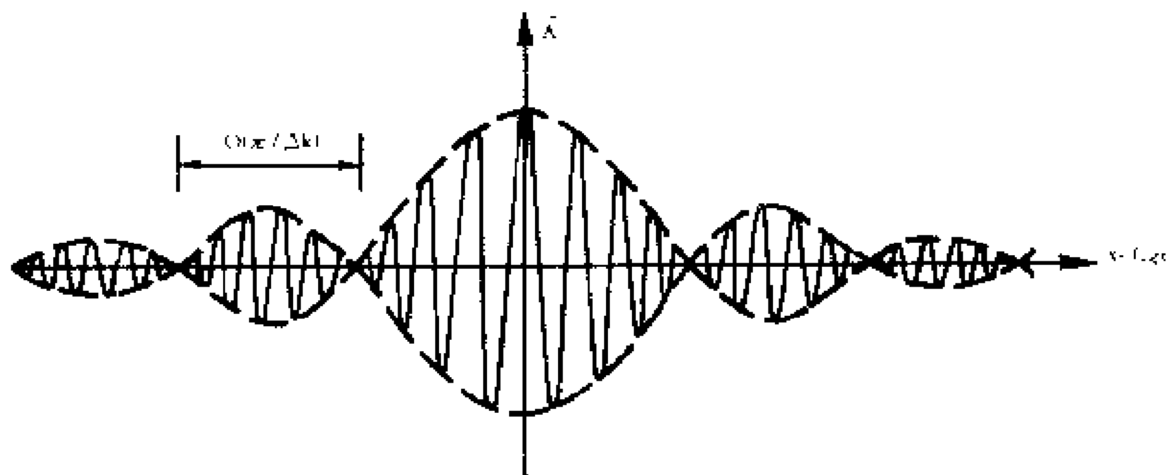


图 6--6　窄频带的波群

由以上三式可看出，在一般情况下，波速大于群速，即 $c \geqslant c_g$，因此个别波从波群的后面向波群的前面传播。

群速表示波群的传播速度。现在回头看一下能流表达式(6.1—55)—(6.1—57)，发现能流正好等于平均总能量与群速的乘积。

因此在一些文献中又认为群速是能量的传播速度。其实这只不过是在形式上相同,在概念上没有必然的 联系。正如Stoker(1957)指出,这种解释是不合适的。因为能通量是动力学的概念,而群速是运动学的概念,它必须和波的叠加相联系,在单个简单波的情况下并无群速可言。另外,传播是指介质运动状态在空间移动,因此能量传播速度应该是指在波动场中波动能量状态在空间的移动速度。对简单波动而言,任何一种物理量状态均在传播方向以波速 c 向前传播,能量状态也不例外。

6.2.3 初始扰动引起的波动

假定水深很深,水域很广阔。设海面压强为常值,则由(6.1—16)—(6.1—21)式知,二维波动的速度势 φ 应满足如下方程和边界条件

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0, \qquad (6.2-16)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\Big|_{z=0}=0, \qquad (6.2-17)$$

$$\varphi|_{z\to-\infty}\ 有界。 \qquad (6.2-18)$$

(在有限深情况下海底边界条件为 $\frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=-d}=0$,现在因为水深无限,故应改为(6.2—18)式),压强分布由无旋积分

$$\frac{p-p_0}{\rho}=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}-gz \qquad (6.2-19)$$

确定,而表面位移由式

$$\zeta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=0} \qquad (6.2-20)$$

确定。设海面的初始扰动为 $f(x)|_{t=0,\ z=0}$,则确定速度势 φ 的初始条件

可由(6.2—20)得出

$$\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{\substack{t=0\\z=0}} = -f(x), \qquad (6.2-21)$$

以及应有

$$\varphi\Big|_{\substack{t=0\\z=0}} = 0。 \qquad (6.2-22)$$

现在根据(6.2—16)—(6.2—22)式研究由初始扰动引起的波动。

首先讨论一种简单的情况，设初始扰动为

$$f(x) = a\sin kx, \qquad (6.2-23)$$

于是由(6.2—21)式和(6.2—22)式得求解 φ 的初始条件为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{\substack{t=0\\z=0}} = -ga\sin kx, \qquad (6.2-24)$$

$$\varphi\Big|_{\substack{t=0\\z=0}} = 0。 \qquad (6.2-25)$$

参照驻波的速度势(6.2—2)式，这种在深水中的初始扰动引起的波动的速度势可表为

$$\varphi = -\frac{ag}{\omega}e^{kz}\sin kx\sin\omega t, \qquad (6.2-26)$$

其中

$$\omega^2 = gk, \qquad (6.2-27)$$

由(6.2—20)式可得表面位移

$$\zeta = a\sin kx\cos\omega t。 \qquad (6.2-28)$$

如果初始扰动为

$$f(x) = a\cos kx, \qquad (6.2-29)$$

类似地可得

$$\varphi = -\frac{ag}{\omega}e^{kz}\cos k\sin\omega t, \qquad (6.2-30)$$

$$\zeta = a\cos kx\cos\omega t。 \qquad (6.2-31)$$

根据前面的简单情形，讨论较复杂的初始扰动。设扰动所对应的初始条件表为

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{\substack{t=0\\z=0}} = -gf(x), \qquad (6.2-32)$$

$$\varphi\Big|_{\substack{t=0\\z=0}} = 0。 \qquad (6.2-33)$$

求解 φ 可以利用积分变换的方法(Sneddon，1951；stoker，1957)，也可用谐波叠加的方法(文圣常等，1984)。下面采用后一种方法。利用傅氏积分，(6.2—32)式可写成

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{\substack{t=0\\z=0}} = -g\int_0^\infty (a_k\cos kx + b_k\sin kx)dk, \qquad (6.2-34)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos k\xi d\xi, \\ b_k &= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin k\xi d\xi。\end{aligned}\right\} \qquad (6.2-35)$$

(6.2—34)式表明，复杂的初始条件可以视为许多不同 k 值的简单初始条件之和。于是在形式上，速度势 φ 可表为许多(6.2—26)和(6.2—30)式之和

$$\varphi = -\int_0^\infty \left(\frac{a_k g}{\omega_k}e^{kz}\sin\omega_k t\cos kx + \frac{b_k g}{\omega_k}e^{kz}\sin\omega_k t\sin kx\right)dk, \qquad (6.2-36)$$

将(6.2—35)式代入上式，得

$$\varphi = -\frac{g}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}e^{kz}dk\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(kx-k\xi)d\xi, \qquad (6.2-37)$$

其中

$$\omega_k^2 = gk。 \qquad (6.2-38)$$

由(6.2—20)式，求得表面位移

$$\zeta=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\omega_k t dk\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos k(x-\xi)d\xi。\quad (6.2-39)$$

因此，对于任意形式的初始位移 $f(x)$，都可以由(6.2—37)式和(6.2—39)式求出速度势 φ 和表面位移 ζ。为了对这种波动性质有一大致了解，下面以一种特殊的初始位移进行讨论，设初始位移 $f(x)$ 只出现在坐标原点附近无限小的范围内，即 $|x|<\varepsilon$，而此范围之外为零，并且有

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f(\xi)d\xi=Q。\quad (6.2-40)$$

将(6.2—40)式代入(6.2—37)式，得

$$\varphi=-\frac{gQ}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}e^{kz}\cos kx dk。\quad (6.2-41)$$

为了计算以上积分，首先将 $\sin\omega_k t$ 展成级数，然后再利用频散关系 $\omega_k^2=gk$，于是(6.2—41)式变成

$$\varphi=\frac{Qgt}{\pi}\int_0^\infty\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(gt^2)^n k^n}{(2n+1)!}e^{kz}\cos kx dk,\quad (6.2-42)$$

利用积分公式

$$\int_0^\infty k^n e^{kz}\cos kx dk=Re\left[\frac{(-1)^{n+1}n!}{(z+ix)^{n+1}}\right],z<0$$

可得速度势

$$\varphi=Re\left[\frac{Qgt}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!(gt^2)^n}{(2n+1)!(z+ix)^{n+1}}\right]\quad (6.2-43)$$

和表面位移

$$\zeta=\lim_{z\to 0}\left(-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$$

$$=\frac{Q}{\pi x}\left[\frac{gt^2}{2x}-\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^3+\frac{1}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\left(\frac{gt^2}{2x}\right)^5-\cdots\cdots\right]。$$

$$(6.2-44)$$

上式总是收敛的，但对于大的 $\frac{gt^2}{2x}$，级数收敛很慢，故而在研究 $\frac{gt^2}{2x}$ 很

大时的表面位移 ζ 时给出它的渐近式。

由(6.2—41)式和频散关系 $\omega_i^2=gk$，可得

$$\varphi(x,o,t) = -\frac{2Q}{\pi}\int_0^\infty \sin\omega t\cos\frac{\omega^2}{g}x d\omega$$
$$= -\frac{Q}{\pi}\left[\int_0^\infty \sin\left(\frac{\omega^2}{g}x+\omega t\right)d\omega\right.$$
$$\left.-\int_0^\infty \sin\left(\frac{\omega^2}{g}x-\omega t\right)d\omega\right]。$$

在上式的第一个积分中令

$$\xi=\sqrt{\frac{x}{g}}\left(\omega-\frac{gt}{2x}\right),$$

在第二个积分中令

$$\xi=\sqrt{\frac{x}{g}}\left(\omega+\frac{gt}{2x}\right),$$

并令

$$\beta=\left(\frac{gt^2}{4x}\right)^{1/2},$$

则得

$$\varphi(x,0,t) = -\frac{Q}{\pi}\left[\sqrt{\frac{g}{x}}\int_\beta^\infty \sin(\xi^2-\beta^2)d\xi-\sqrt{\frac{g}{x}}\int_{-\beta}^\infty \sin(\xi^2-\beta^2)d\xi\right]$$
$$=\frac{2Q}{\pi}\sqrt{\frac{g}{x}}\int_0^\beta \sin(\xi^2-\beta^2)d\xi。\qquad (6.2-45)$$

由此得表面位移

$$\zeta=-\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi(x,0,t)}{\partial t}=\frac{Q}{\pi}\sqrt{\frac{g}{x^3}}t\int_0^\beta \cos(\xi^2-\beta^2)d\xi$$
$$=\frac{Q}{\pi}\sqrt{\frac{g}{x^3}}t\left[\int_0^\infty \cos(\xi^2-\beta^2)d\xi-\int_\beta^\infty \cos(\xi^2-\beta^2)d\xi\right]$$
$$=\frac{Q}{\pi}\sqrt{\frac{g}{x^3}}t\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2}\cos\left(\beta^2-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{4\beta^2}+\frac{15}{16\beta^7}-\cdots\cdots\right]。$$
$$(6.2-46)$$

由于 $\beta=(\frac{gt^2}{4x})^{1/2}$是大的，因此上式的近似式为

$$\zeta=\frac{Q}{\sqrt{\pi}x}(\frac{gt^2}{4x})^{1/2}\cos(\frac{gt^2}{4x}-\frac{\pi}{4})。\qquad(6.2-47)$$

现在依表面位移近似表达式(6.2—47)讨论波动性质。首先，在固定点 $x=x_0$ 处观测水位高度随时间 t 的变化，如图 6—7(a)所示，波动振幅随时间的增加而增大，水面起伏的频率也随时间的增加而增大(周期随时间的增加而减小)。如果于固定时刻 $t=t_0$ 观测不同地点的水面变化，如图 6—7(b)所示，波动振幅随着离开原点的距离 x 的增加而不断减小，相邻的两个与 x 轴相交的交点之间的距离随 x 的增大而增大，这个距离可视为半波长，所以波长随 x 增大而变长。这里应该强调的是，这种波动是许许多多简单正弦波动的叠加之结果。由表面位移近似表达式知，由于$\frac{gt^2}{2x}$取大的值，故振幅变化很慢，相邻的两个波剖面可近似以简谐曲线表示，其振幅比例于时间的一次方、反比于距离的$\frac{3}{2}$次方。我们已经知道，简单波动的位相函数

$$\alpha(x,t)=kx-\omega t,\qquad(6.2-48)$$

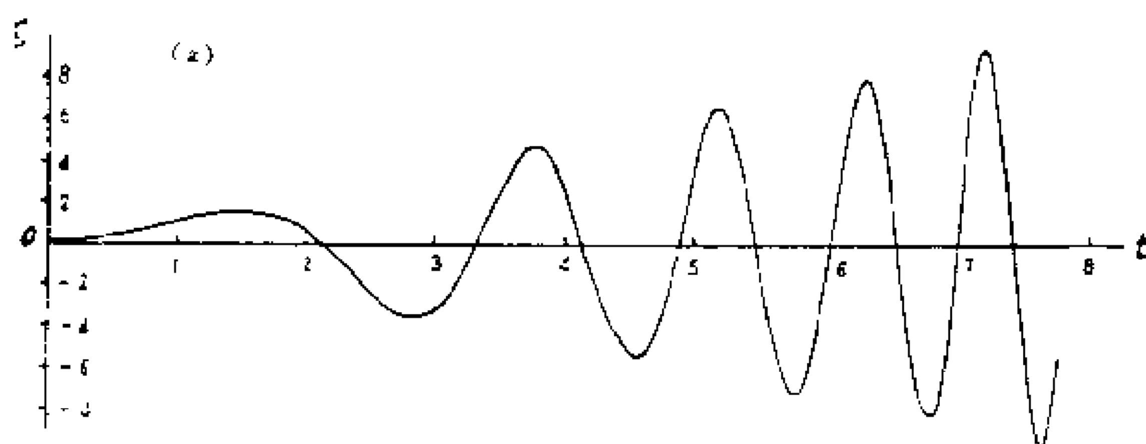
它与波数和频率的关系为

$$\left.\begin{aligned}k&=\frac{\partial\alpha}{\partial x},\\ \omega&=-\frac{\partial\alpha}{\partial t}。\end{aligned}\right\}\qquad(6.2-49)$$

对于合成波动来说，位相函数为

$$\alpha(x,t)=\frac{\pi}{4}-\frac{gt^2}{4x},\qquad(6.2-50)$$

波数和频率为



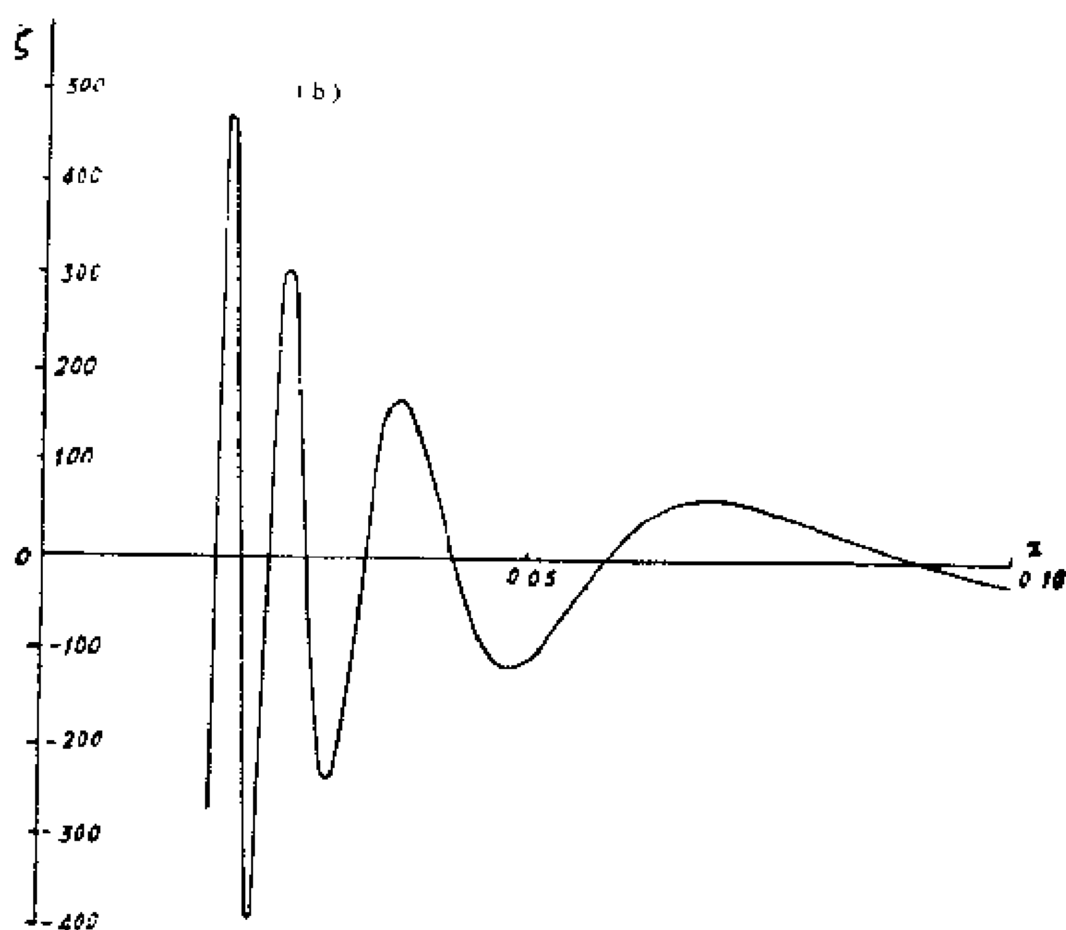


图 6—7 (*a*)固定地点水面高度随时间的变化

(*b*)固定时刻水面高度随地点的变化

(据文圣常等的海浪理论与计算原理，1984)

$$\left.\begin{aligned}\tilde{k} &= \frac{\partial \alpha}{\partial x} = \frac{gt^2}{4x^2},\\ \tilde{\omega} &= -\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{gt}{2x},\end{aligned}\right\} \qquad (6.2-51)$$

上面两式满足方程

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} = 0, \qquad (6.2-52)$$

称之为波数守恒方程。由(6.2—51)又可得

$$\tilde{\omega}^2 = g\tilde{k}。 \qquad (6.2-53)$$

此关系式和简单深水波动的频率关系 $\omega^2=gk$ 在形式上也相同。对于更一般的复杂波动，这些关系式也近似成立。

§6.3　波动的折射和绕射

6.3.1　波动的折射

前面讨论了均匀水深海区中的简单波动及其合成，本节讨论当水深是 x 和 y 的函数时，波动所受的影响。实际海洋中的水深是复杂的，特别是浅水区域，水深的变化会导致波速的变化，因此，同一波峰线上不同地点的波速可能不同，引起波峰线的弯曲，从而引起波向的变化。这种深度变化所引起的波向变化，叫做波动的折射。与此同时，波动的折射能够引起波向线的集中或分散，从而导致波动能量的集中或分散。图 6－8 所示的是等深线弯曲引起波向线辐合和辐散的情形。

由于波动折射问题的复杂性，很难通过求解波动的速度势来研究，这里只是寻找波动要素的空间分布，包括波速，波长，波向和波高的变化。

在线性波动理论中，曾假定波动振幅相对于波长很小。在本节的讨论中，除了小振辐的假定而外，再假定水深 $d=d(x,y)$ 的变化

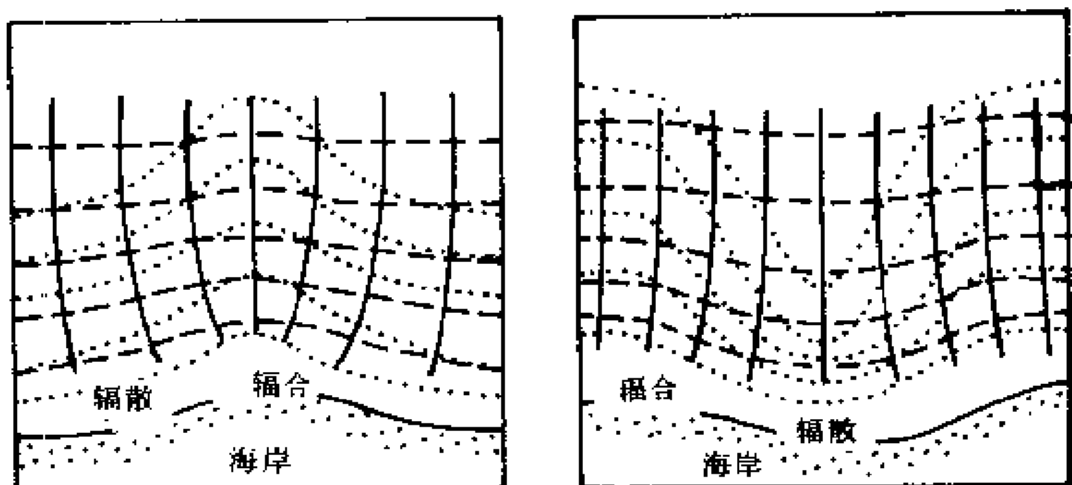


图 6—8 海底等深线弯曲引起的波向线的辐聚和辐散

——波向线 ———波峰线 ……等深线

是缓慢的。这样一来，就可以近似地认为，波动要素之间的关系仍然能够用均匀水深中的关系来表示。根据前一节的讨论，波动要素在传播过程中发生变化，但要满足波数守恒方程

$$\frac{\partial k}{\partial t}+\nabla\omega=0, \qquad (6.3-1)$$

其中波数 $k=k(x,y)$ 与波向一致，并且 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$。对于定常的波动，应满足

$$\frac{\partial k}{\partial t}=0, \qquad (6.3-2)$$

因此有

$$\omega(x,y)=\text{常数}。 \qquad (6.3-3)$$

也就是说，传播过程中，波动频率 ω 保持不变，从而波动周期 T 保持不变。由于水深变化缓慢，波速可用有限深水域中的频散关系 $\omega^2=gk\text{th}kd$ 求得

$$c^2=\frac{g}{k}\text{th}kd=\frac{g\lambda}{2\pi}\text{th}\,\frac{2\pi d}{\lambda}, \qquad (6.3-4)$$

从而有

$$c = \frac{g\lambda}{2\pi c}\text{th}\,\frac{2\pi d}{\lambda} = \frac{gT}{2\pi}\text{th}\,\frac{2\pi d}{\lambda}, \qquad (6.3-5)$$

和

$$\lambda = cT = \frac{gT^2}{2\pi}\text{th}\,\frac{2\pi d}{\lambda}。 \qquad (6.3-6)$$

假定波动由深水传来，在深水处依频散关系式 $\omega^2 = gk$ 求得深水波速和波长

$$c_0 = \frac{gT}{2\pi} \qquad (6.3-7)$$

和

$$\lambda_0 = \frac{gT^2}{2\pi}。 \qquad (6.3-8)$$

又由于

$$\text{th}\,\frac{2\pi d}{\lambda} = \text{th}\,\frac{2\pi d/\lambda_0}{\lambda/\lambda_0} = \text{th}\,\frac{4\pi^2 d/(gT^2)}{\lambda/\lambda_0},$$

于是利用(6.3—5)—(6.3—8)式可得关系式

$$\frac{c}{c_0} = \frac{\lambda}{\lambda_0} = \text{th}\,\frac{4\pi^2 d/(gT^2)}{\lambda/\lambda_0}。 \qquad (6.3-9)$$

根据已知的深水波速 c_0 和波长 λ_0 可依(6.3—9)式求得任意地点的波速 $c(x,y)$ 和波长 $\lambda(x,y)$。

其次讨论如何确定波向的问题。如图 6—9 所示，波动以波速 $c(x,y)$ 传播，设 AB 为波向线 s 的一段，线上任一点的切线与 x 轴的交角为 θ。如果曲线 AB 用下面方程表示：

$$y = y(x), \qquad (6.3-10)$$

则波峰线 n 从点 $A(x_1,y_1)$ 移动到点 $B(x_2,y_2)$ 所需的时间为

$$t = \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{c(x,y)} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{\sqrt{1+y'^2}}{c(x,y)}dx, \qquad (6.3-11)$$

式中 ds 为 AB 上的弧长微分。由于波动从 A 点传到 B 点总是沿着需时最小的路径，于是上式的被积函数

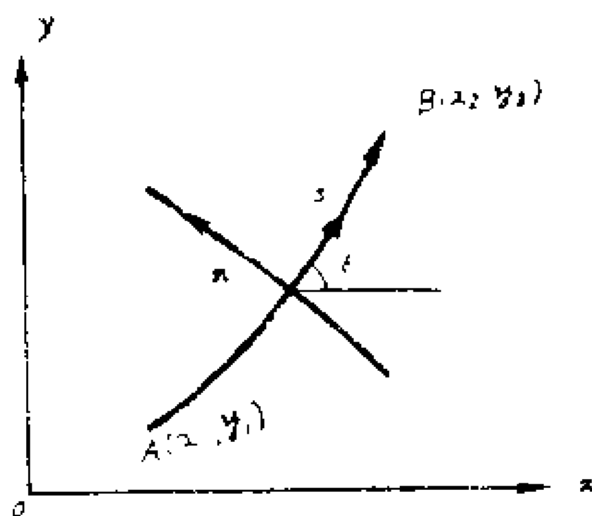


图 6—9　波向线示意图

$$F(x,y,y')=\frac{\sqrt{1+y'^{2}}}{c(x,y)}\qquad(6.3-12)$$

需满足欧拉方程

$$F_{y}-\frac{d}{dx}F_{y'}=0。\qquad(6.3-13)$$

将(6.3—12)式代入(6.3—13)式，得下列微分方程

$$\frac{y''}{1+y'^{2}}=-\frac{1}{c}\left(\frac{\partial c}{\partial y}-y'\frac{\partial c}{\partial x}\right)。\qquad(6.3-14)$$

因为

$$y'=\tan\theta,\qquad(6.3-15)$$

于是由(6.3—14)式可得波向 θ 的微分方程

$$\frac{d\theta}{ds}=-\frac{1}{c}\frac{dc}{dn},\qquad(6.3-16)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{ds}&=\cos\theta\frac{\partial}{\partial x}+\sin\theta\frac{\partial}{\partial y},\\ \frac{d}{dn}&=-\sin\theta\frac{\partial}{\partial x}+\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}。\end{aligned}\right\}\qquad(6.3-17)$$

由方程(6.3—16)便可确定波向的变化。

最后研究如何确定任意点的波高 $H(H=2a, a$ 为波动振幅)。由于波向线受水深变化的影响，产生辐散和辐聚，但是假定两条波向线之间的任意断面上的能通量相等，即满足

$$\frac{1}{8}\rho g H^2 \cdot \frac{c}{2}\left(1+\frac{2kd}{\mathrm{sh}2kd}\right)l = \text{常数}, \qquad (6.3-18)$$

其中 l 为两条波向线之间的距离，$\frac{1}{8}\rho g H^2 \cdot \frac{C}{2}\left(1+\frac{2kd}{\mathrm{sh}2kd}\right)$ 为有限水深波动的平均能流。据此，如果确定了 l 沿波向线的变化，则任意点的波高 H 便可由(6.3—18)式求得。下面依 Munk 和 Arther (1952)的方法导出 l 变化的方程。设在深水处有两条波向线，之间的距离为 l_0。当波浪进入浅水后，这两条波向线之间的距离变为 l。令

$$\beta = \frac{l}{l_0}, \qquad (6.3-19)$$

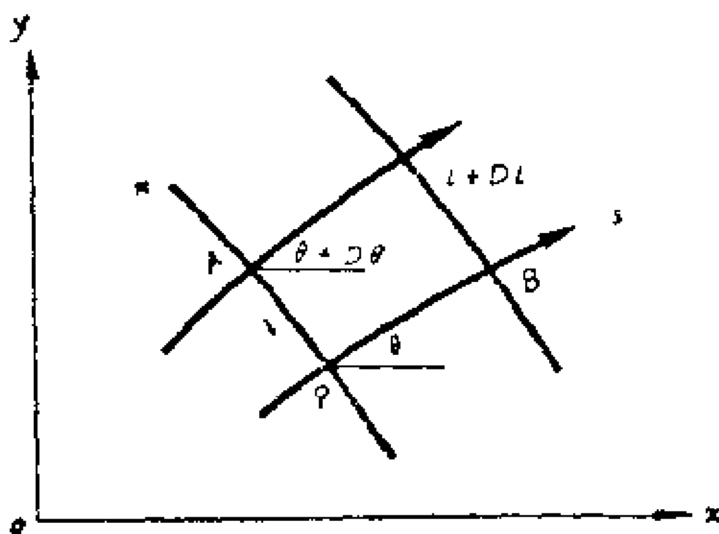


图 6－10　两条波向线散开示意图

称之为波向线的散开因子。如图 6—10 所示，两条波向线的距离通过 A 点的为 l，通过 B 点的为 $l+dl$，波向线与 x 轴的夹角在 A 点为 θ，在 C 点为 $\theta+d\theta$，于是可得

$$\frac{dl}{ds} = \tan(d\theta) = d\theta = \frac{d\theta}{dn} l。$$

上式两边同除以 l_0，结果变成

$$\frac{d\beta}{ds} = \beta \frac{d\theta}{dn}。 \tag{6.3-20}$$

上式对 s 求导，得

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{d\beta}{ds}\frac{d\theta}{dn} + \beta \frac{d}{ds}\left(\frac{d\theta}{dn}\right),$$

再利用(6.3—20)式，可得

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = \beta\left(\frac{d\theta}{dn}\right)^2 + \beta \frac{d}{ds}\left(\frac{d\theta}{dn}\right)。 \tag{6.3-21}$$

运用(6.3—17)式可以证明下列关系式成立

$$\frac{d}{dn}\left(\frac{d\theta}{ds}\right) - \frac{d}{ds}\left(\frac{d\theta}{dn}\right) = \nabla\theta \cdot \nabla\theta,$$

利用此关系式并利用(6.3—16)式，结果(6.3—21)式变为

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} = -\frac{1}{c}\beta\frac{d^2c}{dn^2}, \tag{6.3-22}$$

又一次利用(6.3—17)式，得

$$\frac{d^2\beta}{ds^2} + p\frac{d\beta}{ds} + q\beta = 0, \tag{6.3-23}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} p &= -\frac{1}{c}\frac{dc}{ds} = -\frac{1}{c}\left(\cos\theta\frac{\partial c}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial c}{\partial y}\right), \\ q &= \frac{1}{c}\left(\sin^2\theta\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} - \sin 2\theta\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial y} + \cos^2\theta\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\right)。 \end{aligned}\right\} \tag{6.3-24}$$

(6.3—23)式即为描述波向线散开因子 β 变化的微分方程。求得 β 值的分布之后，再利用(6.3—18)式便可以确定沿波向线的波高 $H(x,y)$ 的分布了。

6.3.2 波动的绕射

波动在传播过程中可能迂到各种障碍物，如岛屿，防波堤等。虽然这些障碍物阻碍波的传播，但是波动还是能够传播到障碍物的掩护区域内，不过那里的波动强度比起非掩护区内的来说要小得多。这种绕过障碍物传播到掩护区域内的现象叫波动的绕射。

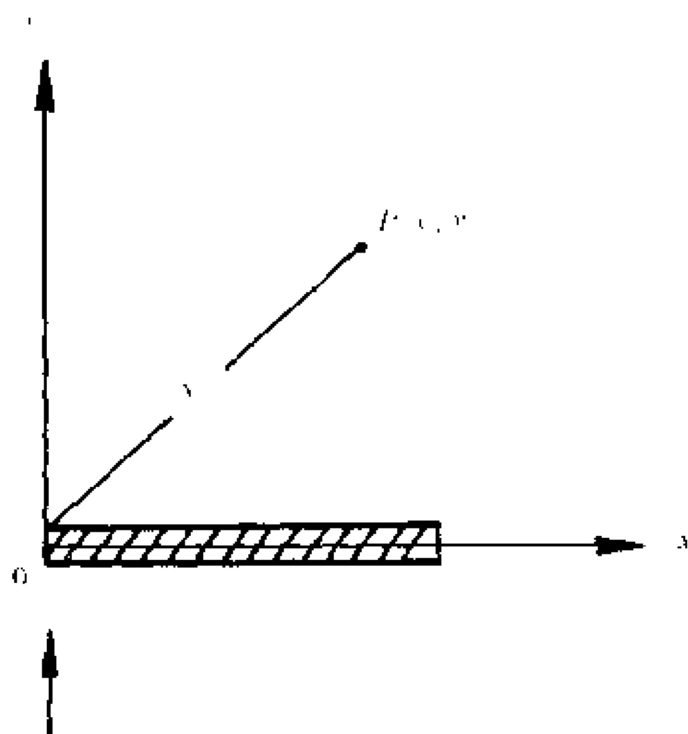


图 6—11　波动绕射水域示意图

现在研究一个半无限长的铅直薄壁对波动的影响。如图 6—11 所示，设水域深度为 d，波动沿正 y 方向传播，半无限长的铅直薄壁左端位于坐标原点并沿正 x 方向延伸至无限远，z 轴取向上为正。如果无障碍物时的波动表面位移和速度势为

$$\zeta_0 = a_0 \sin(\omega t - ky),$$

$$\varphi_0 = \frac{a_0 g}{\omega} \frac{\mathrm{ch}[k(z+d)]}{\mathrm{ch} kd} \cos(\omega t - ky),$$

$$\omega^2 = gk \mathrm{th} kd,$$

为了研究方便,可将以上表达式以复数形式表示为

$$\zeta_0 = a_0 e^{i(\omega t - ky)}, \qquad (6.3-25)$$

$$\varphi_0 = i\frac{a_0 g}{\omega}\frac{\mathrm{ch}[k(z+d)]}{\mathrm{ch}kd}e^{i(\omega t - ky)}, \qquad (6.3-26)$$

$$\omega^2 = gk\mathrm{th}kd,$$

取其虚部。而在存在障碍物时,波动速度势应满足如下方程及边界条件

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0, \qquad (6.3-27)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=-d} = 0, \qquad (6.3-28)$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{1}{g}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right)\Big|_{z=0} = 0, \qquad (6.3-29)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Big|_{\theta=0} = 0, \qquad (6.3-30)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\Big|_{\theta=2\pi} = 0, \qquad (6.3-31)$$

$$\lim_{r\to\infty}\varphi = \varphi_0, \qquad (6.3-32)$$

$$\varphi|_{r=\infty} = i\frac{2a_0 g}{\omega}\frac{\mathrm{ch}[k(z+d)]}{\mathrm{ch}kd}\cos ky e^{i\omega t}, \qquad (6.3-33)$$

$$\lim_{\substack{x \to \infty \\ y>0}} \varphi = 0。\qquad (6.3-34)$$

边界条件(6.3—32)表示当 $x \to -\infty$时，波动不受障碍物影响，(6.3—33)式表示在下半平面右边无限远处由于波的反射面形成驻波。而边界条件(6.3—34)则表明上半平面无限远处由于绕射而到达的波动能量已减弱为零(Stoker，1957)。考虑到波动周期不变，因此 φ 可取如下形式

$$\varphi = -\frac{ia_0 g}{\omega}\frac{\mathrm{ch}[k(d+z)]}{\mathrm{ch}kd}F(x,y)\cdot e^{i\omega t}, \qquad (6.3-35)$$

代入(6.3—27)—(6.3—34)式，可得 $F(x,y)$应满足的方程和边界条件

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + k^2 F = 0, \qquad (6.3-36)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \theta}\Big|_{\theta=0} = \frac{\partial F}{\partial \theta}\Big|_{\theta=2\pi} = 0, \qquad (6.3-37)$$

$$\lim_{x \to -\infty} F = e^{-iky}, \qquad (6.3-38)$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y<0}} F = e^{iky} + e^{-iky}, \qquad (6.3-39)$$

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ y>0}} F = 0 \qquad (6.3-40)$$

满足边界条件的解为

$$F(x,y) = \begin{cases} e^{-iky}f(-\xi) + e^{iky}f(-\eta), & x>0, y>0, \\ e^{-iky} + e^{iky}f(-\eta) - e^{-iky}f(-\xi), & x<0 \\ e^{-iky} + e^{iky} - e^{iky}f(-\eta) - e^{-iky}f(-\xi), & x>0, y<0 \end{cases} \qquad (6.3-41)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \sqrt{\frac{4(r-y)}{\lambda}}, \\ \eta &= \sqrt{\frac{4(r+y)}{\lambda}}, \end{aligned}\right\} \tag{6.3-42}$$

$$f(w) = \frac{1+i}{2}\int_{-\infty}^{w} e^{-i\pi t^2/2}dt, \tag{6.3-43}$$

$$r^2 = x^2 + y^2,\ \lambda = 2\pi/k。 \tag{6.3-44}$$

$f(w)$可以从 Fresnel 积分函数表查得。根据给定地点，利用(6.3—41)—(6.3—44)式便可求得 $F(x,y)$，再由(6.3—35)式求得 $\varphi(x,y,t)$。

现在讨论受绕射影响后，各点波动振幅的情况。依(6.1—20)式，有

$$\begin{aligned} \zeta &= -\frac{1}{g}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=0} \\ &= a_0F(x,y)e^{i\sigma t}, \end{aligned} \tag{6.3-45}$$

显然，其中 $a_0|F(x,y)|$为波动振幅。根据(6.3—25)式知，未受绕射影响时的波动振幅为 a_0，令引进比值

$$k' = \frac{a_0|F(x,y)|}{a_0} = |F(x,y)|, \tag{6.3-46}$$

k'称为绕射因子，依(6.3—41)式的 $F(x,y)$计算求得 k'值。图 6—12 为 k'的分布图，图中坐标采用无因次坐标 x/λ 和 y/λ，虚线表示 k'的等值线，实线为波峰线(Penney 和 Price，1952)。

§6.4 有限振幅波动

前面几节讨论了简单波动及其合成，简单波动受底形和障碍

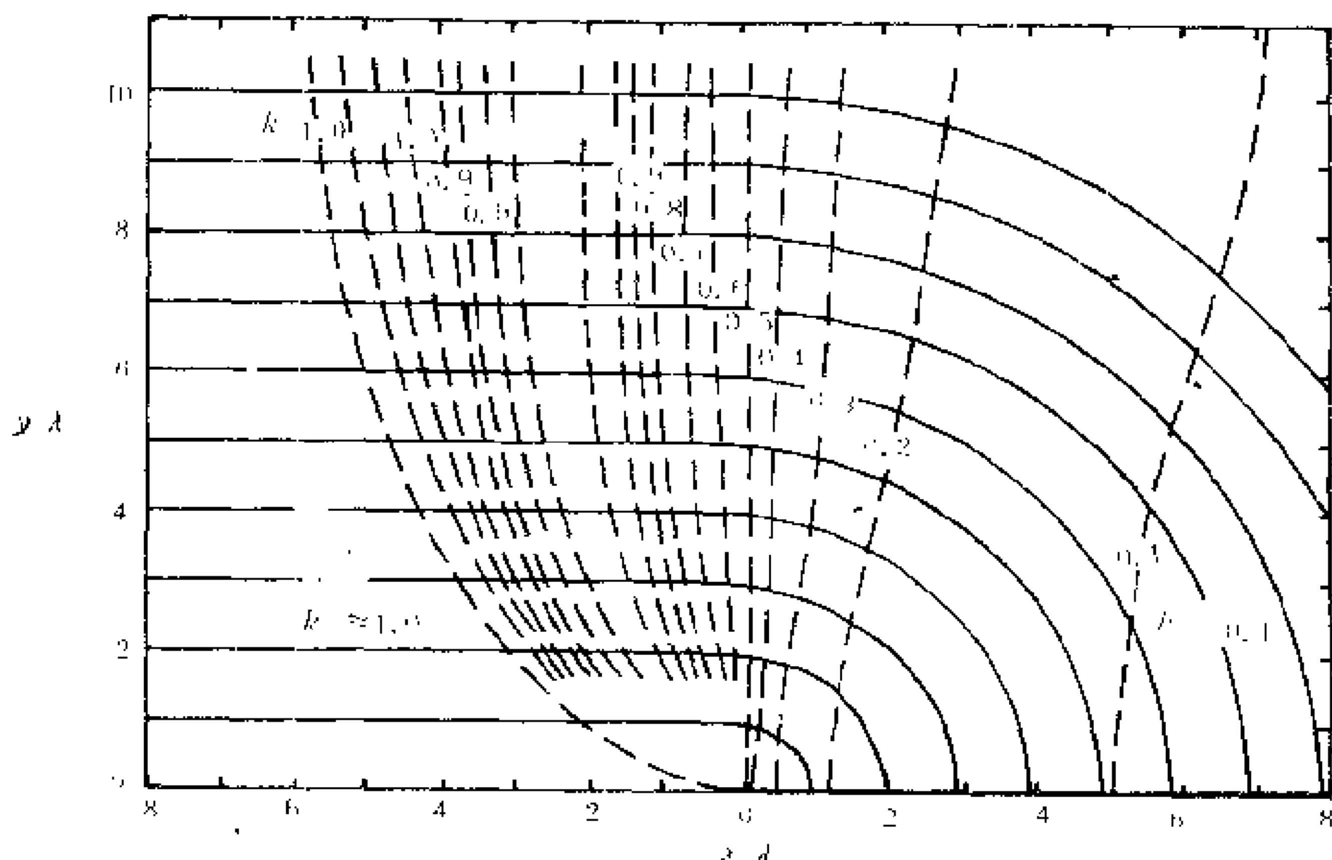


图 6—12　绕射因子 K 分布图(Penney 和 Price,1952)

物的影响,讨论中假定了波动振幅相对于波长为无限小。在此假定之下,波动的速度势所满足的方程和边界条件都是线性的,其结果定性地解释了一些实际波动现象。但是,实际海洋中的波动振幅相对于波长不能视为无限小,因而线性波动理论的结果有很大的局限性。比如,实际海浪的波高增大,波峰变陡变尖,波谷变平,发生波峰破碎现象;水质点运动轨迹不是封闭的圆或椭圆;实际的复杂海浪现象不能完全用线性波动叠加来描述;等等。本节讨论的有限振幅波动取消了振幅为无限小的假定,而认为振幅是有限的,其结果能够解释线性波动所不能说明的一些实际波动现象。

本节讨论四类有限振幅波动,Stokes 波,摆线波,孤立波和椭圆余弦波。

6.4.1 Stokes 波

Stokes 波是 Stokes 于 1847 年从数学上导出的。除去小振幅假定之外，它与线性波动类似，也假定流体不可压缩，无粘性，重力为唯一外力，运动是无旋的，表面压强为常值。因此，研究 Stokes 波可以从 § 6.1 中的非线性基本方程和边界条件(6.1—11)—(6.1—15)出发。但也可以从小振幅波动的结果出发。

回忆一下深水($kd \gg 1$)情况下的小振幅波动，它的表面位移和速度势为

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= a\sin(kx-\omega t), \\ \varphi &= -\frac{ag}{\omega}e^{kz}\cos(kx-\omega t)。\end{aligned}\right\} \qquad (6.4-1)$$

参照(6.4—1)式，Stokes 波的速度势形式上可以取为

$$\varphi = \beta c e^{kz}\sin(kx-\omega t) \qquad (6.4-2)$$

其中 c 为波速，β 为待定常数。研究 Stokes 波可用定常的方法。取一以速度为 c 并沿 x 方向运动的动坐标系，z 轴指向上为正，原点不在静止水面上，而是位于静止水面以下某待定水平面上。对于在这样的均匀直线平移运动的右手直角坐标系中的观测者来说，流场是定常的，空间各点的流速大小和方向均不随时间而变，于是，速度势在此坐标系中可以表为

$$\varphi = \beta c e^{kz}\sin kx - cx。 \qquad (6.4-3)$$

设 ψ 为流函数，根据柯西—黎曼条件$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial z}$，$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$，可得

$$\psi = \beta c e^{kz}\cos kx - cz。 \qquad (6.4-4)$$

在定常情况下，自由表面为一条流线，即流函数为一常数

$$\psi|_{z=\zeta} = 常数，$$

其中常数可取为零，即

$$\psi|_{z=\zeta} = 0。 \qquad (6.4-5)$$

对于定常的无旋运动，由动力学边界条件(6.1—15)得

$$\frac{1}{2}(\nabla\varphi)\cdot(\nabla\varphi)|_{z=\zeta}+g\zeta=0,$$

或者以 ψ 表示为

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)^2\right]\Big|_{z=\zeta}+g\zeta=\text{常数}。\qquad(6.4-6)$$

由(6.4—4)和(6.4—5)式得

$$\zeta=\beta e^{k\zeta}\cos kx,\qquad(6.4-7)$$

将(6.4—4)式代入(6.4—6)式得

$$\frac{2g\zeta}{c^2}+\beta^2k^2e^{2k\zeta}-2\beta ke^{k\zeta}\cos kx=\text{常数},$$

再以(6.4—7)式代入上式，得

$$\left(\frac{2g}{c^2}-2k\right)\zeta+\beta^2k^2e^{2k\zeta}=\text{常数}。\qquad(6.4-8)$$

下面讨论(6.4—7)式。将 $e^{k\zeta}$ 展成级数，于是(6.4—7)式可写成

$$\zeta=\beta\left[1+k\zeta+\frac{1}{2}(k\zeta)^2+\frac{1}{6}(k\zeta)^3+\frac{1}{24}(k\zeta)^4+\cdots\cdots\right]\cos kx,\qquad(6.4-9)$$

进一步将上式方括号内的 ζ 用(6.4—9)式代入，如此不断重复此过程，可得波剖面

$$\zeta(x)=\frac{1}{2}k\beta^2+\beta\left(1+\frac{9}{8}k^2\beta^2\right)\cos kx+$$
$$\frac{1}{2}k\beta^2\cos 2kx+\frac{3}{8}k^2\beta^2\cos 3kx+\cdots\cdots。\qquad(6.4-10)$$

如果令 $\beta\left(1+\frac{9}{8}k^2a^2\right)=a$，则近似地有 $\beta=a\left(1-\frac{9}{8}k^2a^2\right)$；再如果只考虑到 $k^2\beta^3$ 之项，则(6.4—10)式可表为

$$\zeta(x)=\frac{1}{2}ka^2+a\cos kx+\frac{1}{2}ka^2\cos 2kx$$
$$+\frac{3}{8}k^2a^3\cos 3kx,\qquad(6.4-11)$$

上式称为三阶 Stokes 波。现在研究它的性质。由(6.4—11)式作积分，得

$$\int_0^{2\pi/k}\left(\zeta(x)-\frac{1}{2}ka^2\right)dx=0。\qquad(6.4-12)$$

这表明，$z=\frac{1}{2}ka^2$ 处为静止状态的自由表面，即坐标原点应取在静止水面以下$\frac{1}{2}ka^2$ 处。由(6.4—11)式可以确定相对于 $z=0$ 的波峰高度为

$$H_c=\frac{1}{2}ka^2+a+\frac{1}{2}ka^2+\frac{3}{8}k^2a^3,$$

而相对于 $z=0$ 的波谷的高度为

$$H_t=\frac{1}{2}ka^2-a+\frac{1}{2}ka^2-\frac{3}{8}k^2a^3。$$

从 $z=0$ 起算的半波面高度为

$$H_h=\frac{1}{2}(H_c+H_t)=ka^2,\qquad(6.4-13)$$

说明，表面水质点的振动中心位于 $z=ka^2$ 处，即不在静止水面 $z=\frac{1}{2}ka^2$ 处，而是位于静止水面以上$\frac{1}{2}ka^2$ 处。另外，由(6.4—11)式绘制波剖面图，如图 6—13 所示。很显然，波剖面相对于 $z=0$ 的水平面是不对称的，波剖面与摆线的形状很接近。如果波动振幅很小，则(6.4—11)式可以取到第二项 $a\cos kx$ 为止，此时就是小振幅波动。

如果近似取 $e^{2k\zeta}=1+2k\zeta$，于是(6.4—8)式变成

$$(g-kc^2+k^3\beta^2c^2)\zeta=常数,$$

因此有

$$g-kc^2+k^3\beta^2c^2=0,$$

由此得

$$c^2=\frac{g}{k(1-k^2\beta^2)}\simeq\frac{g}{k}(1+k^2\beta^2),\qquad(6.4-14)$$

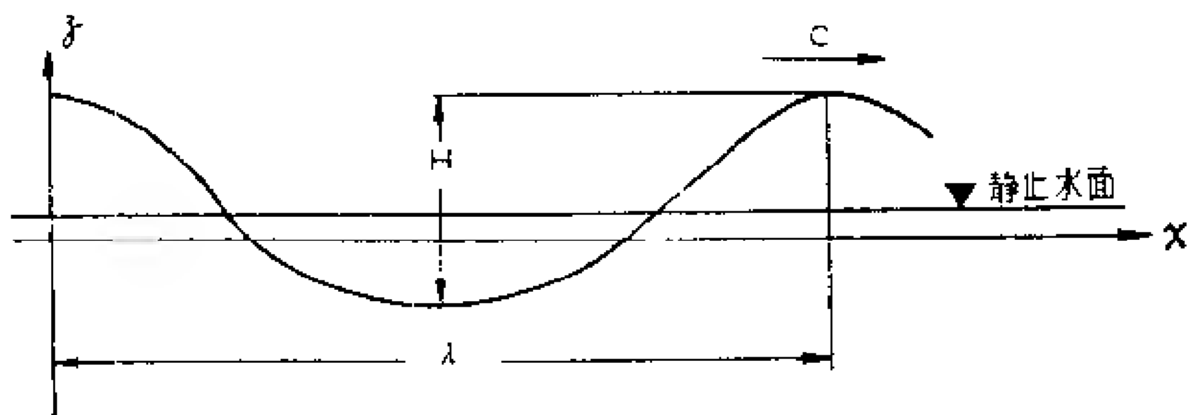


图 6—13 Stokes 波示意图

进而求得频散关系

$$\omega^2 = gk(1 + k^2\beta^2)。\qquad (6.4-15)$$

(6.4—14)式表明，Stokes 波的波速与波动振幅 a 有关$[\beta = a(1 - \frac{9}{8}k^2a^2)]$。

如果将动坐标系中的速度势表达式(6.4—3)还原为前进波形式的表达式(6.4—2)，则相应地可得速度

$$\left.\begin{aligned} u &= acke^{kz}\cos(kx - \omega t), \\ w &= acke^{kz}\sin(kx - \omega t), \end{aligned}\right\} \qquad (6.4-16)$$

其中振幅部分已近似地取 $a = \beta$。设水质点振动中心的坐标为(x_0, z_0)，ξ 和 η 分别为水质点相对于 x_0 和 z_0 的水平和铅直位移，于是(6.4—16)可写成

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\xi}{dt} &= acke^{k(z_0+\eta)}\cos[k(x_0 + \xi - ct)], \\ \frac{d\eta}{dt} &= acke^{k(z_0+\eta)}\sin[k(x_0 + \xi - ct)]。 \end{aligned}\right\} \qquad (6.4-17)$$

由于方程(6.4—17)积分的困难，对其作如下处理：首先将(6.4—17)的第一个方程改写成

$$\frac{d\xi}{dt} = acke^{kz_0}e^{k\eta}[\cos k(x_0 - ct)\cos k\xi - \sin k(x_0 - ct)\sin k\xi]。$$

假定 ξ 和 η 相对于波长很小，可取

$$e^{k\eta} \simeq 1 + k\eta,\ \cos k\xi \simeq 1,\sin k\xi \simeq k\xi,$$

于是有

$$\begin{aligned}\frac{d\xi}{dt} &= acke^{kz_0}(1 + k\eta)[\cos k(x_0 - ct) - k\xi \sin k(x_0 - ct)] \\ &= acke^{kz_0}[\cos k(x_0 - ct) - \sin k(x_0 - ct) \cdot k\xi \\ &\qquad + \cos k(x_0 - ct) \cdot k\eta]。\end{aligned}$$

对上式积分得

$$\begin{aligned}\xi = \int_0^t \frac{d\xi}{dt}dt &= -ae^{kz_0}\sin k(x_0 - ct) + ae^{kz_0}\sin kx_0 \\ &\quad - ack^2e^{kz_0}\int_0^t \xi \sin k(x_0 - ct)dt \\ &\quad + ack^2e^{kz_0}\int_0^t \eta \cos k(x_0 - ct)dt。\end{aligned} \quad (6.4-18)$$

其次由(6.4－17)的第二个方程类似地可得

$$\begin{aligned}\eta = \int_0^t \frac{d\eta}{dt}dt &= ae^{kz_0}\cos k(x_0 - ct) - ae^{kz_0}\cos kx_0 \\ &\quad + ack^2e^{kz_0}\int_0^t \xi \cos k(x_0 - ct)dt \\ &\quad + ack^2e^{kz_0}\int_0^t \eta \sin k(x_0 - ct)dt。\end{aligned} \quad (6.4-19)$$

将(6.4－18)和(6.4－19)式右边的前两项作为 ξ 和 η 的近似值，代入其余各项的积分中，得近似表达式

$$\xi = -ae^{kz_0}\sin k(x_0 - ct) + ae^{kz_0}\sin kx_0 + a^2ck^2e^{2kz_0}t, \quad (6.4-20)$$

$$\eta = ae^{kz_0}\cos k(x_0 - ct) - ae^{kz_0}\cos kx。 \quad (6.4-21)$$

以上两式表明，流体质点的轨迹接近于圆，但不是封闭的（如图 6－14 所示），沿水平方向有一净位移，位移的速度为

$$u^* = k^2a^2ce^{2kz_0},$$ (6.4 — 22)

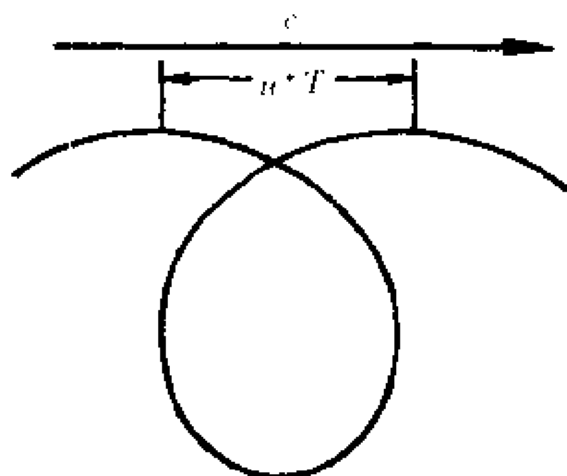


图 6—14 Stokes 波的水质点轨迹

称之为波流。由该速度引起的单位时间内通过与传播方向垂直的单位宽度断面的体积运输为

$$V = k^2a^2c^2\int_{-\infty}^{0} e^{2kz}dz = \frac{\pi a^2}{T}。$$ (6.4 — 23)

总之，Stokes 波的波面关于 x 轴是不对称的，波峰变陡，水质点轨迹不封闭产生波流，引起海水向一定方向运输。这些都能说明实际中的海浪现象。

6.4.2 Stokes 波的极限情形

当实际波浪的波高与波长之比大于某一数值时，波峰附近的波面发生破碎，出现浪花。Stokes 波的波高与波长之比增大时，波面变陡，波峰附近变尖，因此可以用 Stokes 波的极限情形来分析实际海浪波面的破碎问题。对于极限情形下的 Stokes 波面的形状如图 6—15 所示，CA 和 CB 是通过极限波形的波峰点 C 的两条切线，设$\angle ACB = 2\alpha$。取以波速沿波动传播方向运动的极坐标，其原点位于 C 点，极轴为 CO 此时流体中的流函数可表为

$$\psi(r,\theta) = \beta r^m \cos m\theta。\qquad (6.4 — 24)$$

因为运动是无旋的，故流函数应满足

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} = 0。$$

很容易证明(6.4—24)式满足以上二元拉普拉斯方程。因为在波峰

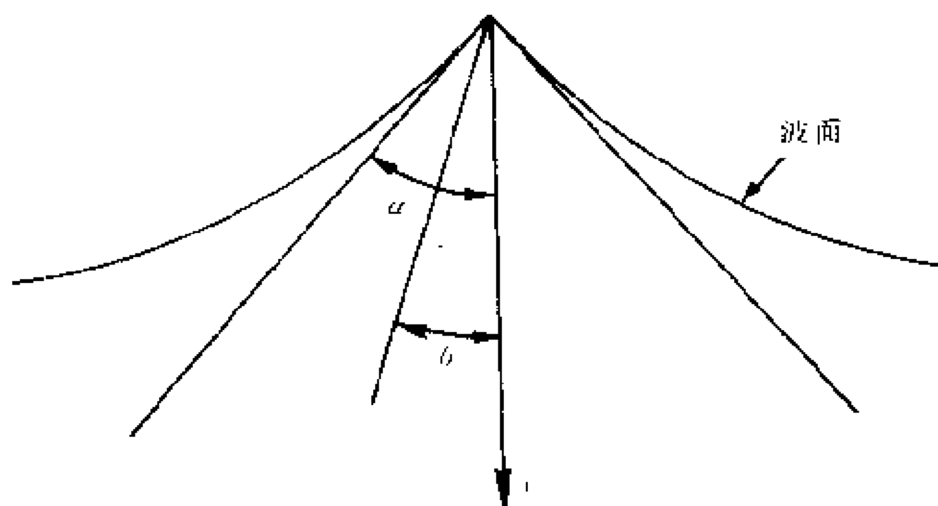


图 6—15　Stokes 波的极限波形

附近的波面可以近似地用两条切线表示，于是表面流线应满足

$$\psi|_{\theta=\pm\alpha}=0,$$

由此得

$$\cos m\alpha=0,\ m\alpha=\frac{\pi}{2}。\qquad (6.4-25)$$

此外，运动在表面应满足的动力学边界条件

$$\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2\right]_{\theta=\pm\alpha}-gr\cos\alpha=0。$$

因为

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)^2=\beta^2m^2r^{2(m-1)},$$

因此有

$$\beta^2m^2r^{2(m-1)}-2gr\cos\alpha=0。\qquad (6.4-26)$$

注意到式中 r 的指数应相等，因此有 $m=\frac{3}{2}$。于是，由(6.4—25)式求得

$$\alpha=\frac{\pi}{3}=60°。\qquad (6.4-27)$$

这表明 Stokes 极限波形的峰面所形成的角度为 120°。如果小于这个角度，波峰便发生破碎，即水质点速度大于波形传播速度。

Michell 于 1893 年求出了相应于波峰角度为 120°的极限波陡为

$$\frac{H}{\lambda}=0.142\simeq\frac{1}{7}$$

将其代入(6.4—14)式得

$$c^2\simeq\frac{g}{k}(1+k^2a^2)=c_0^2(1+\frac{4\pi^2}{\lambda^2}a^2)$$

$$=c_0^2(1+\frac{\pi^2H^2}{\lambda^2})\simeq 1.10c_0^2,$$

其中 c_0 为深水简单波动的波速。

当然，这里仅能定性地说明波破碎现象。

6.4.3 摆线波

这里讨论的摆线波是去掉小振幅假定，但认为水质点的运动轨迹是圆或者是椭圆。下面直接写出质点运动的参数方程，然后证明这些方程满足动力学基本方程。

Gerstner 假定海水质点的运动轨迹可以按拉格朗日方法表示，对深水有

$$\left.\begin{aligned}x&=a-Re^{kb}\sin(ka-\omega t),\\z&=b+Re^{kb}\cos(ka-\omega t),\end{aligned}\right\}\tag{6.4-28}$$

其中 R 为常数，a 和 b 为水质点轨迹的中心，是区别某一质点的参数。将上式代入$\frac{\partial(x,z)}{\partial(a,b)}$，得

$$\frac{\partial(x,z)}{\partial(a,b)}=1-k^2R^2e^{2kb},\tag{6.4-29}$$

它与时间 t 无关，因此(6.4—28)式满足连续方程。(6.4—28)式也应满足运动方程

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial a}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial a}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a}-g\frac{\partial z}{\partial a},\\
\frac{\partial^2 x}{\partial t^2}\frac{\partial x}{\partial b}+\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\frac{\partial z}{\partial b}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b}-g\frac{\partial z}{\partial b}。
\end{aligned}\right\}\qquad(6.4-30)
$$

若将(6.4—28)式代入上面运动方程的左边得如下形式的方程

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial a}&=-g\frac{\partial z}{\partial a}-R\omega^2 e^{kb}\sin(ka-\omega t),\\
\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b}&=-g\frac{\partial z}{\partial b}+R\omega^2 e^{kb}\cos(ka-\omega t)\\
&\quad+R^2\omega^2 k e^{2kb}。
\end{aligned}\right\}\qquad(6.4\text{-}31)
$$

由以上两式代入 $p=\int\frac{\partial p}{\partial a}da+\frac{\partial p}{\partial b}ab$，得

$$
\frac{p}{\rho}=-gz+\frac{R\omega^2}{k}e^{kb}\cos(ka-\omega t)+\frac{R^2\omega^2}{2}e^{2kb}+\text{常数},
$$

将其中的 z 以(6.4—28)式的第二式代入，上式变成

$$
\frac{p}{\rho}=-gb+\left(\frac{\omega^2}{k}-g\right)Re^{kb}\cos(ka-\omega t)+\frac{R^2\omega^2}{2}e^{2kb}+\text{常数}。
$$

$$(6.4-32)$$

对自由表面 $p=p_0, b=0$，有

$$
\frac{p_0}{\rho}=\frac{R^2\omega^2}{2}+\left(\frac{\omega^2}{k}-g\right)R\cos(ka-\omega t)+\text{常数},
$$

$$(6.4-33)$$

上式成立的条件为

$$
\omega^2=gk,\qquad(6.4-34)
$$

因此

$$
\frac{p_0}{\rho}=\frac{R^2\omega^2}{2}+\text{常数}。\qquad(6.4-35)
$$

将(6.4—34)式和(6.4—35)式代入(6.4—32)式后，得到

$$
\frac{p}{\rho}=-gb-\frac{\omega^2 R^2}{2}(1-e^{2kb})+\frac{p_0}{\rho}。\qquad(6.4\text{-}36)
$$

总之，只要频散关系(6.4—34)存在，(6.4—28)式所表示的运动将

满足基本方程和边界条件，而其中的压强分布如(6.4－36)式所示。

对于自由表面，(6.4－28)式变成

$$x = a - R\sin(ka - \omega t),$$

$$z = R\cos(ka - \omega t)。$$

为了讨论波剖面，可取 $t=0$ 时刻的波剖面来讨论，并令 $\theta = ka$，于是有

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{\theta}{k} - R\sin\theta, \\ z &= R\cos\theta。\end{aligned}\right\} \qquad (6.4-37)$$

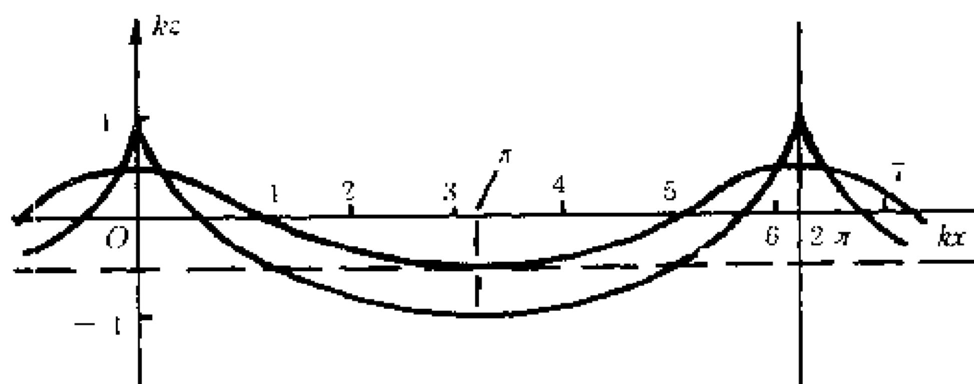


图 6－16　摆线波剖面

(有尖点的曲线为 $Rk=1$ 的情形，较圆滑的曲线为 $Rk=0.5$ 的情形)

上式表示波剖面为摆线，当 $R=\frac{1}{k}$ 时为极摆线，其最高处为一尖峰，如图 6－16 所示。

由水质点运动轨迹(6.4－28)式得水质点速度

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{\partial x}{\partial t} = R\omega e^{kb}\cos(ka - \omega t), \\ w &= \frac{\partial z}{\partial t} = R\omega e^{kb}\sin(ka - \omega t)。\end{aligned}\right\} \qquad (6.4-38)$$

另外，由(6.4—28)式可得关系

$$\cos(ka-\omega t)=\frac{z-b}{Re^{kb}},\quad \sin(ka-\omega t)=\frac{-(x-a)}{Re^{kb}},$$

将此关系代入(6.4—38)式，便有

$$\left.\begin{aligned}u&=\omega(z-b),\\ w&=-\omega(x-a)。\end{aligned}\right\}\qquad(6.4-39)$$

由(6.4—39)式求得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial z}&=\omega\left(1-\frac{\partial b}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial w}{\partial x}&=-\omega\left(1-\frac{\partial a}{\partial x}\right)。\end{aligned}\right\}\qquad(6.4-40)$$

为了计算$\frac{\partial b}{\partial z}$和$\frac{\partial a}{\partial x}$，首先由(6.4—28)式对$x$求导，得到

$$1=\frac{\partial a}{\partial x}[1-Rke^{kb}\cos(ka-\omega t)]-\frac{\partial b}{\partial x}Rke^{kb}\sin(ka-\omega t),$$

$$0=\frac{\partial b}{\partial x}[1+Rke^{kb}\cos(ka-\omega t)]-\frac{\partial a}{\partial x}Rke^{kb}\sin(ka-\omega t),$$

消$\frac{\partial b}{\partial x}$后，可得

$$\frac{\partial a}{\partial x}=\frac{1+Rke^{kb}\cos(ka-\omega t)}{1-R^2k^2e^{2kb}};$$

然后，由(6.4—28)式对z求导，类似地可以得到

$$\frac{\partial b}{\partial z}=\frac{1-Rke^{kb}\cos(ka-\omega t)}{1-R^2k^2e^{2kb}}。$$

于是，由(6.4—40)式可以求得

$$\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}=2k\omega e^{2kb}。\qquad(6.4-41)$$

这表明，摆线波是有旋的，并且旋度随深度而减小。

以上的讨论可以看出，深水摆线波水质点的运动轨迹为一圆，波剖面为一摆线，振幅是有限的，运动是有旋的。由前面深水简单

波动知，对简单波动假定运动是无旋的，振幅为无限小，水质点的运动轨迹为圆，波剖面为一正弦曲线。这里似乎存在着矛盾。实际上深水简单波动的水质点轨迹只是近似为一个圆，是在振幅为无限小假定之下，在积分过程中近似取 $x=x_0$ 和 $z=z_0$ 所致。严格地来讲，简单波动的水质点轨迹并不是圆或椭圆，而是一条不封闭的曲线，但很接近圆或椭圆。因此，简单波动的波剖面是正弦曲线，而摆线波的波剖面为摆线便可以理解了。简单波动是无旋的，摆线波是有旋的，也是必然的，这是因为摆线波的水质点运动轨迹为圆或椭圆的假定导致了运动有旋。尽管如此，摆线波解释了波面关于 x 轴的不对称性，以及剖面变陡、波峰变尖的结论能够解释实际海浪现象。另外，摆线波理论由于推导简单，在海洋工程中有比较广泛的应用。事实上，曾经使用很久的直立防波堤前的波浪作用力的计算方法就是基于这一波动理论。

6.4.4 椭圆余弦波

椭圆余弦波是一种浅水波动。应用这种波动理论于近岸浅水中的海浪现象较前面的 Stokes 波和摆线波更符合实际。椭圆余弦波的特点之一就是它的波剖面可用椭圆余弦函数来描述，也就是这种波动名称的来沉。波高与水深之比为无限小时，椭圆余弦波接近小振幅波动，面当波长趋于无限时，椭圆余弦波的极限情形是一种在下一小节将要讨论的孤立波。

所讨论的波动在浅水中传播，但波形在传播过程中保持不变，即满足 Ursell 参数 $U=\frac{a\lambda^2}{d^3}=\frac{a/d}{d^2/\lambda^2}=1$，其意义在后面讨论。

依据无旋运动基本方程和边界条件(6.1－11)－(6.1－15)式，二维情况下的速度势应满足如下形式的方程和边界条件

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=\zeta}=\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\Big|_{z=\zeta},$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=-d}=0,$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}\Big|_{z=\zeta}=-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\Big|_{z=\zeta}-g\zeta。$$

引进无因次量

$$\left.\begin{aligned}&x'=x/\lambda, z'=z/d, \zeta'=\zeta/a,\\&t'=t/(\lambda/\sqrt{gd}), \varphi'=\varphi/(a\sqrt{gd}\cdot\lambda/d),\end{aligned}\right\}\tag{6.4-42}$$

再引入参量

$$\alpha^2=\frac{d^2}{\lambda^2}=\frac{a}{d},\tag{6.4-43}$$

于是上列方程和边界条件的无因次形式(为书写方便,略去撇号)

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}+\alpha^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}=0\tag{6.4-44}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\Big|_{z=-1}=0,\tag{6.4-45}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\left(\alpha^2\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{1}{\alpha^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)\Big|_{z=\alpha^2\zeta}=0,\tag{6.4-46}$$

$$\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\frac{\alpha^2}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2\right]\Big|_{z=\alpha^2\zeta}+\zeta=0。\tag{6.4-47}$$

为了求解,下面分三步进行。第一步将速度势展成幂级数,第二步建立 φ_0 的微分方程,第三步建立波剖面方程求出 ζ。设速度势的幂

级数可表为

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(z+1)^n, \qquad (6.4-48)$$

其中 φ_n 为 x 和 t 的函数，$\varphi_0=\varphi(x,-1,t)$，$\varphi_1=\frac{\partial\varphi}{\partial z}|_{z=-1}=0$，$\varphi_i=\frac{1}{i!}\frac{\partial^i\varphi}{\partial z^i}|_{z=-1}$，$i=2,3,\cdots\cdots$。很显然，(6.4－48)式满足海底边界条件。将(6.4－48)式代入连续方程(6.4－44)，得

$$\alpha^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2}(z+1)^n+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\varphi_n(z+1)^{n-2}=0。$$

欲使上面方程成立，必须所有的 $(z+1)^n$ 的系数为零，即满足

$$\alpha^2\frac{\partial^2\varphi_{n-2}}{\partial x^2}(z+1)^{n-2}+n(n-1)\varphi_n(z+1)^{n-2}=0,$$

结果有

$$\varphi_n=-\frac{\alpha^2}{n(n-1)}\frac{\partial^2\varphi_{n-2}}{\partial x^2}, \qquad (6.4-49)$$

由上式可得

$$\varphi_2=-\frac{\alpha^2}{2!}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2},$$

$$\varphi_4=-\frac{\alpha^2}{4\times 3}\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial x^2}=\frac{\alpha^4}{4!}\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial x^4},$$

$$\varphi_6=-\frac{\alpha^2}{6\times 5}\frac{\partial^2\varphi_4}{\partial x^2}=-\frac{\alpha^6}{6!}\frac{\partial^6\varphi_0}{\partial x^6},$$

$$\cdots\cdots\cdots,$$

$$\varphi_3=\varphi_5=\varphi_7=\cdots\cdots=0。(因为\ \varphi_1=0)$$

将(6.4－49)式代入(6.4－48)式，φ 可表为以 α^2 为小量的展开式

$$\varphi=\varphi_0-\frac{(z+1)^2}{2!}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}\alpha^2+\frac{(z+1)^4}{4!}\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial x^4}\alpha^4-$$

$$\frac{(z+1)^6}{6!}\frac{\partial^6\varphi_0}{\partial x^6}\alpha^6+\cdots\cdots。\qquad (6.4-50)$$

若上式代入海面运动学和动力学边界条件(6.4—46)和(6.4—47),并略去 α^4 以上的项,则分别有

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}+\alpha^2\left[\frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}+\zeta\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}-\frac{1}{6}\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial x^4}\right]=0,$$

$$(6.4-51)$$

$$\zeta=-\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}+\frac{\alpha^2}{2}\left[\frac{\partial^3\varphi_0}{\partial x^2\partial t}-\left(\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\right)^2\right]。\qquad (6.4-52)$$

再由(6.4—51)式和(6.4—52)式消去 ζ,便建立起 φ_0 的微分方程

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t^2}=\alpha^2\left[\frac{1}{6}\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial x^4}-\frac{1}{2}\frac{\partial^4\varphi_0}{\partial x^2\partial t^2}\right.$$

$$\left.+2\frac{\partial\varphi_0}{\partial x}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x\partial t}+\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}\right]。\qquad (6.4-53)$$

因为所讨论的是在传播过程中波形不变的波动,因此速度势形为 $\varphi=\varphi(x-ct)$,其中 c 为无因次波速。若令 $\xi=x-ct$,则 $\varphi=\varphi(\xi)$。如果暂时略去(6.4—53)式中的 α^2 之项,则有

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t^2}=0。$$

上式表明与 φ_0 相应的波动以无因次波速 $c=1$ 向前传播。因此,与(6.4—53)式中的 φ_0 相应的波动的无因次波速可表为

$$c=1+s_1\alpha^2+s_2\alpha^4+\cdots\cdots,\qquad (6.4-54)$$

其中 s_1 和 s_2 为待定量。考虑到(6.4—54)式,则在(6.4—53)式中可利用

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}&=\frac{d\varphi_0}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial t}=-c\frac{d\varphi_0}{d\xi},\\ \frac{\partial\varphi_0}{\partial x}&=\frac{d\varphi_0}{d\xi}\frac{\partial\xi}{\partial x}=\frac{d\varphi_0}{d\xi}。\end{aligned}\right\}\qquad (6.4-55)$$

若近似取 $\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial t^2}=(1+s_1\alpha^2)^2\frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2}\simeq(1+2s_1\alpha^2)\frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2}$,则将(6.4—55)

式代入(6.4—53)式可得

$$\frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2} \quad (1+2s_1\alpha^2)\frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2} = \alpha^2\Big[\frac{1}{6}\frac{d^4\varphi_0}{d\xi^4}$$

$$-\frac{1}{2}(1+2s_1\alpha^2)\frac{d^4\varphi_0}{d\xi^4} - 3(1+s_1\alpha^2)\frac{d\varphi_0}{d\xi}\frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2}\Big],$$

略去上式方括号内的 α^2 项，结果上式变为

$$-\frac{1}{3}\frac{d^4\varphi_0}{d\xi^4} - 3\frac{d\varphi_0}{d\xi}\frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2} + 2s_1\frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2} = 0。 \qquad (6.4-56)$$

(6.4—56)式对 ξ 进行一次积分，得

$$\frac{1}{3}\frac{d^3\varphi_0}{d\xi^3} + \frac{3}{2}\Big(\frac{d\varphi_0}{d\xi}\Big)^2 - 2s_1\frac{d\varphi_0}{d\xi} - C'_1 = 0, \qquad (6.4-57)$$

其中 C'_1 为积分常量。(6.4—57)式乘以 $\frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2}$，再对 ξ 积分，有

$$\frac{1}{6}\Big(\frac{d^2\varphi_0}{d\xi^2}\Big)^2 + \frac{1}{2}\Big(\frac{d\varphi_0}{d\xi}\Big)^3 - s_1\Big(\frac{d\varphi_0}{d\xi}\Big)^2 - C'_1\Big(\frac{d\varphi_0}{d\xi}\Big) - C'_2 = 0。$$

$$(6.4-58)$$

如果在(6.4—52)式中略 α^2 项，于是近似有

$$\zeta = -\frac{\partial\varphi_0}{\partial t} = c\frac{d\varphi_0}{d\xi} \qquad (6.4-59)$$

再近似取 $c=1$，则上式变为

$$\zeta = \frac{d\varphi_0}{d\xi}。 \qquad (6.4-60)$$

将近似式(6.4—60)代入微分方程(6.4—58)，结果得到 ζ 的微分方程

$$\Big(\frac{d\zeta}{d\xi}\Big)^2 = -3\zeta^3 + 6s_1\zeta^2 + C_1\zeta + C_2。 \qquad (6.4-61)$$

设由平均海面观测到的无因次波峰高度为 H'_c、无因次波谷高度为 $-H'_t$，并且由于在波峰或波谷处均满足 $\frac{d\zeta}{d\xi}=0$，因此，对方程(6.4—61)式的右边可进行因式分解，可表为

$$\Big(\frac{d\zeta}{d\xi}\Big)^2 = -3(\zeta - H'_c)(\zeta + H'_t)(\zeta - H'_1),$$

$$(6.4-62)$$

其中 H'_1 为待定常量。比较(6.4—61)式和(6.4—62)式的系数，可得无因次量 s_1,C_1,C_2 与无因次量 H'_c,H'_t,H'_1 的关系：

$$\left.\begin{aligned} s_1 &= (H'_c - H'_t - H'_1)/2, \\ C_1 &= 3(H'_c H'_t + H'_c H'_1 - H'_t H'_1), \\ C_2 &= 3H'_c H'_t H'_1。 \end{aligned}\right\} \quad (6.4-63)$$

由上面关系可知，只要 H'_1 确定了，s_1，C_1 和 C_2 也就确定了。

将(6.4—63)式的第一式代入无因次波速公式(6.4—54)式，有

$$c = 1 + \frac{a^2}{2}(H'_c - H'_t - H'_1) + \cdots\cdots。 \quad (6.4-64)$$

现在将(6.4—62)式和(6.4—64)式还原成有因次的形式。首先，(6.4—62)式的有因次形式为

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2\left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 = -\frac{3}{a^3}(\zeta - H_c)(\zeta + H_t)(\zeta + H_1),$$

由于 $U = \frac{a\lambda^2}{d^3} = 1$，故上式变成

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2 = -\frac{3}{d^3}(\zeta - H_c)(\zeta + H_t)(\zeta + H_1)。 \quad (6.4-65)$$

而(6.4—64)式的有因次形式为

$$c = \sqrt{gd}\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{H_c - H_t - H_1}{d}\right)$$

$$\simeq \sqrt{gd}\left(1 + \frac{H_c - H_t - H_1}{d}\right)^{1/2}。 \quad (6.4-66)$$

有因次形式的波速已经求出，波剖面形状如何？为此令

$$\zeta = H_c\cos^2\theta - H_t\sin^2\theta, \quad (6.4-67)$$

将其代入(6.4—65)式后，(6.4—65)式变成

$$\beta^2\left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi}\right)^2 = 1 - k^2\sin^2\theta, \quad (6.4-68)$$

其中

$$\beta^2 = \frac{4}{3}\frac{d^3}{H_c + H_1},\ k^2 = \frac{H_c + H_t}{H_c + H_1}。 \qquad (6.4-69)$$

方程(6.4—68)之解为

$$\cos\theta = \mathrm{cn}(\frac{\xi}{\beta}, k),$$

于是波剖面可表为

$$\zeta = -H_t + (H_c + H_t)\mathrm{cn}^2(\frac{x-ct}{\beta}, k)。 \qquad (6.4-70)$$

因为波形用雅可比椭圆函数 cn 表示,所以称之为椭圆余弦波,其波长 λ 由下式确定

$$\lambda = 2\beta\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = 2\beta K_1(k), \qquad (6.4-71)$$

其中 $K_1(k)$为第一类椭圆积分。由此,(6.4—70)式可表为

$$\zeta = -H_t + (H_c + H_t)cn^2[2K_1(k)(\frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T}), k]。$$

$$(6.4-72)$$

波速和波剖面已在形式上确定,但还需确定待定常数 H_1。对波剖面在一个波长范围内积分,其值应为零,由此则可得

$$H_tK_1(k) = (H_c + H_t)E_1(k), \qquad (6.4-73)$$

其中 $E_1(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,d\theta$ 为第二类椭圆积分。由(6.4—73)式可以求得 H_1。图 6—17 示出了不同比值$\frac{d}{\lambda}$情况下的椭圆余弦波的波剖面。

前面曾指出,为了获得浅水中的波形保持不变的椭圆余弦波,必须满足 Ursell 数 $U = \frac{\alpha\lambda^2}{d^3} = 1$,现在讨论这种条件的意义。无因次方程(6.4—51)对 t 求导一次,无因次方程(6.4—52)对 x 求导两次,然后相减,并再次利用忽略 α^2 项的(6.4—51)式和(6.4—52)式,可得

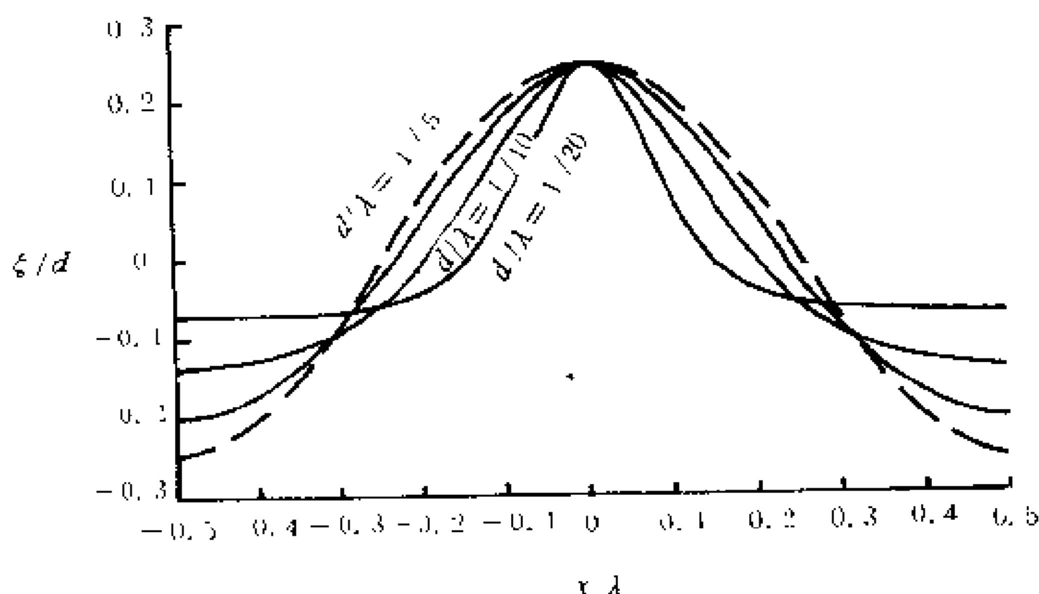


图 6—17 椭圆余弦波的波剖面

实线为$\frac{d}{\lambda}=1/5,1/10,1/20$时的波剖面，虚线为余弦曲线

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=\frac{\alpha^2}{3}\frac{\partial^4\zeta}{\partial x^4}+3\alpha^2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2+\alpha^2\zeta\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$$

$$\simeq\alpha^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{3}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{3}{2}\zeta^2\right], \qquad (6.4-74)$$

稍加变化后，变成

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\left(1+\frac{3}{2}\alpha^2\zeta+\frac{\alpha^2}{3\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right)\zeta\right]=0, \qquad (6.4-75)$$

将其以有因次的形式表示，得

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{gd\left[1+\frac{3\zeta}{2d}+\frac{\alpha\lambda^2}{3d\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]\zeta\right\}=0,$$

利用关系式$\frac{\alpha}{d}=\frac{d^2}{\lambda^2}$，上式可写成

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{gd\left[1+\frac{3}{2d}\zeta+\frac{d^2}{3\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]\zeta\right\}=0 \qquad (6.4-76)$$

如果上式中

$$gd\left[1+\frac{3\zeta}{2d}+\frac{d^2}{3\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\right]=\text{常数}=c^2, \qquad (6.4-77)$$

则(6.4－76)式可表为

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}=0,$$

表明，当关系式(6.4—77)成立时，波动在传播过程中波形保持不变。(6.4—77)式成立的条件是$\frac{3}{2}\frac{\zeta}{d}+\frac{d^2}{3\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$之值在波动传播过程中保持恒量。其中$\frac{\zeta}{d}$是有限波高的影响，其结果是波峰传播速度快于波谷传播速度，发生形变；另一部分$\frac{d^2}{3\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}$是与波面曲率有关的项，在波峰附近$\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}<0$，因而该项的影响在波峰附近可能与$\frac{\zeta}{d}$的影响相抵消。在什么情况下这两种影响相抵消呢？由于

$$\frac{\zeta}{d}\sim\frac{a}{d},\quad \frac{d^2}{\zeta}\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}\sim\frac{d^2}{a}\frac{a}{\lambda^2}=\frac{d^2}{\lambda^2},$$

因此，只要$\frac{a}{d}\sim\frac{d^2}{\lambda^2}$，(6.4-77)式便成立，即波形在传播过程中不变。Ursell 参数 $U=\frac{a/d}{d^2/\lambda^2}=1$ 所代表的意义正是波形在传播过程中保持不变。

6.4.5 孤立波

前节讨论了椭圆余弦波，是一种满足 Ursell 数的量级为 1 的浅水波动，是周期性的波动。然而在 $U=1$ 的情况下也存在一种非周期性的波动，它只有一个单独的波峰或者波谷，称之为孤立波。一百多年前，有人在实验室里发展，一个孤立波峰在水槽中长距离传播而不变形。基于这种发现，人们提出孤立波的概念。孤立波形状如图 6—18 所示。

正如前节所述，孤立波是椭圆余弦波的一种特殊情况，是波长趋于无限的椭圆余弦波。因此下面从椭圆余弦波出发来研究孤立波。由椭圆余弦波的波长公式(6.4—71)式知

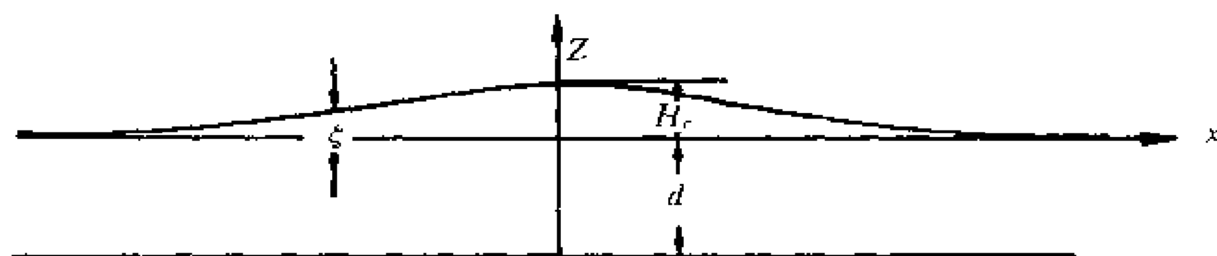


图 6—18 孤立波波剖面

$$\lambda = 2\beta \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} \simeq 2\beta K_1(k),$$

当 $k\to 1$ 时，第一类椭圆积分 $K_1(k)\to\infty$，因此，椭圆余弦波的波长 $\lambda\to\infty$。又当 $k\to 1$ 时，第二类椭圆积分 $E_1(k) = \int_0^{\pi/2}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}d\theta \to 1$，于是由(6.4-73)式可以断定，$H_1=(H_c+H_t)E_1(k)/K_1(k)\to 0$。此外，由(6.4—69)式的第二式知，由于 $k^2=(H_c+H_t)/(H_c+H_1)$，而当 $k\to 1$，$H_1\to 0$ 时，有 $H_t\to 0$，即相对于平均海面，波谷的高度为零。这样一来，波剖面的微分方程(6.4—65)简化为

$$\left(\frac{d\zeta}{d\xi}\right)^2 = -\frac{3}{d^3}(\zeta-H_c)\zeta^2, \qquad (6.4-78)$$

其解为

$$\zeta = H_c\text{sech}^2\left(\sqrt{\frac{3H_c}{4d^3}}\xi\right)$$

$$= H_c\text{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3H_c}{4d^3}}(x-ct)\right], \quad (6.4-79)$$

其中波速

$$c = \sqrt{gd}\left(1+\frac{H_c}{d}\right)^{1/2}, \qquad (6.4-80)$$

这是由(6.4—66)式简化而来，因为 $H_t=H_1=0$。(6.4—79)式的波剖面形状就如同图 6—18 所示的那样，只有一个单独的波峰。

当涌浪向缓慢倾斜的海岸传播时，常常会看到随着涌浪接近

海岸，波峰变尖，而波谷变平，到了水深很浅的地方，波峰就成了隆起的状态，被很长而又很平的波谷隔开，一个个波峰好像成了孤立波。因此研究浅海波浪，可以利用孤立波理论。

§6.5 海浪的统计性质

前几节讨论了几种理论波动，它们以确定的函数形式描述运动的变化规律，并能够解释一些自然界中发生的比较简单的波动现象。另外，将线性波动叠加起来也能够说明一些比较复杂的波动现象。这些波动理论是利用流体动力学基本方程，根据边界条件和初始条件求解得到的，其中假定重力是唯一的外力，运动是无旋的(摆线波除外)。实际海洋中的海浪是很复杂的，产生风浪的风力大小和方向相对于时间和空间不断变化，而且到目前为止，对风浪表面的风速和风作用力的分布情况还没有准确的了解，尚不能以解析的形式表示出来，因此海浪很难以一般的流体力学方法来处理。海洋中发生的海浪，不像理论波动那样具有规律性，而是具有很大的随机性。在某一个地点很难确定某一时刻出现的波高有多大，也很难由某时刻波浪的大小来予测另一时刻该地点的波浪大小。因此海浪可视为一个随机过程。海面上杂乱无章的高低不齐的海浪现象，似乎无规律可循，但作为一种随机现象有服从统计学的规律。应用统计学的概念和方法，不仅可以分析海浪对外表现(波高，波长，周期等)，而且还可以研究海浪的内部结构。

6.5.1 随机海浪过程的平稳性和各态历经性

如果一个随机过程$\{X(t),t\in(-\infty,+\infty)\}$的数学期望为常值，协方差只与时间间隔$\tau$有关，即

$$EX(t)=a,$$

$$E[X(t+\tau)-EX(t+\tau)][X(t)-EX(t)]=R(\tau),$$

则该随机过程为广义平稳随机过程。当 $\tau=0$ 时，则得方差

$$R(0)=DX(t)=\sigma^2,$$

对平稳随机过程来说，方差也为一常数。如果当 $|\tau|\to\infty, R(\tau)\to 0$ 时，该平稳过程是具有各态历经性的，用任意一次现实，比如 $x_1(t)$，便可以确定 a 和 $R(\tau)$，即

$$\left.\begin{aligned} a=EX(t)&\simeq\frac{1}{T}\int_0^T x_1(t)dt,\\ R(\tau)&\simeq\frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}[x_1(t+\tau)-a][x_1(t)-a]dt,\end{aligned}\right\}\qquad(6.5-1)$$

这表明，具有各态历经性的平稳过程的数学期望和协方差可用某一次时间充分长的现实关于时间平均来确定。

对于海面波剖面高度 $\zeta(t)$ 这种随机过程，它是否是平稳的和具有各态历经性的？这个问题很重要，因为海浪的观测是困难的，通常只有少数几个记录。各态历经性保证了一次现实可以代替总体，面平稳性则保证了记录时间的起点并不影响计算结果。这就大大减少了实际观测中的困难和限制。如果海浪可以视为许许多多正弦波动的叠加（这种假定的正确性将在下一节中讨论），则每个组成波的高度平均值近似为零，所有组成波叠加得到的波剖面高度的平均值 $\bar{\zeta}(t)$ 也接近为零，即接近一个常数，因面满足平稳性的要求。波剖面方差 $\overline{\zeta^2(t)}$ 比例于单位面积水面下的波动势能。当风浪处于成长阶段时，波高不断增加，因此波高方差也随时间增大，而当风浪处于消衰阶段时，波高方差将随时间面减小。这就是说，海浪并不是平稳过程。但是在很短的时间间隔内，方差的变化不大，可视为准平稳过程，并近似地认为可以用平稳过程的理论结果。因此，在研究海浪时，既要使一次现实的时间长度 T 充分大，以保证统计的代表性，又要 T 不能太长，以满足过程的平稳性。一

次现实的长度通常取为 10—30 分钟。另外，协方差 $R(\tau)$反映随机过程中相隔 τ 的两个随机变量之间的相关程度。如果时间间隔 τ 很小，相邻的 $\zeta(t+\tau)$和 $\zeta(t)$有较大的联系，比如有较多的机会具有相同的符号，一般地 $R(\tau)$较大；当时间间隔 τ 较大时，$\zeta(t+\tau)$和 $\zeta(t)$的联系较弱，一般地 $R(\tau)$较小。故可以粗略地认为，当 $\tau\to\infty$ 时，$R(\tau)\to 0$。从而可以认为海浪是具有各态历经性的。实际应用的结果表明，海浪具有各态历经性是可以接受的。

6.5.2 波面的分布

实际中最常见的一种随机变量 X，具有如下形式的概率密度

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\qquad(-\infty<x<\infty)$$

其中 a 为随机变量的数学期望，σ^2 为其方差，则该随机变量 X 称之为正态的随机变量。对于一个平稳随机过程 $X(t)$，如果在某一确定时刻 $t=t_1$，随机变量 $X(t_1)$服从上面形式的正态分布，则该随机过程 $X(t)$称之为平稳正态随机过程。如果平稳正态过程具有各态历经性，则其统计性质可用固定地点观测到的一次现实来求得。

如前面所述，海浪可视为具有各态历经性的平稳过程，那么海浪过程是否是正态的？我们在前面也曾经假定，实际海浪可视为无数位相杂乱振幅不等的正弦波动的叠加，即在固定点观测到的波面高度 ζ 可表为

$$\zeta(t)=\sum\zeta_i=\sum a_i\sin(\omega_i t+\varepsilon_i),\qquad(6.5-2)$$

其中 a_i 为第 i 个组成波的振幅，ω_i 和 ε_i 为相应的频率和位相。由于位相是随机的，因此 ε_i 在 $0-2\pi$ 范围内的分布是均匀的，其概率密度为

$$f(\varepsilon)=\frac{1}{2\pi}.$$

由此可求得每个随机的波面 ζ_i 的期望值 $a(i)$和方差 $\sigma^2(i)$

$$a(i) = \int_0^{2\pi} a_i \sin(\omega_i t + \varepsilon) \frac{1}{2\pi} d\varepsilon = 0,$$

$$\sigma^2(i) = \int_0^{2\pi} [a_i \sin(\omega_i t + \varepsilon) - a(i)]^2 \frac{1}{2\pi} d\varepsilon = \frac{1}{2} a_i^2,$$

于是合成波剖面 ζ 的期望和方差为

$$\left.\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^{n} a(i) = 0, \\ \sigma^2 &= \sum_{i=1}^{n} \sigma^2(i) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \end{aligned}\right\} \quad (6.5-3)$$

由于简单波动的振幅 a_i 为无限小，如果这些随机的正弦波动是相互独立的，并且数目极大，即 $n \to \infty$，于是根据李亚普诺夫定理，随机变量 ζ 的概率密度为

$$f(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{\zeta^2}{2\sigma^2}}, \quad (6.5-4)$$

因此波剖面的分布为正态分布。现在又有另一个问题，实际海浪是否可以用许许多多随机的正弦波的叠加来表示？如果是，那么海浪的波面分布就应该是正态分布。这可以通过实际资料来加以检验。通过总体样本的检验是不可能的，而通常是根据各态历经性的假定，采用于固定地点的一次或多次现实（波剖面记录），依一定的时间间隔读取波剖面的高度，然后计算其统计性质。利用这种方法检验波剖面分布的工作已做了很多，例如 Kinsman（1965）利用了 8 次记录，每隔 0.1 秒读取波剖面高度，共读取了 11786 个记录，进行了统计并绘制成图，如图 6—19 所示。图中的横坐标为 ζ/σ，m 为平均值，纵坐标表示概率密度，虚线代表正态分布，小圆圈代表观测值。可以看出，实际海浪波剖面的分布与正态分布有一定差异，但接近正态分布。图中的实线代表 Gram—Charlier 分布，它比正态分布更接近实际观测。图 6—20 是 Jacobson 和 Colonell 于 1972 年在风浪槽中的实验结果，横坐标为累积频率，纵坐标为 ζ/σ，图中

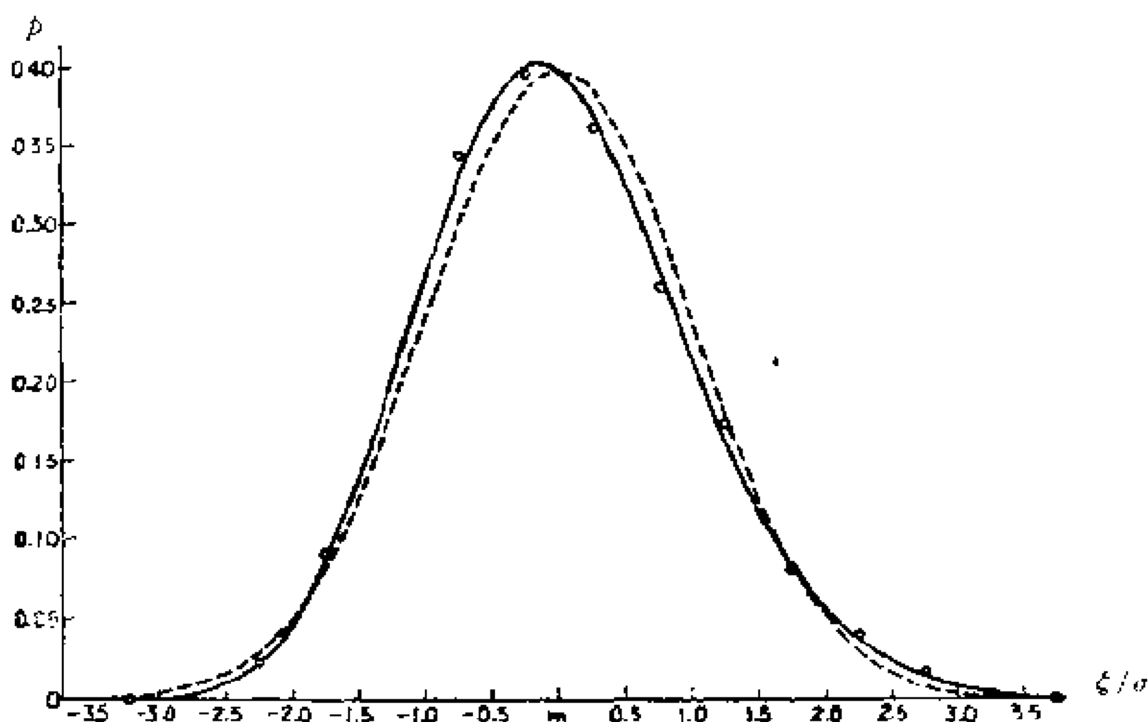


图 6—19 海区测得的波面高度的概率分布

(Kinsman, 1965)

直线代表正态分布，黑圆点为实验值。还有许多其它检验。总的来说，可以认为波剖面服从正态分布。实际波剖面分布与正态分布的差异在一般的实用问题中可予以忽略。由此，可以近似地认为实际海浪是由无数随机的正弦波动叠加而成的。

应该强调说明一点，实际分布与正态分布差异的原因是由于非线性的存在。非线性效应使得波剖面不对称，波峰变陡而波谷变得较平缓，从而导致图 6—19 中的两端的观测值与理论值的差异。

6.5.3 波高的分布

海浪的波剖面可用(6.5—2)式表示，视为无数随机的正弦波动的叠加，这是海浪内部结构的描述。另一方面，也可以从海浪的外观形状直接描述剖面，即固定地点的波剖面总可以表示成

$$\zeta(t) = Re[\xi(t)e^{i\vartheta(t)}] \qquad (6.5-5)$$

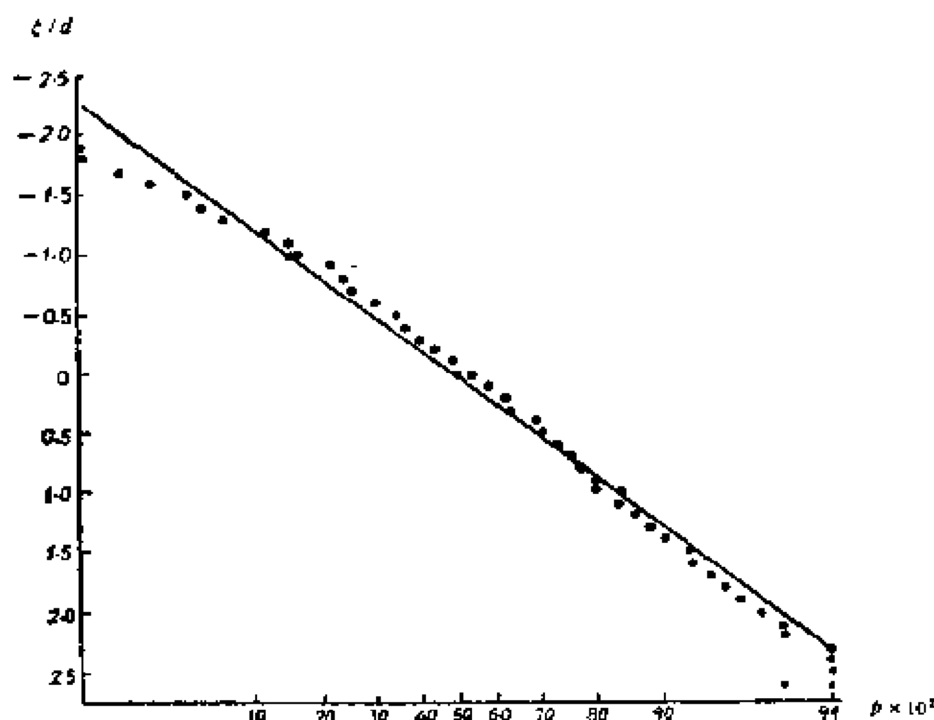


图 6—20 实验测得的波面高度概率分布

(Jacobson 和 Colonell, 1972)

其中 $\xi(t)$和 $\theta(t)$均为实随机函数，分别代表波的包络线和相位函数。Longuet—Higgins(1952，1957，1970)从(6.5—5)式出发讨论了窄谱海浪的波高分布。下面介绍一种对(6.5—5)式进行 Hilbert 变换的方法(徐德伦，1989)。ζ的 Hilbert 变换为

$$\hat{\zeta} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\zeta(t)}{t-\tau}dt, \qquad (6.5-6)$$

根据 Hilbert 变换的性质，$\hat{\zeta}$与ζ具有相同的分布和相同的协方差，并且有如下关系

$$\left.\begin{aligned} \xi^2 &= \zeta^2 + \hat{\zeta}^2 \\ \theta &= \arctan(\hat{\zeta}/\zeta) \end{aligned}\right\} \qquad (6.5-7)$$

由于$\hat{\zeta}$和ζ是相互独立的，因此，它们的联合概率密度可以很容易地写出

$$f(\zeta,\hat{\zeta}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\zeta^2+\hat{\zeta}^2}{2\sigma^2}}。 \qquad (6.5\text{-}8)$$

为了求得波高的分布，可将上式转换成波包和位相函数的联合分布

$$f(\xi,\theta) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}\frac{\partial(\zeta,\hat{\zeta})}{\partial(\xi,\theta)}, \qquad (6.5-9)$$

其中的雅可比式

$$\frac{\partial(\zeta,\hat{\zeta})}{\partial(\xi,\theta)} = \xi,$$

于是(6.5—9)式变成

$$f(\xi,\theta) = \frac{\xi}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}。 \qquad (6.5-10)$$

上式对 θ 从 0 到 2π 积分，得 ξ 的概率密度

$$f(\xi) = \frac{\xi}{\sigma^2}e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}}。 \qquad (6.5-11)$$

显然，对窄谱海浪，ξ 的变化是缓慢的，有明显的波群现象，而且频带越窄，波群越长。包络线的振动频率远小于波面的振动频率，故可近似地用包络线的纵坐标(以适当的时间间隔取样)代表波面的振幅。因此，以波面振幅取代(6.5—11)式中的包络线 ξ，得波面振幅的概率密度

$$f(a) = \frac{a}{\sigma^2}e^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}。 \qquad (6.5-12)$$

在实际计算中，方差 σ^2 可用波剖面记录 ζ 的平方之平均求得，即

$$\sigma^2 = \overline{\zeta^2}。 \qquad (6.5-13)$$

另外，方差也可以换成其它的参量。由(6.5—12)式可得平均振幅

$$\bar{a} = \int_0^\infty af(a)da = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma,$$

由此得方差与平均振幅的关系

$$\sigma = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{a}。 \qquad (6.5-14)$$

在实际应用中 $\bar{a}$ 由观测到的充分多的波高求平均得到。根据观测

到的充分多的波高平方的平均值，可得均方根振幅

$$a_{rms} = \sqrt{\frac{1}{m}(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots\cdots + a_m^2)}。$$

在观测时间内，单位表面面积上波动的平均势能为

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\rho g a_{rms}^2,$$

这部分能量是各随机正弦波的贡献，故可表为

$$\overline{E} = \frac{1}{2}\rho g \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = \rho g \sigma^2,$$

由以上两式得方差与均方根振幅的关系

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}a_{rms}^2。\qquad (6.5-15)$$

今取振幅的二倍为波高，即波高 $H=2a$，平均波高 $\overline{H}=2\overline{a}$，均方根波高 $H_{rms}=2a_{rms}$，于是由(6.5—12)—(6.5—15)式得三种形式的波高概率密度

$$f(H) = \frac{H}{4\sigma^2}e^{-H^2/8\sigma^2}, \qquad (6.5-16)$$

$$f(H) = \frac{\pi H}{2\overline{H}^2}e^{-\pi H^2/4\overline{H}^2}, \qquad (6.5-17)$$

$$f(H) = \frac{2H}{H_{rms}^2}e^{-H^2/H_{rms}^2}, \qquad (6.5-18)$$

这种分布称之为瑞利分布。相应的累积概率为

$$F(H) = \int_H^\infty \frac{H}{4\sigma^2}e^{-H^2/8\sigma^2}dH = e^{-H^2/8\sigma^2} \qquad (6.5-19)$$

$$F(H) = e^{-\pi H^2/4\overline{H}^2}, \qquad (6.5-20)$$

$$F(H) = e^{-H^2/H_{rms}^2}。 \qquad (6.5-21)$$

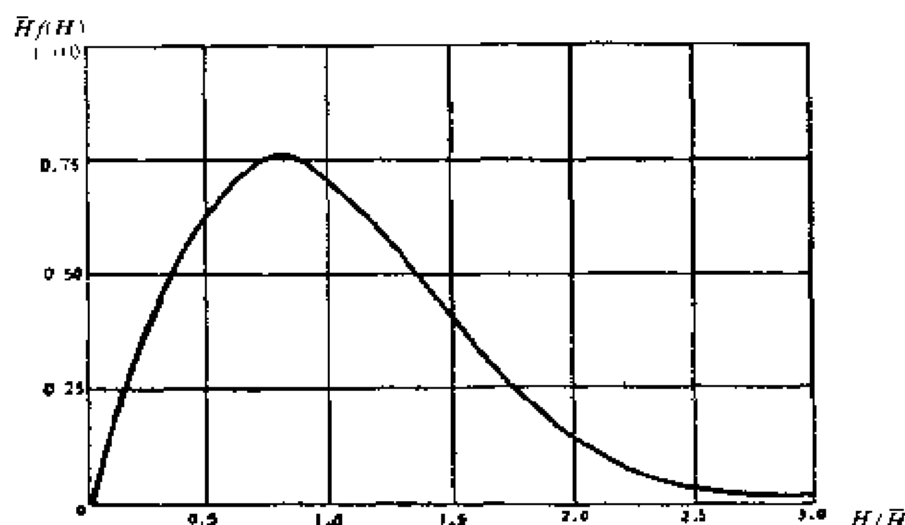


图 6—21 波高概率密度的瑞利分布
(式 6.5—17)

下面以用平均波高 $\overline{H}$ 作为参数的(6.5—17)式和(6.5—20)式进行讨论。该两式瑞利分布如图 6—21 和图 6—22 所示。由(6.5—17)式，利用$\frac{df}{dH}=0$ 可以确定最大可能波高 H_m。

$$H_m = 0.8\overline{H}$$

从理论上导出的波高分布已作过大量的验证。其中 Chakrabarti 和 Cooly(1977)利用北大西洋上一次风暴中的观测结果，共 27 次记录，进行了统计，绘制了无因次波高 H/H_{rms}的概率密度图(图 6—23)，可见理论与观测基本上一致。

波高的瑞利分布已得到广泛应用。但是，浅水波高分布是否遵从瑞利分布一直是一个存在争议的问题。一些实际观测结果表明，对于瑞利分布给出的小概率波高差异明显，这种差异是由于瑞利分布是基于窄谱和波面遵从正态分布的前提下导出的。另外，瑞利分布没有考虑水深的影响，实际观测结果表明，这种影响是存在

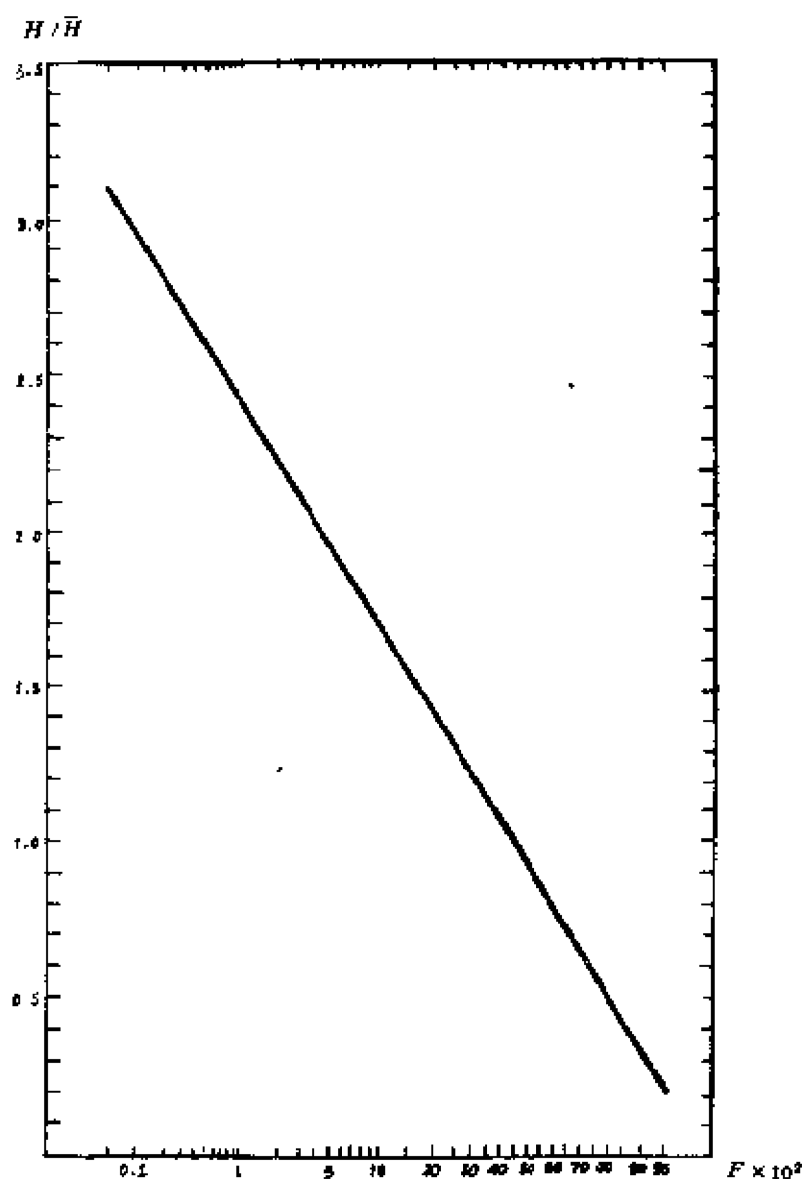


图 6—22　波高累积概率

（式 6.5—20）

的。Глуховский(1966)依据观测资料分析了浅海中海浪波高分布，并得到了经验的累积概率

$$F(H)=\exp\left[-\frac{\pi}{4\left(1+\frac{H^*}{\sqrt{2\pi}}\right)}\left(\frac{H}{\bar{H}}\right)^{2/(1-H^*)}\right],\tag{6.5—22}$$

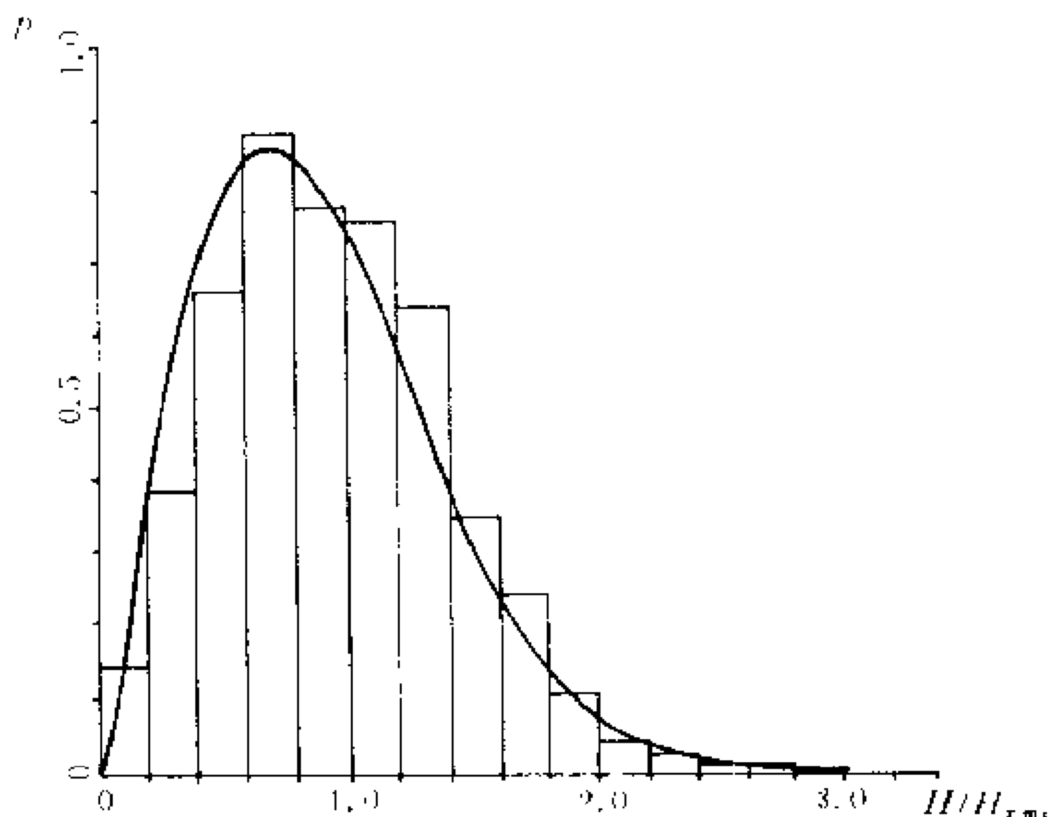


图 6—23　波高概率密度的观测值与理论值比较

(Chakrebarri 和 Cooly, 1977)

其中参量 $H^*=\frac{\overline{H}}{d}$，$d$ 为水深，反映水深对分布函数的影响。依概率密度与累积概率的关系 $f(H)=-\frac{dF(H)}{dH}$，得

$$f(H)=\frac{\pi}{2\overline{H}(1-H^*)\left(1+\frac{H^*}{\sqrt{2\pi}}\right)}\left(\frac{H}{\overline{H}}\right)^{(1+H^*)/(1-H^*)}\times$$

$$\exp\left[-\frac{\pi}{4\left(1+\frac{H^*}{\sqrt{2\pi}}\right)}\left(\frac{H}{\overline{H}}\right)^{2/(1-H^*)}\right]。\quad(6.5-23)$$

由(6.5—22)式和(6.5—23)式的计算结果与观测结果比较，两者符合良好。当 $H^*\to 0(d\to\infty)$时，(6.5—23)式和(6.5—22)式分别

还原为瑞利分布(6.5—17)式和(6.5—20)式。

6.5.4 各种波高间的关系

海面上同时出现许多高低不等的波高，它们的统计性质由波高的概率密度加以描述。但是，在实际应用中常常采用具有某种代表意义的特征波高，比如平均波高，均方根波高，最大波高，某保证率波高，某部分波的平均波高，等等。使用何种波高，取决于使用的目的。这些波高之间存在着一定关系，而这种关系可以由波高的累积概率来确定。

平均波高 $\overline{H}$ 是一种最基本的特征量，在资料统计中代表各波高的平均值，大致反映海面波高的平均状态。平均波高 $\overline{H}$ 还构成各种特征波高换算的媒介。

有些实际的和理论的问题中要求了解海浪的平均能量，因为平均能量比例于波振幅 a(波高之半)的平方，因此经常需要知道均方根波高 H_{rms}。它和平均波高 $\overline{H}$ 的关系可由(6.5—14)式和(6.5—15)式导出

$$H_{rms} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\overline{H} = 1.129\overline{H}。 \qquad (6.5-24)$$

在港口工程计算中常使用某累积率对应的波高，通常称为累积率波高 H_F。例如，观测了 1000 个波，按其波高大小排列，其第 10 个最大波高为 $2m$，则累积概率 1×10^{-2} 的波高为 $2m$，记为 $H_{1\times10^{-2}}$[①] $=2m$。此种波高大致反映出某给定波高值出现的可能性。累积率波高与平均波高之关系可利用(6.5—20)式导出，如将该式中的 H 用 H_F 代替，则可得

$$\frac{H_F}{\overline{H}} = \left(\frac{4}{\pi}\ln\frac{1}{F}\right)^{1/2}。 \qquad (6.5-25)$$

---

① 过去习用的表示法为 $H_{1\%}$。

由(6.5—25)式，给出不同的累积率 F，可以计算出 H_F 与 $\overline{H}$ 的比值，也可以计算出不同累积率波高之间的关系。例如，因为 $H_{1\times10^{-2}}/\overline{H}=2.42$，$H_{5\times10^{-2}}/\overline{H}=1.95$，因此 $H_{1\times10^{-2}}/H_{5\times10^{-2}}=1.24$。如果考虑水深的影响，则由(6.5—22)式可得

$$\frac{H_F}{\overline{H}}=\left[-\frac{4}{\pi}\left(1+\frac{H^*}{\sqrt{2\pi}}\right)\ln F\right]^{\frac{1-H^*}{2}}。\qquad(6.5-26)$$

在航行、港口设计中很关心海浪的显著部分，因此提出了部分大波平均波高的概念。设有一系列观测波高，将其按大小排列，其中最高的 P 部分求平均，称之为 P 部分大波平均波高 H_P。例如，1000 个波高中，取 100 个最高的波高(1/10 部分)求平均，称之为 $\frac{1}{10}$大波平均波高，记为 $H_{1/10}$。特别是 $H_{1/3}$，是$\frac{1}{3}$大波平均波高，专门称之为有效波高，具有有效波高的波称之为有效波，此波的周期，称之为有效周期。Longuet—Higgins(1952)最先讨论了部分大波波高与其它波高的关系。由(6.5—21)式知

$$F(a)=e^{-a^2/a_{rms}^2},\qquad(6.5-27)$$

它代表波振幅大于 a 的波所占的比例，即

$$p=e^{-a^2/a_{rms}^2}。\qquad(6.5-28)$$

由上式得

$$\frac{a}{a_{rms}}=\left(\ln\frac{1}{p}\right)^{1/2}。\qquad(6.5-29)$$

另外，令 p 部分大波的平均振幅为 a_p，则有

$$a_p=\frac{\int_a^\infty af(a)da}{\int_a^\infty f(a)da}。\qquad(6.5-30)$$

因为 $\int_a^\infty f(a)da=p=e^{-a^2/a_{rms}^2}$，$f(a)da=-dF=-de^{-a^2/a_{rms}^2}$，因此(6.5—30)式可表为

$$a_p = \frac{-\int_a^\infty a\,de^{-a^2/a_{rms}^2}}{e^{-a^2/a_{rms}^2}} = \frac{ae^{-a^2/a_{rms}^2} + \int_a^\infty e^{-a^2/a_{rms}^2}da}{e^{-a^2/a_{rms}^2}},$$

两边同除以 a_{rms}，得

$$\frac{a_p}{a_{rms}} = \frac{a}{a_{rms}} + e^{a^2/a_{rms}^2}\int_a^\infty e^{-a^2/a_{rms}^2}d\left(\frac{a}{a_{rms}}\right),$$

将(6.5—28)式(6.5—29)式代入上式得

$$\frac{a_p}{a_{rms}} = \left(\ln\frac{1}{p}\right)^{1/2} + \frac{1}{p}\int_{(\ln\frac{1}{p})^{1/2}}^\infty e^{-x^2}dx$$

$$= \left(\ln\frac{1}{p}\right)^{1/2} + \frac{1}{p}\left[\int_0^\infty e^{-x^2}dx - \int_0^{(\ln\frac{1}{p})^{1/2}} e^{-x^2}dx\right]。 \tag{6.5—31}$$

利用误差函数 $\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x e^{-x^2}dx$ 以及 $\int_0^\infty e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，于是(6.5—31)式变成

$$\frac{a_p}{a_{rms}} = \left(\ln\frac{1}{p}\right)^{1/2} + \frac{1}{p}\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left\{1-\mathrm{erf}\left[\left(\ln\frac{1}{p}\right)^{1/2}\right]\right\}。 \tag{6.5—32}$$

给定 p 值可以算出对应的比值$\frac{a_p}{a_{rms}}$，表 6—1 示出了计算结果。

表 6—1　不同累积率的振幅比(Longuet—Higgins，1952)

p	a_p/a_{rms}	p	a_p/a_{rms}
0.01	2.359	0.4	1.347
0.05	1.986	0.5	1.256
0.1	1.951	0.6	1.176
0.2	1.800	0.7	1.102
0.25	1.517	0.8	1.031
0.3	1.454	0.9	0.962
0.333	1.416	1.0	0.886

利用 H_{rms} 和 $\overline{H}$ 的关系式(6.5－24)，结果(6.5－32)式转变成部分大波平均波高与平均波高的比

$$\frac{H_p}{\overline{H}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}(\ln\frac{1}{p})^{1/2}+\frac{1}{p}\{1-\mathrm{erf}[(\ln\frac{1}{p})^{1/2}]\},\tag{6.5—33}$$

$\frac{H_p}{\overline{H}}$ 之值很容易由表 6－1 所列之值乘以 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$ 得到。例如，

$$\left.\begin{aligned}\frac{H_{1/100}}{\overline{H}}&=2.663,\\ \frac{H_{1/10}}{\overline{H}}&=2.032,\\ \frac{H_{1/3}}{\overline{H}}&=1.596。\end{aligned}\right\}\tag{6.5—34}$$

如果考虑水深的影响，可得

$$\frac{H_p}{\overline{H}}=\frac{1}{p}[\frac{2}{\pi}(1+\frac{H^*}{\sqrt{2\pi}})]\int_{(2\ln\frac{1}{p})^{1/2}}^{\infty}x^{2-H^*}e^{-x^2/2}dx。\tag{6.5—35}$$

利用此式可以算出不同累积率 p 所对应的比值 $H_p/\overline{H}$，如表 6－2 所示，计算中取 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}=0.1$。

表 6—2　不同水深及累积率情况下的波高比

(Глуховский, 1966)

$P\times10^2$	H^*					
	深海	过渡区				破碎区
	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5

0.1	3.17	2.85	2.57	2.31	2.06	1.85
0.5	2.80	2.56	2.34	2.23	1.92	1.74
1	2.64	2.42	2.22	2.04	1.86	1.69
2	2.50	2.30	2.12	1.96	1.79	1.64
3	2.38	2.21	2.04	1.89	1.74	1.60
5	2.22	2.09	1.94	1.80	1.67	1.54
10	2.02	1.93	1.81	1.69	1.58	1.47
20	1.79	1.72	1.64	1.55	1.47	1.38
30	1.64	1.58	1.51	1.45	1.39	1.32
40	1.52	1.47	1.43	1.38	1.33	1.27
50	1.42	1.38	1.35	1.31	1.27	1.22
60	1.33	1.30	1.28	1.25	1.22	1.18
70	1.24	1.22	1.20	1.19	1.16	1.14
80	1.16	1.15	1.14	1.12	1.11	1.09
90	1.08	1.08	1.07	1.06	1.05	1.04
95	1.04	1.04	1.03	1.03	1.03	1.02
100	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0

最大波高是观测到的波高中的最大值 H_{max}，是实际应用中最关心的问题。最大波高也是随机量，其累积概率决定于波高的累积概率和所取的波的个数 n。由最大波高的累积概率可以导出其数学期望和最可能值。Longuet－Higgins 证明得到，对于小的 n，H_{max}的期望值为

$$\frac{E(H_{max})}{H_{rms}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[\frac{n}{2} - \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots\cdots + (-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right], \qquad (6.5-36)$$

对于大的 n，上式比值的渐近式为

$$\frac{E(H_{max})}{H_{rms}} = (\ln n)^{1/2} + \frac{1}{2}r(\ln n)^{1/2} + O(\ln n)^{-3/2},$$

$$(6.5-37)$$

其中 $r=0.57722$。H_{max}的最可能值 $\mu(H_{max})$，可证明

$$\frac{\mu(H_{max})}{H_{rms}} = (\ln n)^{1/2} + 0(\ln n)^{-3/2}。\qquad (6.5-38)$$

以上所导出的平均波高与均方根波高、累积率波高、部分大波平均波高及最大波高之间的关系，已为一些观测资料所验证，理论结果与实测资料是符合的。

6.5.5 周期与波长的分布

理论上导出的周期概率密度在应用中计算手续比较麻烦，而半经验的周期概率密度则在应用中显得简便。半经验半理论的波长概率密度为瑞利分布

$$f(\lambda) = \frac{\pi}{2}\frac{\lambda}{\bar{\lambda}^2}\exp(-\frac{\pi}{4}\frac{\lambda^2}{\bar{\lambda}^2}), \qquad (6.5-39)$$

其中 $\bar{\lambda}$ 为平均波长。利用深水中的波长与周期的关系式 $\lambda=gT^2/2\pi$ [见(6.3-8)式]，由(6.5-39)式可以导出周期的分布

$$f(T) = \frac{\pi T^3}{T_0^4}\exp(-\frac{\pi}{4}\frac{T^4}{T_0^4}), \qquad (6.5-40)$$

其中 $T_0=\sqrt{2\pi\bar{\lambda}/g}$。由上式求得累积概率

$$F(T) = \int_T^\infty f(T)dt = \exp(-\frac{\pi}{4}\frac{T^4}{T_0^4})。\qquad (6.5-41)$$

由(6.5-41)式求得平均周期

$$\bar{T} = \int_0^\infty Tf(T)dT = (\frac{4}{\pi})^{1/4}\Gamma(\frac{5}{4})T_0, \qquad (6.5-42)$$

将 $\bar{T}$ 代入(6.5-40)式和(6.5-41)式，得

$$f(T) = 4\Gamma^4(\frac{5}{4})\frac{T^3}{\bar{T}^4}\exp[-\Gamma^4(\frac{5}{4})\frac{T^4}{\bar{T}^4}], \quad (6.5-43)$$

$$F(T)=\exp\left[-\Gamma^4\left(\frac{5}{4}\right)\frac{T^4}{\bar{T}^4}\right]。\qquad (6.5-44)$$

观测表明，当波浪由深水进入浅水后，周期几乎不变，其分布与水深无关，但波长却随水深而变，分布也随水深而变。根据Глуховский，考虑水深影响的周期概率密度与累积概率为

$$f(T)=\frac{\pi}{1.2}\frac{T^3}{\bar{T}^4}\exp\left[-\frac{\pi}{4.8}\left(\frac{T}{\bar{T}}\right)^4\right],\qquad (6.5-45)$$

$$F(T)=\exp\left[-\frac{\pi}{4.8}\left(\frac{T}{\bar{T}}\right)^4\right],\qquad (6.5-46)$$

该两式分别与(6.5—43)式和(6.5—44)式基本一致。将有限深的波长与周期的关系 $T^2=\frac{2\pi\lambda}{g}\text{th}^{-1}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)$[见(6.3—6)式]代入(6.5—46)式，有

$$F(\lambda)=\exp\left[-\frac{\pi}{4.8}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2\text{th}^{-2}\left(\frac{2\pi d}{\lambda}\right)\right],\qquad (6.5-47)$$

其中 $\lambda_1=\frac{g}{2\pi}\bar{T}^2$。平均波长

$$\bar{\lambda}=\int_0^\infty \lambda f(\lambda)d\lambda=\int_0^\infty \lambda dF(\lambda),$$

以(6.5—47)式代入，得

$$\bar{\lambda}=\int_0^\infty \exp\left[-\frac{\pi}{4.8}\left(\frac{\lambda}{\lambda_1}\right)^2\text{th}^{-2}\frac{2\pi d}{\lambda}\right]d\lambda。$$

两边除以 λ_1，并令 $x=\lambda/\lambda_1$，上式变成

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_1}=\int_0^\infty \exp\left[-\frac{\pi}{4.8}x^2\text{th}^{-2}\left(\frac{2\pi d}{\lambda_1}\cdot\frac{1}{x}\right)\right]dx,$$

其计算结果可表为

$$\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_1}=f_1\left(\frac{2\pi d}{\lambda_1}\right)=f_1\left(\frac{2\pi d}{\bar{\lambda}}\cdot\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_1}\right)。\qquad (6.5-48)$$

显然，其值只能以图解或数值形式给出。累积概率(6.5—47)式可改写成

$$F(\lambda) = \exp\left[-\frac{\pi}{4.8}\left(\frac{\lambda}{\bar{\lambda}}\right)^2\left(\frac{\bar{\lambda}}{\lambda_1}\right)^2 \text{th}^{-2}\left(\frac{2\pi d}{\bar{\lambda}} \cdot \frac{\bar{\lambda}}{\lambda}\right)\right]。 \tag{6.5—49}$$

利用以上两式，根据不同的参数值$\frac{2\pi d}{\bar{\lambda}}$，可计算 $\lambda/\bar{\lambda}$ 所对应的波长概率。

§6.6　海浪谱

6.6.1　能谱和方向谱的概念

前面曾将海浪视为无数随机的正弦波动的叠加，并且着重指出其位相是随机的。各正弦波有各自的振幅 a 和角频率 ω，但未讨论它们之间的关系。实际观测表明，频率很小（周期很长）和频率很大（周期很短）的海浪之波高都不大，波高显著部分的频率则介于中间某个范围内。那么，作为描述实际海浪内部结构的那些正弦波动，它们的振幅（或波高）大小与其所具有的频率之间是否也存在着类似的关系？为了回答这个问题，首先要建立谱的概念。

根据前节讨论，于固定点观测到的实际海浪的波剖面可表为

$$\zeta(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cos(\omega_i t + \varepsilon_i) \tag{6.6—1}$$

其数学期望和方差为每个组成波的期望和方差之和，即

$$\left.\begin{aligned} a &= \sum_{i=1}^{\infty} a(i) = 0, \\ \sigma^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \sigma^2(i) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2。\end{aligned}\right\} \tag{6.6—2}$$

（6.[illegible]2）式包含着两种意思，其一是每个正弦波的方差 $\sigma^2(i)$ 比例于[illegible]的平均能量（$=\frac{1}{2}\rho g a_i^2$），总的方差 σ^2 比例于所有正弦波的

总能量$\left(=\frac{1}{2}\rho g\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)$；其二是合成波动的组成方差$\sigma_{i0}^2$依不同的频率$\omega$按一定的方式分布着，有的频率对应的方差大，有的对应的方差小，方差的大小取决于频率所对应的波动振幅（从而能量）的大小。

如果频率ω是近似连续分布的，则无论频率区间$\triangle\omega$是如何的小，总对应着一个组成方差的部分和$\triangle\sigma^2=\sum_{\omega_k-\triangle\omega/2}^{\omega_k+\triangle\omega/2}\sigma^2(\omega)$，令

$$S(\omega_k)=\frac{\sum_{\omega_k-\triangle\omega/2}^{\omega_k+\triangle\omega/2}\sigma^2(\omega)}{\triangle\omega}, \qquad (6.6-3)$$

显然，$S(\omega_k)$比例于在$\omega_k-\triangle\omega/2$和$\omega_k+\triangle\omega/2$之间所有正弦波动能量之和的平均值，称之为能谱（或频谱）。当n很大时，由（6.6－2）式和（6.6－3）式可得合成波方差与能谱的关系

$$\sigma^2=\sum_{k=1}^{\infty}S(\omega_k)\triangle\omega,$$

取极限可得

$$\sigma^2=\int_0^{\infty}S(\omega)d\omega, \qquad (6.6-4)$$

表明能谱的积分等于总方差。

波剖面的协方差为

$$R(\tau)=E[\zeta(t)\zeta(t+\tau)]$$

$$E\{\sum a_i\cos(\omega_i t+\varepsilon_i)\sum a_i\cos[\omega_i(t+\tau)+\varepsilon_i]\},$$

经计算可得

$$R(\tau)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2}a_i^2\cos\omega_i\tau=\sum_{i=1}^{\infty}\sigma^2(\omega)\cos\omega_i\tau。 \qquad (6.6-5)$$

利用（6.6－3）式，上式变成

$$R(\tau)=\sum_k S(\omega_k)\cos\omega_k\tau\triangle\omega,$$

取极限，得

$$R(\tau) = \int_0^\infty S(\omega)\cos\omega\tau d\omega。\qquad (6.6-6)$$

经傅氏变换，可得由协方差确定能谱的表达式

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(\tau)\cos\omega\tau d\tau。\qquad (6.6-7)$$

(6.6—7)式是研究海浪能谱的基本表达式。图6—24是它的示意图，具体的能谱将在下节讨论。能谱描述了不同频率波动所对应的能量分布情形，描述了海浪的内部结构。

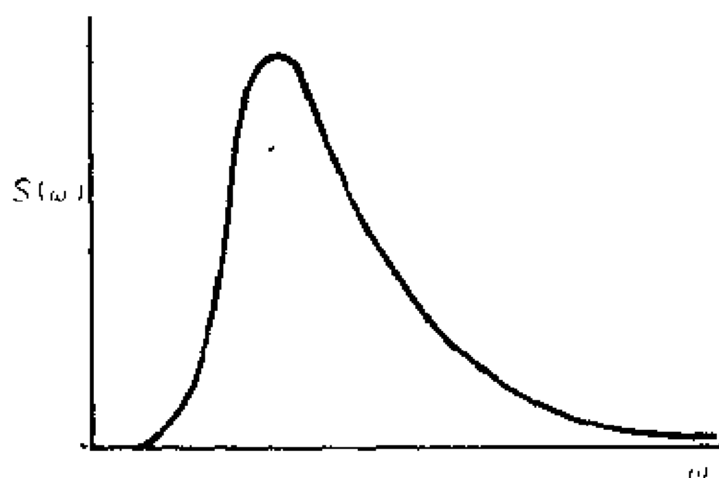


图6—24 能谱示意图

在海浪谱的研究中，存在着不同的谱模型，用不同的形式但具有相同物理意义的函数描述能量依频率的分布。Longuet—Higgins (1957)就是基于上述讨论建立了Longuet—Higgins模型。另一种模型为Pierson模型(Pierson，1952)，它将固定点的波剖面表示成

$$\zeta(t) = \lim_{\substack{\omega_{2r}\to\infty \\ \omega_{2s+1}-\omega_{2s}=0}} \sum_{s=0}^{r}\cos[\omega_{2s+1}t + \varepsilon(\omega_{2s+1})]\sqrt{A^2(\omega_{2s+1})(\omega_{2s+2}-\omega_{2s})}。$$

$$(6.6-8)$$

如上式极限存在，可用积分形式表示

$$\zeta(t) = \int_0^\infty \cos[\omega t + \varepsilon(\omega)]\sqrt{A^2(\omega)d\omega}。\qquad (6.6-9)$$

求其协方差可得

$$R(\tau) = \frac{1}{2}\int_0^\infty A^2(\omega)\cos\omega\tau d\omega, \qquad (6.6-10)$$

经福氏变换，得

$$A^2(\omega) = \frac{4}{\pi}\int_0^\infty R(\tau)\cos\omega\tau d\tau。 \qquad (6.6-11)$$

比较(6.6—7)式和(6.6—11)式，可以看出 $A^2(\omega)$与 $S(\omega)$之间有如下关系

$$A^2(\omega) = 2S(\omega), \qquad (6.6\text{-}12)$$

因此，Pierson 模型中的 $A^2(\omega)$和能谱 $S(\omega)$在形式上不同，但同样都比例于$\triangle\omega$ 范围内所有正弦波动能量的平均值，也是能谱。此外，还有用广义傅利叶变换，Fourier－Stieljes 积分来描述海浪的方法，都可以得到类似于能谱 $S(\omega)$的形式。

前面讨论了以频率 ω 表示的能谱，又称为一维谱。一维谱仅能描述固定地点的海浪内部平均能量相对于频率的分布。实际上，海浪是有方向的，能谱不能反映海浪内部能量相对于方向的结构，也不能描述大面积空间的波面。为此，必须引进二维谱 $S(\omega,\theta)$。设 xy 平面上，用沿着与 x 轴成 θ 角的方向传播的正弦波动叠加表示合成波动

$$\zeta(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cos\left[\left(\frac{\omega_n^2}{g}\cos\theta_n\right)x + \left(\frac{\omega_n^2}{g}\sin\theta_n\right)y - \omega_n t + \varepsilon_n\right]$$

$$(6.6-13a)$$

或

$$\zeta(x,y,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\cos(l_n x + m_n y - \omega_n t + \varepsilon_n), \qquad (6.6-13b)$$

其中 ε_n 为随机位相，$\frac{\omega_n^2}{g}=k_n$ 为深水正弦波的波数，$l_n=k_n\cos\theta_n$，$m_n=k_n\sin\theta_n$，分别为波数的 x 和 y 方向分量。与一维谱类似，令

$$S(\omega,\theta)=\frac{\sum\limits_{\omega-\triangle\omega/2}^{\omega+\triangle\omega/2}\sum\limits_{\theta-\triangle\theta/2}^{\theta-\triangle\theta/2}\frac{1}{2}a_n^2}{\triangle\omega\triangle\theta},\qquad(6.6-14a)$$

和

$$S(l,m)=\frac{\sum\limits_{l-\triangle l/2}^{l+\triangle l/2}\sum\limits_{m-\triangle m/2}^{m+\triangle m/2}\frac{1}{2}a_n^2}{\triangle l\triangle m},\qquad(6.6-14b)$$

即定义 $S(\omega,\theta)$比例于频率介于 $\omega-\triangle\omega/2$ 和 $\omega+\triangle\omega/2$ 之间和方向介于 $\theta-\triangle\theta/2$ 和 $\theta+\triangle\theta/2$ 之间的所有正弦波能量之和的平均值，$S(l,m)$比例于波数 x 分量介于 $l-\triangle l/2$ 和 $l+\triangle l/2$ 之间，和波数 y 方向分量介于 $m-\triangle m/2$ 和 $m+\triangle m/2$ 之间的所有正弦波能量之和的平均值。由于 $S(\omega,\theta)$和 $S_1(l,m)$能反映海浪内部的方向结构，因此称之为方向谱或二维谱。波面协方差

$$R(\xi,\eta,\tau)=E[\zeta(x+\xi,y+\eta,t+\tau)\zeta(x,y,t)],\qquad(6.6-15)$$

将(6.6—13)式代入，并利用(6.6—14)式，取极限，得

$$R(\xi,\eta,\tau)=\int_0^\infty\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega,\theta)\cos[(\frac{\omega^2}{g}\cos\theta)\xi+(\frac{\omega^2}{g}\sin\theta)\eta-\omega\tau]d\omega d\theta\qquad(6.6-16)$$

或

$$R(\xi,\eta,\tau)=\int_0^\infty\int_0^\infty S(l,m)\cos(l\xi+m\eta-\omega\tau)dldm,\qquad(6.6-17)$$

由(6.6—16)式或(6.6—17)式可以确定方向谱。

6.6.2 谱的具体形式

前小节引入了谱的概念，它与海浪的统计特征不同，海浪统计规律只是反映出它的对外表现的性质，而海浪谱则是海浪内部结构的描述。其中能谱(一维谱)说明组成波能量相对频率的分布情

况，方向谱(二维谱)则能同时说明组成波能量依频率和沿传播方向的分布情况。海浪谱在理论和实际在都有着广泛的应用。那么如何寻求谱的具体形式呢?目前主要有两种途径，一是半经验半理论的途径，一是利用观测资料的谱估计的途径。本小节介绍由两种途径得到的几种谱形式。

图 6—24 是典型的海浪一维谱的示意图，其特点是能量集中在某一较窄的频带内，谱曲线关于其极大值不对称，在谱的极大值 $S(\omega_m)$ 所对应的频率 ω_m 的左侧的谱形曲线较陡，而右侧的谱形曲线则较平缓。据此曲线特征，谱曲线可写成如下形式

$$S(\omega) = \frac{A}{\omega^m} e^{-B/\omega^n}, \qquad (6.6-18)$$

其中 m，n，A 和 B 为待定常数。该式的特点是，对于较小的 ω 来说，指数部分起主要作用，谱值随 ω 而增加，对于大的 ω，$\frac{1}{\omega^m}$ 起主要作用，谱值随 ω 而减小。Neumann(1952，1953)最先依据观测资料(波高 H，周期 $\bar{T}$ 和海面风速 U)绘制了图 6—25，其中横坐标代表 $(\bar{T}/U)^2$，纵坐标为对数坐标，代表 $H/\bar{T}^2$。Neumann 据此导出 Neumann 谱。图中的点是很分散的，但是可以看出，某一周期的海浪虽然具有不同的波高，但不能超过一上限，此上限在图中以一条直线表示，并可表为

$$\frac{H}{\bar{T}^2} = C_1 e^{-\left(\frac{g}{2\pi}\frac{\bar{T}}{U}\right)^2}, \qquad (6.6-19)$$

其中 $(\frac{g}{2\pi})^2$ 与图中的直线斜率有关，C_1 与直线截距有关，并且 $C_1 = 0.219\mathrm{m/s}^2$。(6.6—19)式所代表的是风浪成长的上限，是风浪充分成长状态的描述。将该式平方后，可得

$$H^2 = C_1^2 \bar{T}^4 e^{-2\left(\frac{g\bar{T}}{2\pi U}\right)^2}。 \qquad (6.6-20)$$

因为 H 和 $\bar{T}$ 均为观测结果，是海浪的对外表现。现在的目的是导出能谱，因此需设法将它们与海浪的内部结构联系起来。根据前小

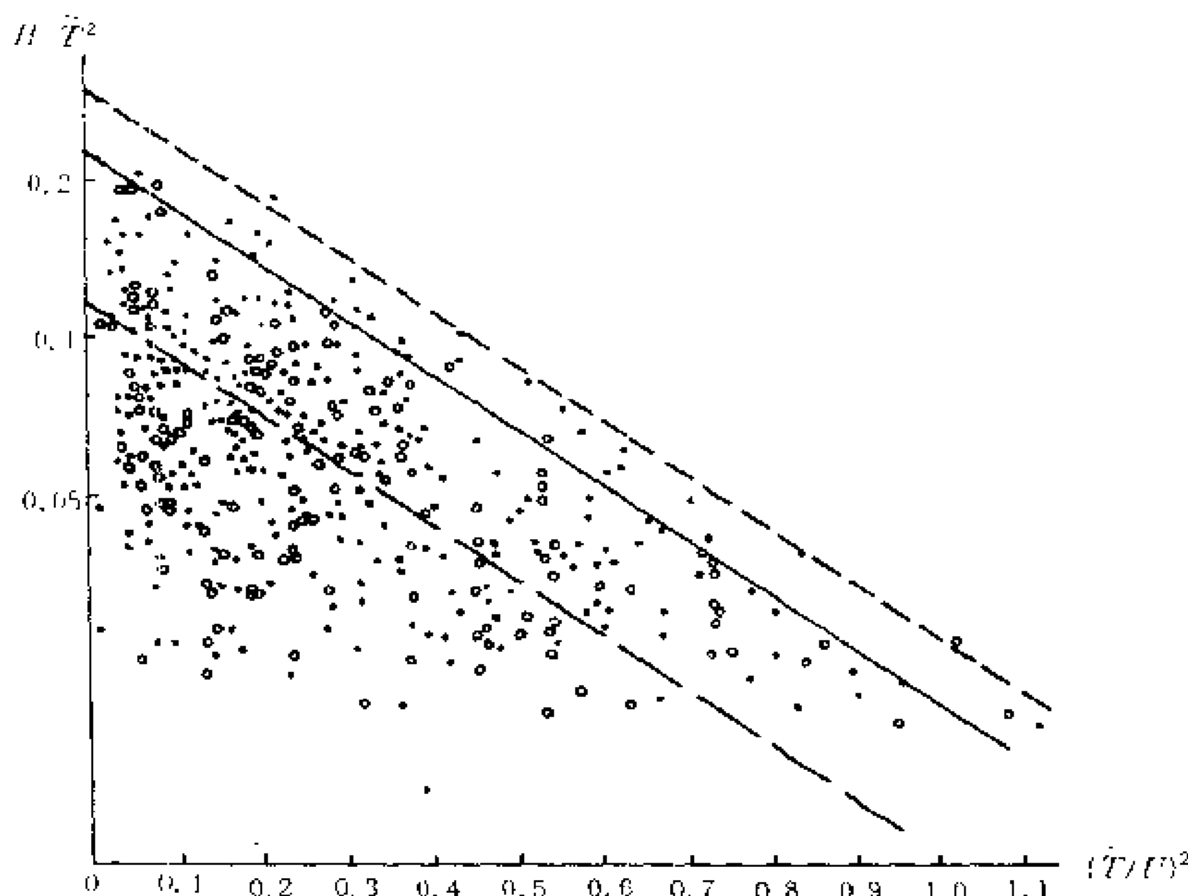


图 6－25　$H/\tilde{T}^2$ 相对于$(\tilde{T}/U)^2$ 的分布　(Neumann,1952)

节谱的概念,波高是各随机正弦波动叠加的结果,由于其中频率与 $\bar{\omega}(=\frac{2\pi}{\tilde{T}})$相近的正弦波,其位相也相近,因此对 H 的贡献最大,可以近似地认为

$$H^2(\bar{\omega}) = \sum_{\bar{\omega}-\Delta\bar{\omega}/2}^{\bar{\omega}+\Delta\bar{\omega}/2}[2a(\omega)]^2, \qquad (6.6-21)$$

根据(6.6－21)式和一维谱定义式(6.1－3),可得

$$S(\bar{\omega}) = \frac{H^2(\bar{\omega})}{8\Delta\bar{\omega}}。$$

将上式代入(6.6－20)式,并令 $C_1' = C_2\Delta\tilde{T}$,于是有

$$8S(\bar{\omega})\Delta\bar{\omega} = C_2\tilde{T}^4 e^{-2(\frac{g\tilde{T}}{2\pi U})^2}\Delta\tilde{T}。$$

由于(6.6－21)式已将 $\bar{\omega}$ 近似地理解为与其接近的组成波的频率

ω，因此可以用 ω, T 分别代替 $\tilde{\omega}, \tilde{T}$。再利用关系 $T=\frac{2\pi}{\omega}, A^2(\omega)=2S(\omega)$，于是上式变成

$$A^2(\omega) = C\frac{1}{\omega^6}e^{-2g^2/\omega^2U^2}。\qquad (6.6-22)$$

这就导出了充分成长海浪的 Neumann 谱，其中长度单位为 m，时间单位为 s，U 为距海面 7.5m 高度处的风速。(6.6—22)式中的常量 C 可以利用(6.6—10)式，(6.5—13)式和(6.5—34)式确定。由(6.6—10)式，令 $\tau=0$，得方差

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\int_0^\infty A^2(\omega)d\omega,$$

将(6.6—22)式代入其中可得

$$E = 2\sigma^2 = C\frac{3\sqrt{\pi}}{2^{11/2}g^5}U^5, \qquad (6.6-23)$$

由(6.5—13)式知 $\bar{a}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sigma$，于是有

$$\bar{H} = \sqrt{2\pi}\sigma = \sqrt{\pi E}, \qquad (6.6-24)$$

再由(6.5—34)式的第二式知，

$$H_{1/10} = 2.032\bar{H}。\qquad (6.6-25)$$

由以上三式可得

$$H_{1/10} = 3.60(\frac{3\sqrt{\pi}}{2^{11/2}g^5}C)^{1/2}U^{5/2}。\qquad (6.6-26)$$

根据观测得经验公式

$$H_{1/10} = 0.9\times 10^{-5}U^{5/2}。\qquad (6.6-27)$$

比较(6.6—26)式和(6.6—27)式，得

$$C = 4.80\text{m}^2/\text{s}^5。$$

图 6—26 示出了 $U=10$、15 及 20m/s 时的充分成长海浪的 Neumann 谱谱形。可以看出，谱的显著部分集中在一窄频带内，随着风速的增大，谱线下面的面积和显著部分的频率范围都变大，从而波

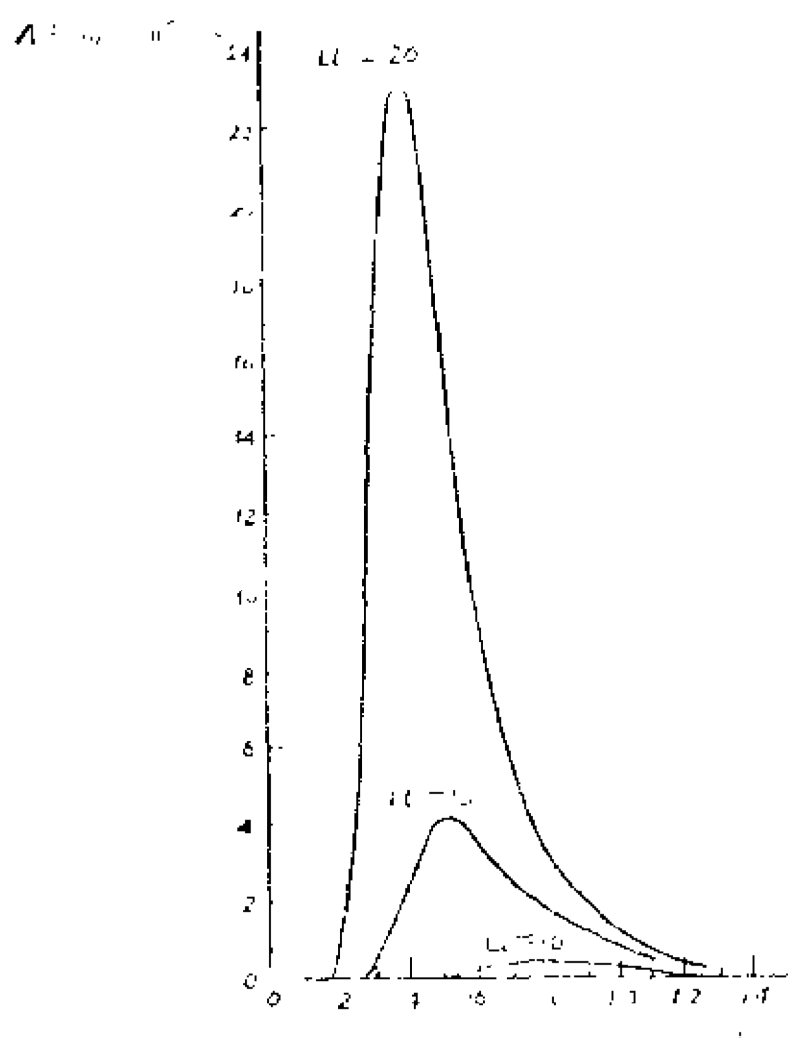


图6-26　三种不同风速下的Neumann谱

高和周期范围都增大；随着风速的增大，谱的显著部分向低频方向移动，即显著波的周期随风速的增大而增大。实际上，由(6.6—22)式可求得极大值对应的频率

$$\omega_m=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{g}{U}=0.817\,\frac{g}{U},\qquad (6.6-28)$$

此式清楚表明，谱峰频率随风速增大而向低频方向推移，相应地，谱的显著部分也作相同的推移。

Neumann谱所依据的资料是目测资料，精度不高。在他导出的

该谱中，相当于在(6.6－18)式中取 $m=6$，$n=2$。由该谱所得的谱形、、随风速变化的特征，在一定范围内还是与实际相符的，但存在不少争议，人们倾向于取 $m=5$。

Pierson 和 Moscowitz(1964)依据 Moscowitz(1964)的大量观测资料，得到如下的一维谱

$$A^2(\omega)=\frac{\alpha g^2}{\omega^5}e^{-\beta\left(\frac{g}{U\omega}\right)^4}, \qquad (6.6-29)$$

其中 $\alpha=8.10\times10^{-3}$，$\beta=0.74$，U 为 19.5m 高处的风速。(6.6－29)式的谱称之为 Pierson－Moscowitz 谱(简称 PM 谱)。该谱也是代表充分成长的海浪谱。由于该谱有充分的资料依据，自 60 年代以后，得到了广泛的应用，并逐步取代 Neumann 谱。图 6－27 是风速分别为 $U_{19.5}=16.24$m/s 和 $U_{7.5}=14.46$m/s 时的 PM 谱和 Neumann 谱的比较。虚线为 Neumann 谱，实线为 PM 谱。由(6.6－29)式可得 PM 谱谱峰所对应的频率

$$\omega_m=0.877\,\frac{g}{U}, \qquad (6.6-30)$$

比较 Neumann 谱谱峰频率(6.6－28)式可知，两种谱的极大值所对应的频率 ω_m 相近。若将两个 ω_m 代入各自的谱中，可以得出如下结论：当风速相同，但风速低时，Neumann 谱低于 PM 谱，而风速相同但风速高(＞20m/s)时，Neumann 谱高于 PM 谱。图 6－27 中因为风速小于 20m/s，所以 Neumann 谱低于 PM 谱。

在开发北海过程中，英国、荷兰、美国和德国联合进行了“联合北海波浪计划”(Joint North Sea Wave Project，简记为 JONSWAP)，于 1968－1969 在丹麦和德国边界西部进行了系统的波浪观测(Hasselmann，1973)在延伸 160km 的断面上进行了一次非常系统的观测，共得到 2500 个谱，利用这些结果提出了下面的一维谱。

$$A^2(\omega)=\alpha g^2\,\frac{1}{\omega^5}\exp\left[-\frac{5}{4}\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^4\right]\gamma^{\exp\left[-\frac{(\omega-\omega_0)^2}{2\sigma^2\omega_0^2}\right]}, \qquad (6.6-31)$$

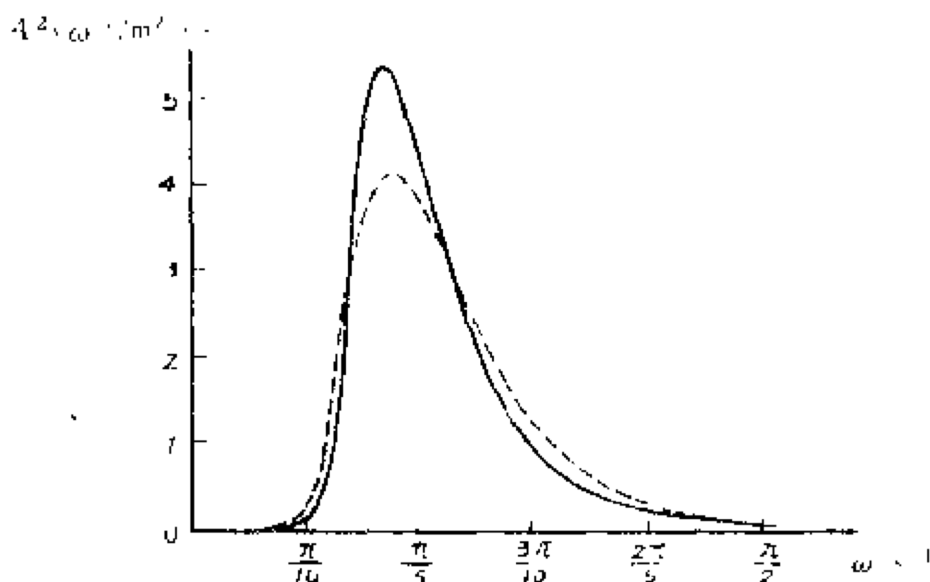


图 6—27　PM 谱与 Neumann 谱的比较　(Pierson, 1964)

称之为 JONSWAP 谱，其中 ω_0 为谱峰频率；r 为谱峰升高因子，定义为

$$r = E_{max}/E_{max}^{PM}, \qquad (6.6-32)$$

式中 E_{max} 为谱峰值，E_{max}^{PM} 为 PM 谱的峰值，r 的观测值介于 1.5—6 之间，平均值为 3.3，σ 为峰形参数，其值

$$\left.\begin{array}{ll}\sigma = 0.07 & \omega \leqslant \omega_0, \\ \sigma = 0.09 & \omega > \omega_0,\end{array}\right\} \qquad (6.6-33)$$

α 为无因次量 $\tilde{x}=gx/U^2$（x 为风区，U 为 10m 高处风速）的函数，对于 $\tilde{x}=10^{-1}\sim10^5$，有

$$\alpha = 0.076\tilde{x}^{-0.22}, \qquad (6.6-34)$$

对于较狭窄范围 $\tilde{x}=10^2\sim10^4$，上式中的指数约为 −0.4。对于无因次谱峰频率 $\tilde{\omega}_0=\omega_0\dfrac{U}{g}$，如果 $\tilde{x}=10^{-1}\sim10^5$，则有

$$\tilde{\omega}_0 = 22\tilde{x}^{-0.33}, \qquad (6.6-35)$$

还原为有因次形式

$$\omega_0 = 22g^{0.67}\frac{1}{U^{0.34}x^{0.33}} \sim 22\left(\frac{g^2}{Ux}\right)^{0.33}。 \qquad (6.6-36)$$

表明 JONSWAP 谱的谱峰随风速和风区而变。当风区一定时，峰频 ω_0 随风速增大而减小，谱峰随风速增大向低频推移；当风速一定时，ω_0 随风区增大而减小，大风区的峰频低于小风区的峰额。图 6－28 是 JONSWAP 观测结果得到的谱相对于风区的成长过程，图中的 5,7,9,10,11 为站号，其相应的风区依次增大，可以看出峰频随风区增大而减小的情形，以及谱曲线以下面积随风区而增大。

由 JONSWAP 谱(6.6－31)式可知，当取 $r=1$ 时，该谱与 PM 谱接近；$r=3.3$ 的 JONSWAP 谱谱峰值与 $r=1$ 的 PM 谱谱峰值之比为

$$\frac{A^2(\omega_0)}{A^2(\omega_0)_{PM}} = 3.3, \qquad (6.6-37)$$

因此，JONSWAP 谱峰比 PM 谱峰显著得多。

许多观测结果与 JONSWAP 谱符合良好，只不过(6.6－31)式中的一些参数要根据不同的观测作些不同的修正(Sngder, 1974; Mitsuyasu, 1977)。

以上介绍的谱没有考虑水深的影响。在波浪进入浅水后，由于非线性作用变得明显，在谱中也有所反映。观测表明，于浅水中的一维谱除了有一个显著的谱峰之外，有时在高频部分出现另一个较低的次峰。波兰的 Basinski 和 Massel(1973)在波罗的海的 Lubialowo 海岸附近系统地观测了波浪在浅水中的变化。观测断而与海岸垂直，得到了水深为 1.5m，3m，以及 5m 时的谱，如图 6－29 所示，在其高频部分都有一个较低的次峰。根据观测，他们得到浅水中的谱式为

$$\frac{\bar{\omega}S(\omega)}{\bar{H}^2} = 0.345\exp\left[-42\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}-0.52\right)^2\right] + 0.157\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right)^{-5}\exp\left[-0.652\left(\frac{\omega}{\bar{\omega}}\right)^4\right], \qquad (6.6-38)$$

其中 $\bar{H}$ 为平均波高，$\bar{\omega}$ 为平均频率。可以导出次峰的频率 $\omega=2\omega_0$

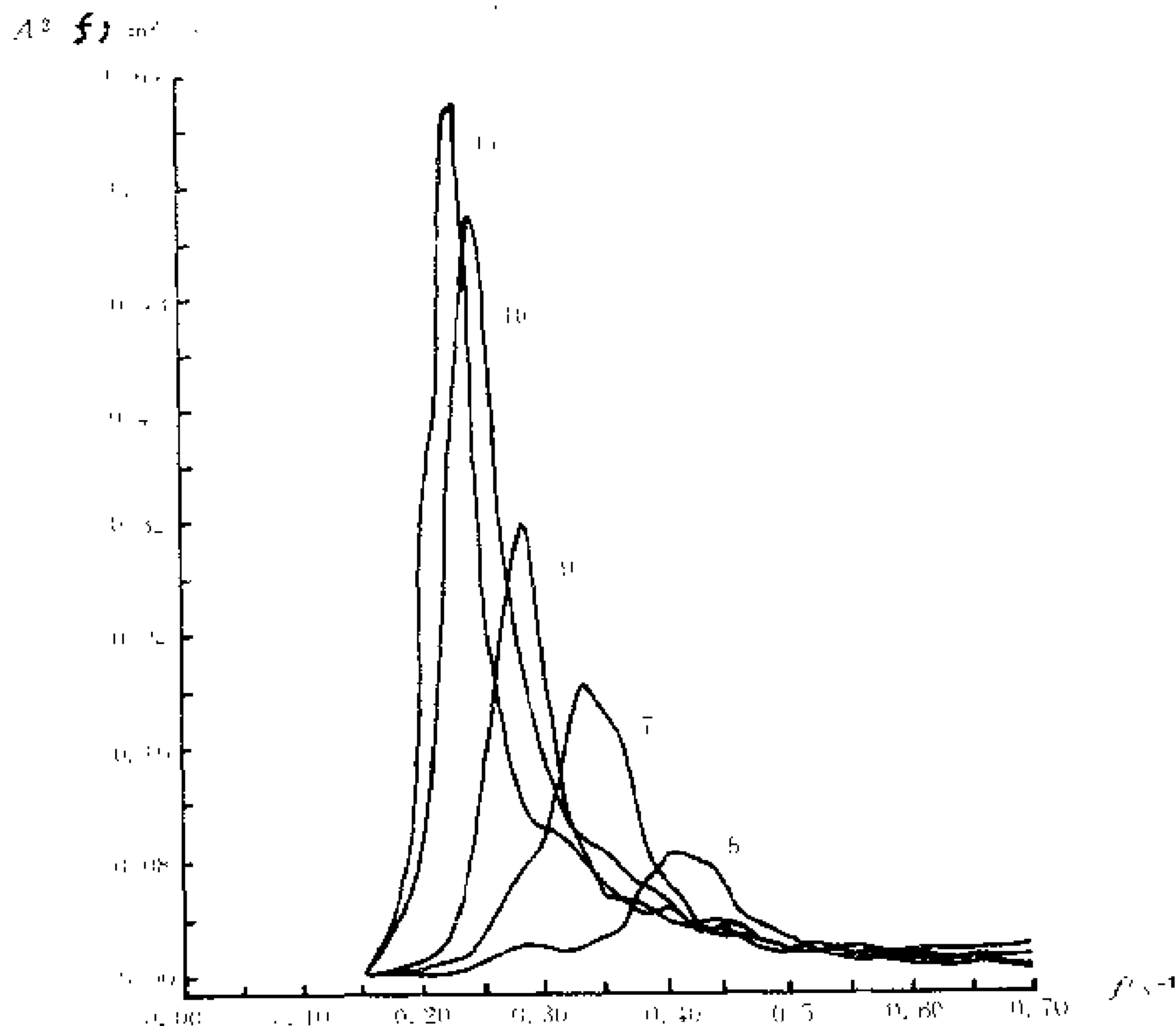


图 6－28　JONSWAP 谱相对于风区的成长　(Hasselmann 等，1973)
(f_m 为主峰频率)。

前述的 PM 谱和 JONSWAP 谱是国际上常使用的海浪能谱，但存在着一些缺点。如前所述，PM 谱是一种充分成长的海浪谱，只适用于充分成长的风浪；该谱的高频部分比例于 ω^{-5}，但自 70 年代以后的多数观测以及 Phillips(1985)和 Kitaigorodskii(1983)的

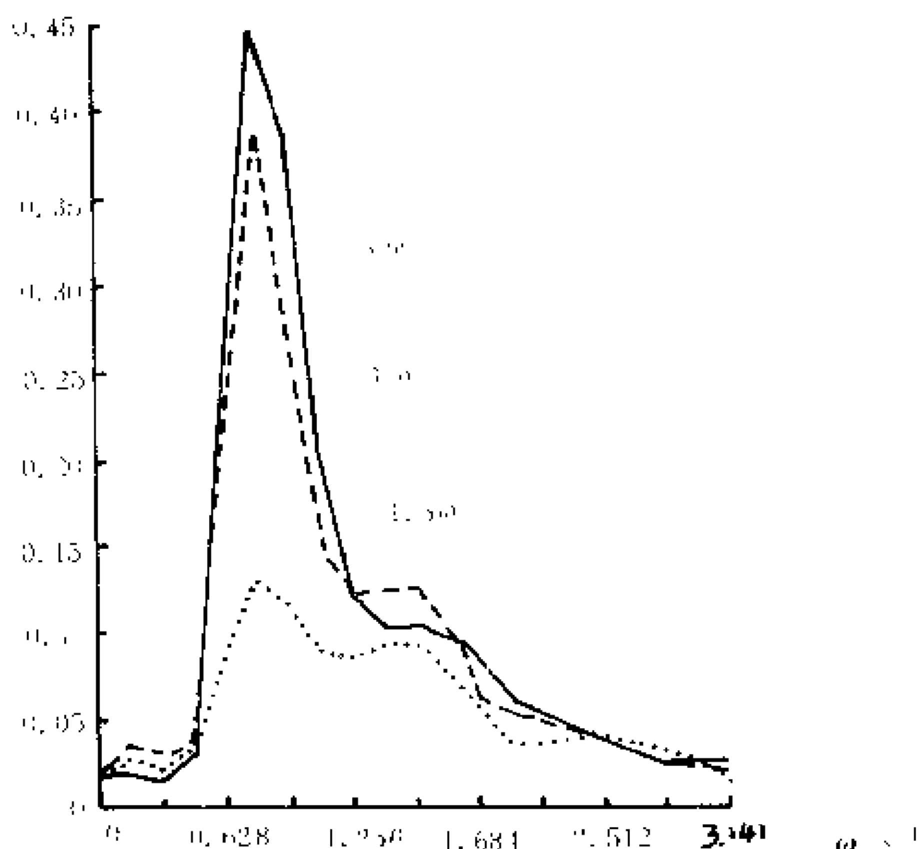


图 6—29　水深对频谱的影响　(Basinski 和 Massel, 1973)

理论结果表明，谱的高频部分应比例于 ω^{-4}。JONSWAP 谱虽然可以描述不同成长阶段的风浪，但高频部分也是比例于 ω^{-5}，这不仅与多数观测以及最近的理论研究不符，而且 Battjes 等(1987)将 JONSWAP 试验中的谱重新分析后发现，谱的高频部分本应该比例于 ω^{-4}，而不是现在的 ω^{-5}。JONSWAP 谱只适用于深水。在我国，文圣常等(1988a，1988b，1988c)在分析研究了现有的海浪能谱后，导出了理论风浪能谱。文圣常等(1990)对他们已提出的理论风浪能谱的低频部分又作了改进，使得谱的表示式显著简化。他们的改进谱为

$$S(\omega) = \frac{m_0}{\omega_0} p \times$$

$$\exp\{-95[\ln \frac{p(5.813-5.137\eta)}{(6.77-1.088p+0.013p^2)(1.307-1.426\eta)}]$$

$$\times (\frac{\omega}{\omega_0}-1)^{12/5}\}, \qquad 0 \leqslant \frac{\omega}{\omega_0} \leqslant 1.15 \qquad (6.6-39)$$

$$S(\omega) = \frac{m_0}{\omega_0} \frac{6.77-1.088p+0.013p^2)(1.307-1.426\eta)}{5.813-5.137\eta}$$

$$\times (1.15\frac{\omega_0}{\omega})^m, \qquad \frac{\omega}{\omega_0} \geqslant 1.15 \qquad (6.6-40)$$

其中 m_0 为零阶矩，ω_0 为谱峰频率，$p=\frac{\omega_0}{m_0}S(\omega_0)$ 为谱尖度因子，$\eta=\overline{H}/d$ 为深度参数，$\overline{H}$ 为平均波高，d 为水深，$m=2(2-\eta)$。对于深水，$\eta=0$，于是(6.6－39)式和(6.6－40)式分别简化为

$$S(\omega) = \frac{m_0}{\omega_0} p \exp\{-95[-\ln \frac{p}{1.522-0.245p+0.00292p^2}]$$

$$\times (\frac{\omega}{\omega_0}-1)^{12/5}\},$$

$$0 \leqslant \frac{\omega}{\omega_0} \leqslant 1.15, (6.6-41)$$

$$S(\omega) = 1.749(1.522-0.245p+0.00292p^2)(\frac{\omega_0}{\omega})^4,$$

$$\frac{\omega}{\omega_0} \geqslant 1.15。(6.6-42)$$

由于他们(1988c)建立了 m_0、ω_0 和 p 与风速 U、风区 x 和风时 t 的关系，因此改进谱不仅可以适用于不同水深，反映水深的影响，而且可以适用于不同的风浪成长阶段，反映风浪的成长过程。作为例子，下面给出深水情形下的这些关系。对深水，m_0，ω_0 和 p 与风速和风区的关系可表为

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= 1.89 \times 10^{-6} \frac{U^4}{g^2} \left(\frac{gx}{U^2}\right)^{0.7}, \\ \omega_0 &= 10.4 \frac{g}{U} \left(\frac{gx}{U^2}\right)^{-0.233}, \\ p &= 17.6 \left(\frac{gx}{U^2}\right)^{-0.233}; \end{aligned}\right\} \qquad (6.6-43)$$

而它们与风速和风时的关系为

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= 8.55 \times 10^{-8} \frac{U^4}{g^2} \left(\frac{gt}{U}\right)^{0.91}, \\ \omega_0 &= 29.2 \frac{g}{U} \left(\frac{gt}{U}\right)^{-0.303}, \\ p &= 49.3 \left(\frac{gt}{U}\right)^{-0.303}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.6-44)$$

在深水中，这三个参量还可以用有效波高 $H_{1/3}$ 和有效波周期 $T_{1/3}$ 表示，据他们给出为

$$\left.\begin{aligned} m_0 &= H_{1/3}/16, \\ \omega_0 &= 2\pi/T_0, \quad T_0 = T_{1/3}/0.91, \\ p &= 95.3 H_{1/3}^{1.35}/T_{1/3}^{2.7}, \end{aligned}\right\} \qquad (6.6-45)$$

将(6.6—45)关系式代入深水谱(6.6—42)式中，可得以波浪要素表示的谱式

$$S(\omega) = 0.0111 H_{1/3}^2 T_{1/3}\, p \exp\left[-95\left(\ln \frac{p}{1.522-0.245p+0.00292p^2}\right) \times (0.177 T_{1/3}\omega - 1)^{12/5}\right], \quad 0 \leqslant \omega \leqslant 6.58 \frac{1}{T_{1/3}}, \qquad (6.6-46)$$

$$S(\omega) = 20.8 \frac{H_{1/3}^2}{T_{1/3}^3} (1.522-0.245p+0.00292p^2) \frac{1}{\omega^4}, \quad \omega > 6.58 \frac{1}{T_{1/3}}. \qquad (6.6-47)$$

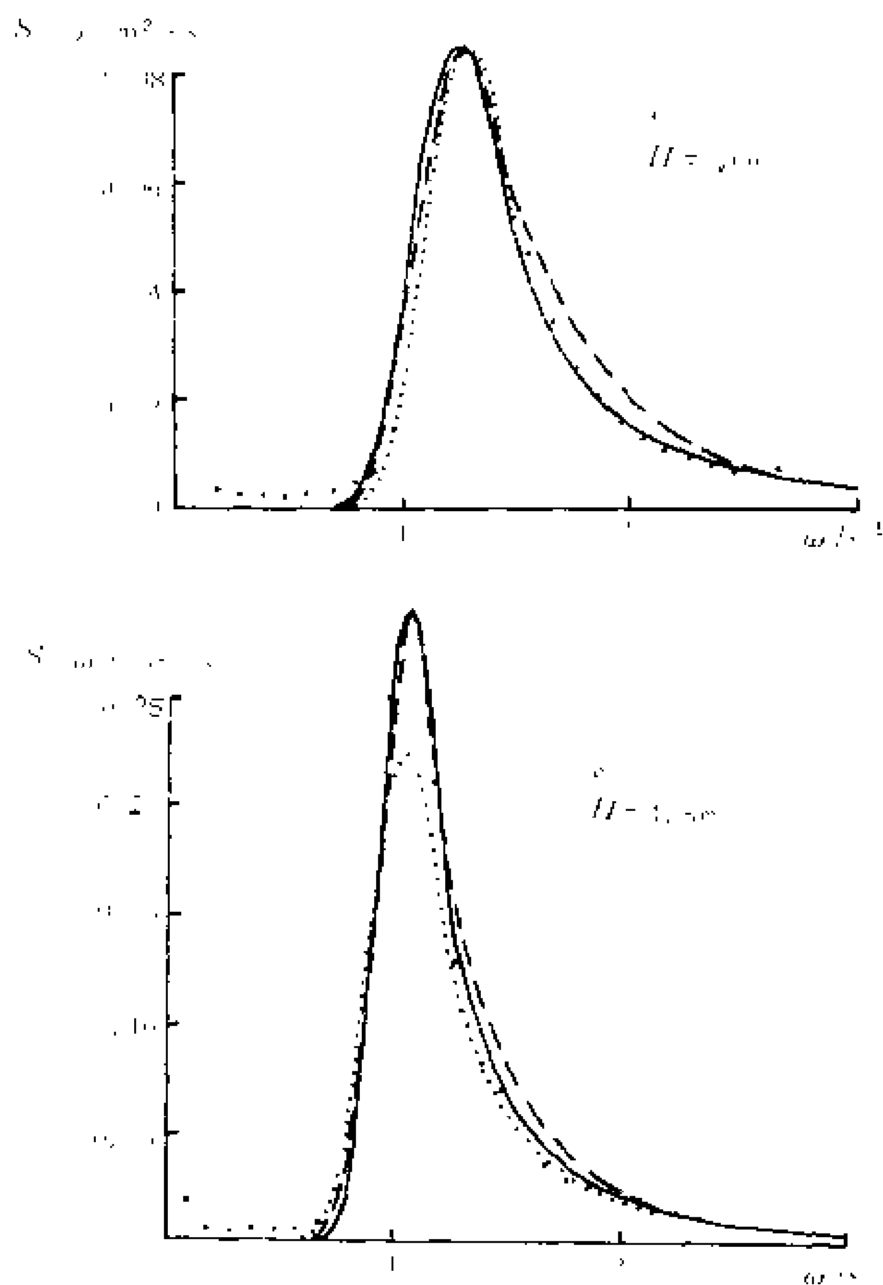


图6-30 深水有因次谱的比较 (黄海资料)(文圣常等,1990)

作者利用渤海、黄海、东海和南海的风浪观测资料对改进谱进行了广泛的检验，理论计算结果与观测结果符合良好；改进谱也与JONSWAP谱作了比较，二者是接近的，但就整体而言，改进谱与

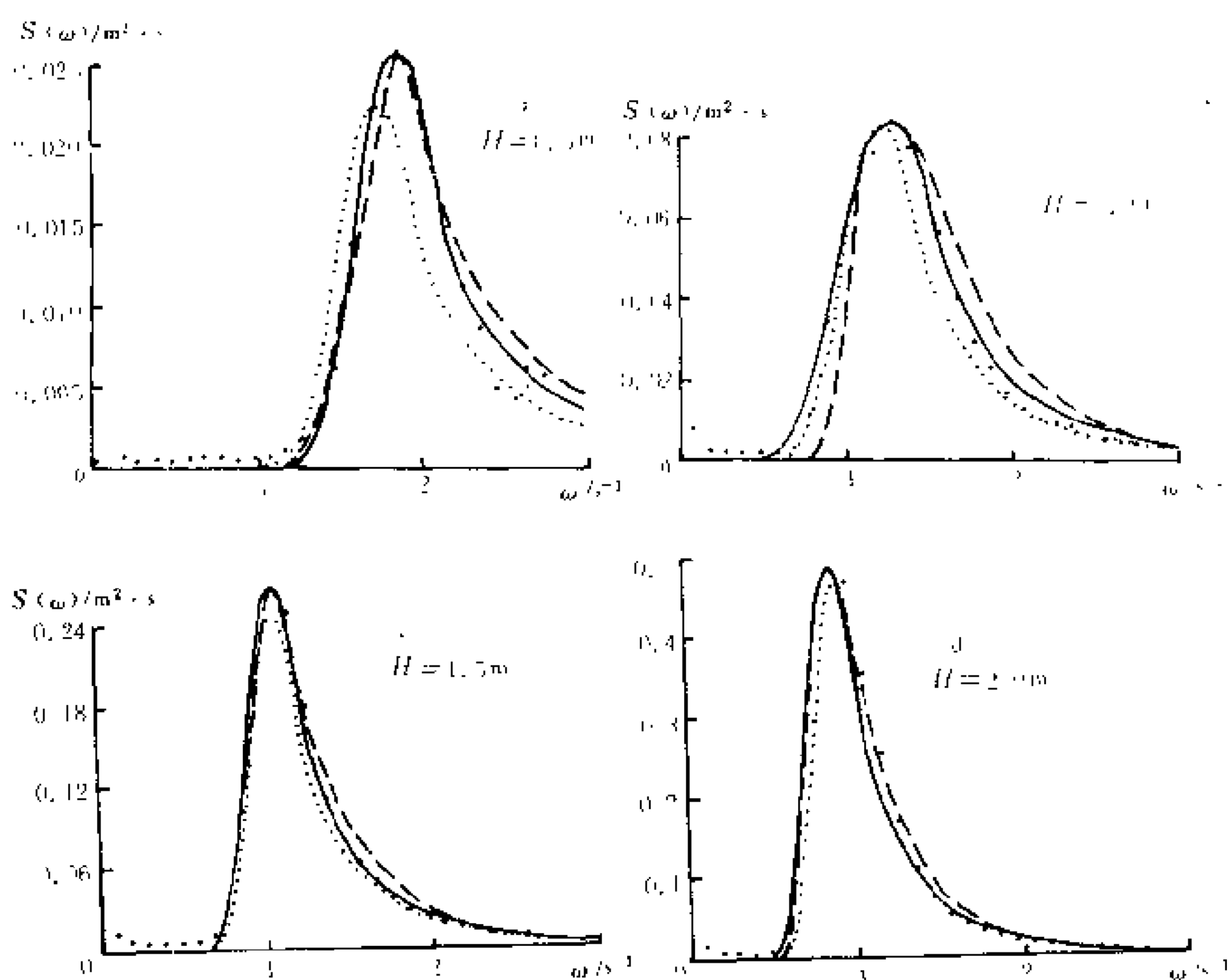


图 6—31　深水有因次谱的比较 （东海资料）（文圣常等，1990）

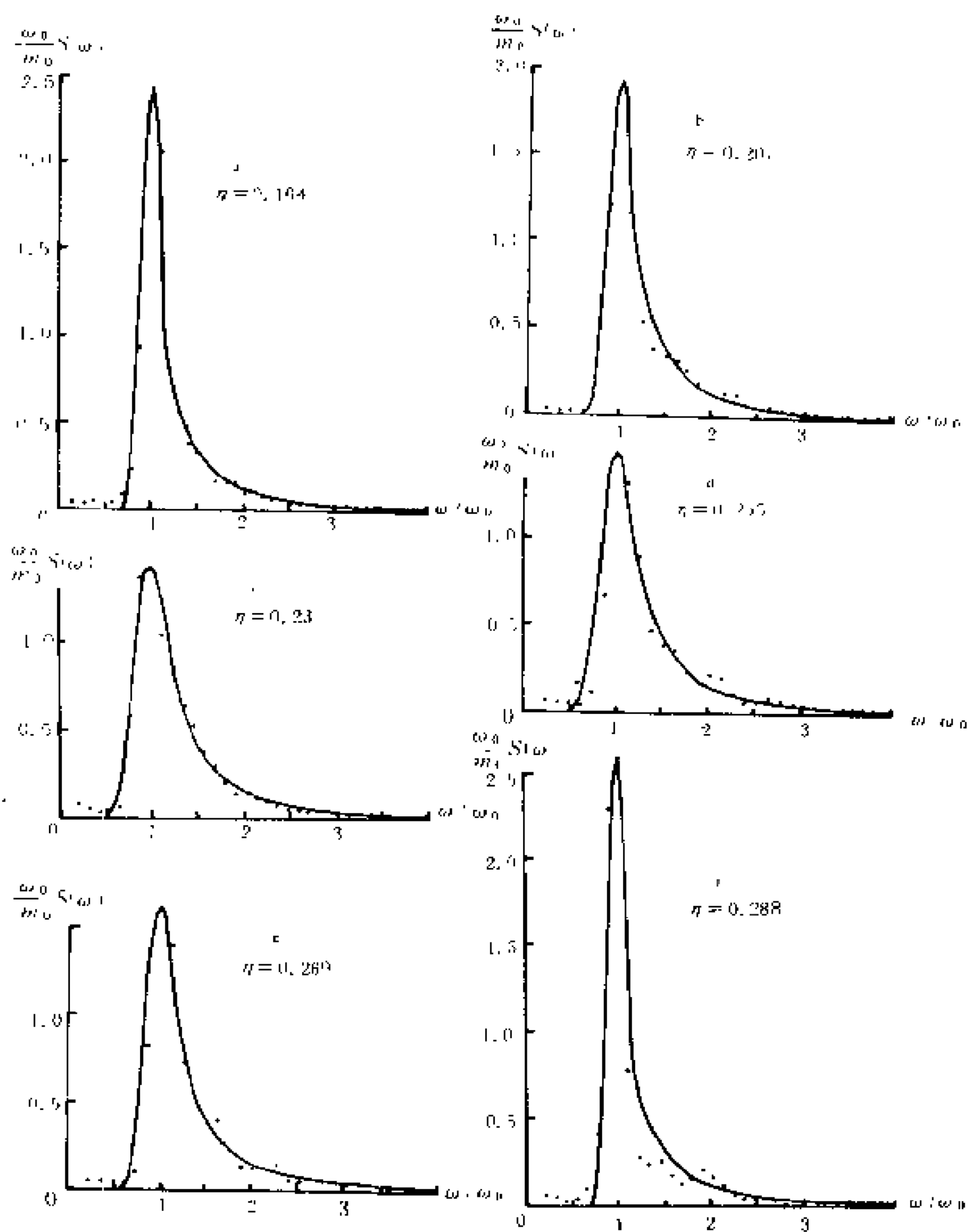


图 6—32　浅水无因次谱的比较　(文圣常等,1990)

观测的符合程度较 JONSWAP 谱的符合程度要高。作为例子，我们引用作者(1990)在黄海和东海的检验结果，分别如图 6—30 和 6—31 所示，以及浅水中的检验结果，如图 6—32 所示。图中黑点代表观测谱，实线代表由文圣常等提出的改进谱，虚线代表 JONSWAP 谱，点划线代表的是以有效波高 $H_{1/3}$和有效波周期 $T_{1/3}$表示的谱。可以看出，实线所代表的改进理论谱符合程度最好，但是点划线所代表的以 $H_{1/3}$和 $T_{1/3}$表示的改进理论谱有的有偏离，这是因为有效波高和周期是观测到的波浪中较高的一部分的平均值，它们有一定的统计可变性，进而 p 值也有一定的可变性，从而产生谱峰的偏高或偏低。如果有效波高和周期本身是可靠的，则所得之谱将是可靠的。

前面讨论的是一维谱的具体形式，下面讨论二维谱的具体形式。到目前为止，提出的方向谱远比能谱少，主要原因是观测方法和资料处理麻烦。

由(6.6—6)式和(6.6—16)式，可以得知能谱和方向谱的关系

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega,\theta)d\theta = S(\omega), \qquad (6.6-48)$$

或者

$$\int_{-\pi}^{\pi} A^2(\omega,\theta)d\theta = A^2(\omega), \qquad (6.6-49)$$

满足上面关系的方向谱可取为

$$A^2(\omega,\theta) = KA^2(\omega)\cos^n\theta \qquad (6.6-50)$$

θ 为组成波方向，风浪组成波能量集中于风向附近，可取 $\theta=0$ 代表风向；K，n 为数值常数。上式的特点是组成波的能量相对于方向的分布是对称的。有些人取与风向成 θ 角方向的波高比例于 $\cos\theta$ (Pierson 等，1955)，并且有人观测证实了波高比例于 $\cos\theta$ (Stewart 等，1980)，因此在谱中应取 $n=2$。应用(6.6—49)式，可以确定出 $K=\dfrac{2}{\pi}$。于是(6.6—50)式可写成

$$A^2(\omega,\theta) = \frac{2}{\pi}A^2(\omega)\cos^2\theta。\qquad (6.6-51)$$

该谱适用于充分成长了的风浪。如果风浪处于发展过程中，能量相对于方向的分布更集中，接近于 $n=3$。风浪处于发展阶段越早，应取的 n 应越大。

另一种是 SWOP 谱，是 Cote 等(1960)分析北大西洋在风速为 7—11m/s、风时作用 14 小时情况下航空摄影记录得到的波数谱，最后化为如下形式

$$\left.\begin{aligned} A^2(\omega,\theta) &= C\frac{\pi}{2}\frac{1}{\omega^6}e^{-2g/\omega^2v^2}\frac{1}{\pi}\{1+[0.50 \\ &+0.82e^{-\omega^4v^4/2g^4}]\cos2\theta+[0.32e^{-\omega^4v^4/2g^4}]\cos4\theta\},|\theta|\leqslant\frac{\pi}{2}, \\ A^2(\omega,\theta) &= 0,|\theta|\geqslant\frac{\pi}{2}。\end{aligned}\right\} \qquad (6.6-52)$$

方向谱还可以表示成

$$S(f,\theta) = S(f)G(f,\theta), \qquad (6.6-53)$$

其中 $f=\frac{\omega}{2\pi}$，$S(f)$ 为能谱，$G(f,\theta)$ 可利用观测资料分析求得。Longuet—Higgins 将 $G(f,\theta)$ 表示成

$$G(f,\theta) = G'(r)\left|\cos\frac{1}{2}\theta\right|^{2r}, \qquad (6.6-54)$$

其中

$$G'(r) = 2^{2r-1}\frac{\Gamma^2(r+1)}{\Gamma(2r+1)}, \qquad (6.6-55)$$

r 为 f 的函数，可将用浮标观测资料求得的谱展成傅氏级数来确定 r。Mitsuyasu 等(1975)利用 1971—1974 年在日本附近用浮标进行的一系列观测，求得 r 与 f 的经验关系

$$\left.\begin{aligned} r &= 11.5\tilde{f}^{-2.5}, \tilde{f} \geqslant \tilde{f}_0 \\ r &= 11.5\tilde{f}_0^{-7.5}\tilde{f}^5, \tilde{f} \leqslant \tilde{f}_0 \end{aligned}\right\} \tag{6.6-56}$$

无因次量

$$\tilde{f} = 2\pi f\frac{U}{g} = \frac{U}{c}, \tag{6.6-57}$$

$$\tilde{f}_0 = 2\pi f_0\frac{U}{g} = \frac{U}{c_0}, \tag{6.6-58}$$

c 为深水组成波波速，下标“0”表示谱峰对应的量，U 为 10m 高处的风速。由(6.6－56)式知，谱峰对应的 r 值为

$$r_0 = 11.5\tilde{f}_0^{-2.5}。 \tag{6.6-59}$$

(6.6—54)式表明，方向谱相对于方向的分布与频率 f 有关，而(6.6—50)式所表示的方向谱相对于方向的分布则与频率无关。

6.6.3 海浪能谱的估计

前一小节给出了几种主要能谱的具体形式，其中有半经验半理论的，例如 Neumann 谱，有利用海浪观测资料通过谱估计方法得到的，例如 PM 谱和 JONSWAP 谱，也有理论谱，例如文圣常等的改进理论谱。谱估计不仅是获得经验海浪谱的有效途径，而且也是检验理论谱和经验谱的重要手段。本小节主要讨论谱分析的基本概念和基本的计算程序。

由(6.6—7)式知，海浪能谱可由协方差求得，即

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R(\tau)\cos\omega\tau d\tau。 \tag{6.6-60}$$

由于海浪可视为具有各态历经性的平稳正态过程，则根据(6.5—1)式，协方程可以用一次现实求得

$$R(\tau) = \frac{1}{T-\tau}\int_0^{T-\tau}\zeta(t)\zeta(t+\tau)dt, \tag{6.6-61}$$

其中 T 为记录时间长度。在实际计算中，通常以某一个适当的时

间间隔$\triangle t$(称为取样间隔)对波剖面记录$\zeta(t)$取样，得一序列

$$\{\zeta(t_i)\}, i = 0,1,2\cdots\cdots N, \qquad (6.6-62)$$

并且有$N\triangle t=T$。于是(6.6—61)式可近似表为求和的形式

$$R(p\triangle t) = \frac{1}{N-p}\sum_{i=1}^{N-p}\zeta(t_i)\zeta(t_i + p\triangle t), \qquad (6.6-63)$$

式中$p\triangle t=\tau, p=0,1,2,\cdots\cdots m$。相应地，海浪能谱可写成

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi}\left[\sum_{p=0}^{m} R(p\triangle t)\cos\omega p\triangle t\right]\triangle t, \qquad (6.6-64)$$

或者用积分梯形公式，可表为

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{2}R(0) + \sum_{p=1}^{m-1} R(p\triangle t)\cos\omega p\triangle t + \frac{1}{2}R(m\triangle t)\cos\omega m\triangle t\right]\triangle t。 \qquad (6.6-65)$$

因此根据序列$\{\zeta(t_i)\}$，利用(6.6—63)式求得协方差，再利用(6.6—64)式或(6.6—65)式可得谱的估计值。

在谱估计中，有几个问题需要说明。

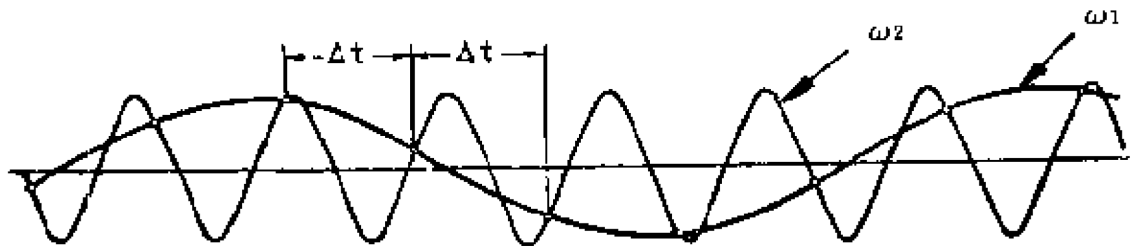


图6—33　离散化产生的折迭现象

首先是取样间隔$\triangle t$的选取问题。由于将波剖面以取样间隔$\triangle t$离散化后，不仅可能失去波面的一部分信息，而且还可能产生Nyquist折迭现象。如前所述，海浪可视为许多随机的正弦波动的叠加，为了说明折迭现象，我们挑选两个频率分别为ω_1和ω_2的振动，并设$\omega_2>\omega_1$。这两个振动随时间的变化曲线如图6—33所示。如果以时间间隔$\triangle t$取样，尽管ω_1和ω_2是两个不同的振动，但连

接取样结果却发现 ω_1 和 ω_2 的振动都表现为 ω_1 的振动，这就是 Nyquist 折迭现象。如果有许多振动，则可以想像，有若干高频振动可能表现为某一个低频振动。若定义 Nyquist 折迭圆频率

$$\omega_N = \frac{\pi}{\triangle t}, \qquad (6.6-66)$$

则振幅分别为 $A,B,C,D,\cdots\cdots$，其频率分别为 $\omega,\omega+2\omega_N,\omega+4\omega_N,\omega+6\omega_N,\cdots\cdots$.的正弦波动叠加可表为

$$Ae^{i\omega k\triangle t} + Be^{i(\omega+2\omega_N)k\triangle t} + Ce^{i(\omega+4\omega_N)k\triangle t} + \cdots\cdots$$
$$= (A+B+C+D+\cdots\cdots)e^{i\omega k\triangle t}, \omega < \omega_N,$$

结果一系列正弦振动表现为频率为 ω 的低频振动。相应的，利用这种取样资料求得谱估计值实际上是一系列正弦波动谱值的合成。但是，如果我们能够找到一个 ω_N，使得 $\omega > \omega_N$ 的波动不出现，或者可忽略地小，则用(6.6—66)式确定的取样间隔

$$\triangle t = \frac{\pi}{\omega_N} \qquad (6.6-67)$$

进行取样时就不会发生 Nyquist 折迭现象。能否找到这样一个 ω_N? 实际海浪的频率 $\bar{\omega}$ 的显著部分集中在一个窄频带内的，因此从波面记录中可以发现，如果大部分振动周期为 8s，而 3s 以下的周期几乎没有，或者振幅很小可以忽略，则大致可以认为内部组成波的周期为 3s 以下的可以忽略，从而 Nyguist 折迭频率可取为 $\omega_N = \frac{2\pi}{3}s^{-1}$，取样间隔取为 $\triangle t = \frac{\pi}{\omega_N} = \frac{3}{2}s$。

第二，波面记录长度 T 的选取问题。T 越长，数据总数 N 越大，计算结果越精确，但是很遗憾，由于海浪过程是准平稳过程，只有在短时间内才可以认为是平稳的，所以记录长度一般取为 10—20min，至多 30min。

第三，延时最大值 $\tau = m\triangle t$，其中 m 如何确定的问题。目前有两种方法确定 m，一是根据谱估计的结果进行选取，这就需要反复地进行，显然是很繁琐的；一是经验的，是许许多多的实践总结出

来的，较好的经验是取 $m \leqslant 0.1N$。

第四，由(6.6—64)式或者(6.6—65)式所得的估计谱需要平滑。通常的情形是估计谱值所连成的谱形曲线参差不齐。这是因为海浪观测记录长度较短，数据总数 N 有限，故依照(6.6—63)式计算协方差 $R(p\triangle t)$时，对于较小的 p，由于乘积 $\zeta(t_i+p\triangle t)\zeta(t_i)$的个数较多，因而 $R(p\triangle t)$的值较可靠，但对于较大的 p，乘积的个数少，$R(p\triangle t)$的值可靠性差。为了提高精度，可以给小 p 所对应的 $R(p\triangle t)$以较大的权，而给较大 p 所对应的 $R(p\triangle t)$以较小的权。具体的做法是在谱计算式中将 $R(p\triangle t)$乘以一种权函数。权函数中常用的一种是

$$\left.\begin{aligned} D(p\triangle t) &= 0.54 + 0.46\cos\frac{\pi p}{m}, p < m, \\ D(p\triangle t) &= 0,\ p > m。\end{aligned}\right\} \quad (6.6-68)$$

由(6.6—64)式加权后的谱估计式可写成

$$\hat{S}(\omega_k) = \frac{2\triangle t}{\pi}\sum_{p=0}^{m} R(p\triangle t)\cos\omega_k p\triangle t(0.46\cos\frac{\pi p}{m} + 0.54),$$

其中 ω_k 是在$[0, \omega_N]$区间内等间隔取$(m+1)$个频率 $\omega_0=0, \omega_1, \omega_2, \cdots\cdots\omega_k, \cdots\cdots\omega_m=\omega_N$ 中的任意一个，上式计算结果为

$$\begin{aligned} \hat{S}(\omega_k) = {} & 0.54\frac{2\triangle t}{\pi}\sum_{p=0}^{m} R(p\triangle t)\cos\omega_k p\triangle t \\ & + 0.23\frac{2\triangle t}{\pi}\sum_{p=0}^{m} R(p\triangle t)\cos(\omega_k p\triangle t + \triangle\omega p\triangle t) \\ & + 0.23\frac{2\triangle t}{\pi}\sum_{p=0}^{m} R(p\triangle t)\cos(\omega_k p\triangle t - \triangle\omega p\triangle t), \end{aligned} \quad (6.6-69)$$

式中$\triangle\omega=\frac{\omega_N}{m}=\frac{\pi}{m\triangle t}$。实际进行谱估计时，使用(6.6—69)式，而不是(6.6—64)式或者(6.6—65)式。

第五，估计谱 $\hat{S}(\omega_k)$的可靠性问题。可以证明随机量

$2Td\hat{S}(\omega)/S(\omega)$服从自由度等于

$$k = 2Td \tag{6.6-70}$$

的 χ^2 分布，其中 $T=N\triangle t$ 为观测长度，d 为权函数 $D(\tau)$的宽度，

$$d = \frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty} D(\tau)d\tau}。 \tag{6.6-71}$$

据此，可以讨论 $\hat{S}(\omega)$的可靠性。这种可靠性可以用置信区间来表示。如果给定一置信度 β(以百分之几的形式表示)，则可由估计谱 $\hat{S}(\omega)$的概率分布确定一上界和下界，使估计谱值落入此区间内的概率为 β。如果随机量 $k\hat{S}(\omega)/S(\omega)$用 $\chi^2(k)$表示，则由给定的置信度 β 可以求出两个正数 a 和 b，使得

$$\left.\begin{aligned} P\{\chi^2(k) \leqslant a\} &= (1-\beta)/2, \\ P\{\chi^2(k) \geqslant b\} &= (1-\beta)/2, \end{aligned}\right\} \tag{6.6-72}$$

从而随机量落入 a 和 b 之间概率为

$$P\{a \leqslant \chi^2(k) \leqslant b\} = \beta。 \tag{6.6-73}$$

(6.6—72)式中的 a 和 b 可利用 χ^2 分布概率表查得。(6.6—73)式可还原为

$$P\{a \leqslant k\hat{S}(\omega)/S(\omega) \leqslant b\} = \beta,$$

或

$$P\{\frac{k}{b}\hat{S}(\omega) \leqslant S(\omega) \leqslant \frac{k}{a}\hat{S}(\omega)\} = \beta \tag{6.6-74}$$

上式表明，对于给定的置信度 β，频率 ω 对应的置信区间为$[\frac{k}{b}\hat{S}(\omega), \frac{k}{a}\hat{S}(\omega)]$。显然，区间越窄，估计值越可信。

除了利用协方差函数 $R(\tau)$作谱估计外，还可以运用周期图进行谱估计。讨论这个问题之前，先引入双侧谱的概念。由(6.6—60)式知，谱表示为

$$S(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau,\ 0 < \omega < \infty。 \tag{6.6-75}$$

能谱也可定义为

$$s(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)\cos\omega\tau d\tau,\ -\infty<\omega<\infty,\tag{6.6-76}$$

$s(\omega)$是关于 $\omega=0$ 对称的，称之为双侧谱，而 $S(\omega)$为单侧谱。对于平稳过程，$R(\tau)$为偶函数，故(6.6－76)式可写成

$$s(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}R(\tau)\cos\omega\tau d\tau,\ 0<\omega<\infty,\tag{6.6-77}$$

由(6.6－75)式和(6.6－77)式可知，

$$S(\omega)=2s(\omega),\ \omega>0,\tag{6.6-78}$$

即对于 $\omega>0$，单侧谱为双侧谱的两倍。由于协方差 $R(\tau)$为偶函数，故双侧谱表示式可写成等价的形式

$$s(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}R(\tau)e^{i\omega\tau}d\tau,-\infty<\omega<\infty。\tag{6.6-79}$$

下面从(6.6－79)式出发讨论运用周期图进行双侧谱的谱估计。现引进如下表达式

$$I_1(\omega)=\frac{\triangle t}{2\pi N}\left|\sum_{n=1}^{N}\zeta_n e^{i\omega n\triangle t}\right|^2,\ |\omega|<\frac{\pi}{\triangle t}=\omega_N,\tag{6.6-80}$$

又双侧谱的离散化形式为

$$\hat{s}(\omega)=\frac{\triangle t}{2\pi}\sum_{n=-(N-1)}^{N-1}R(n\triangle t)e^{i\omega n\triangle t},\ |\omega|<\frac{\pi}{\triangle t},\tag{6.6-81}$$

因为

$$\frac{\triangle t}{2\pi N}\left|\sum_{n=1}^{N}\zeta_n e^{i\omega n\triangle t}\right|^2$$

$$=\frac{\triangle t}{2\pi N}\left(\sum_{n=1}^{N}\zeta_n e^{i\omega n\triangle t}\right)\left(\sum_{m=1}^{N}\zeta_m e^{-i\omega m\triangle t}\right)$$

$$= \frac{\triangle t}{2\pi N}\sum_{n=1}^{N}\sum_{m=1}^{N}\zeta_n\zeta_m e^{i(n-m)\omega\triangle t}$$

$$= \frac{\triangle t}{2\pi}\sum_{p=-(N-1)}^{N-1} R(p\triangle t)e^{i\omega p\triangle t},$$

于是有

$$\hat{s}(\omega) = I_1(\omega) = \frac{\triangle t}{2\pi N}\left|\sum_{n=1}^{N}\zeta_n e^{i\omega n\triangle t}\right|^2。\qquad (6.6-82)$$

按习惯做法，引进新的时间比尺 $t'=t/\triangle t$，相应地有 $\triangle t'=\triangle t/\triangle t=1$，新频率比尺 $\omega'=\omega\triangle t$，因而(6.6—82)式可写成

$$\hat{s}\left(\frac{\omega'}{\triangle t}\right) = \triangle t\left\{\frac{\triangle t'}{2\pi N}\left|\sum_{n=1}^{N}\zeta_n e^{i\omega' n\triangle t'}\right|^2\right\}。|\omega'|<\pi,$$

上式可记为

$$\hat{s}\left(\frac{\omega'}{\triangle t}\right) = \triangle t I(\omega'),\ |\omega'|<\pi,\qquad (6.6-83)$$

其中

$$I(\omega') = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{n=1}^{N}\zeta_n e^{i\omega' n}\right|^2,\qquad (6.6-84)$$

称为周期图。(6.6—83)式表明，原过程 $\zeta(t)$ 的双侧谱的估计转变为周期图的计算。为了计算 $I(\omega')$ 的离散值，取

$$\omega'_r = \frac{2\pi r}{N},\qquad (6.6-85)$$

其中 r 为整数，$0\leqslant r<\frac{N}{2}$。于是由(6.6—84)式可得

$$I\left(\frac{2\pi r}{N}\right) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{n=1}^{N}\zeta_n e^{i\frac{2\pi r}{N}n}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{n=1}^{N}\zeta_n e^{i\frac{2\pi r}{N}(n-1)}\cdot e^{i\frac{2\pi r}{N}}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{n=1}^{N}\zeta_n e^{i\frac{2\pi r}{N}(n-1)}\right|^2。\qquad (6.6-86)$$

将资料序列 $\{\zeta_n\}$ 的编号加以调整，令

$$\zeta_n = x_{n-1} \qquad (6.6\text{-}87)$$

(6.6—85)式可写成

$$I(\frac{2\pi r}{N}) = \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{n=1}^{N} x_{n-1} e^{i\frac{2\pi r}{N}(n-1)}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi N}\left|\sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{i\frac{2\pi r}{N}k}\right|^2$$

$$= \frac{1}{2\pi N}|A_r|^2, r = 0,1,2,\cdots\cdots \frac{N}{2}, \quad (6.6-88)$$

其中

$$A_r = \sum_{k=0}^{N-1} x_k e^{i\frac{2\pi r}{N}k} \qquad (6.6-89)$$

为离散傅氏变换。因此,以周期图作双侧谱谱估计的问题,转变为对波面 ζ 进行离散傅氏变换。(6.6—88)式给出了 $0<\omega'<\pi$ 之间的 $I(\omega')$ 之值,利用双侧谱的对称性,可得 $-\pi<\omega'<0$ 之间的相应值。最后,由关系式(6.6—83)可得原过程 $\zeta(t)$ 的双侧谱的估计值

$$\left.\begin{aligned}&\hat{s}(\omega_r) = \triangle t I(\omega'_r),\\&\omega_r = \frac{2\pi r}{N\triangle t},\ \omega'_r = \frac{2\pi r}{N},\ r = 0,1,2,\cdots\cdots \frac{N}{2}。\end{aligned}\right\}$$

$$(6.6-90)$$

6.6.4 方向谱的确定

在 6.6.2 小节我们介绍了几种方向谱的具体形式,其中以 Neumann 谱为基础导出的方向谱虽然已在实际予报工作中得到应用,但在理论依据或精确程度方面仍很不完备。SWOP 谱是利用航空摄影记录分析求得的。目前,利用观测资料进行谱分析是一种获得方向谱的重要手段。由于获取资料的方法不同,因此具体的分析方法也不相同。本小节主要介绍利用航空立体摄影记录,自由浮标记录和仪器列阵记录的谱分析方法。

首先,讨论利用航空立体摄影记录的方法。如前所述,定点的

观测记录，只能了解海浪的频率结构，为了了解海浪内部的方向结构，必须利用范围充分大的平面上的波面记录。航空立体摄影可以提供资料，即由它获得的某一时刻的波面 $\zeta(x,y)$。

由于分析某一时刻波面 $\zeta(x,y)$，其相关函数可由(6.6—17)式在其中令 $\tau=0$ 得到

$$R(\xi,\eta)=\int_0^\infty\int_0^\infty S(l,m)\cos(l\xi+m\eta)dldm。\quad(6.6-91)$$

由傅氏变换可得

$$S(l,m)=\frac{4}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty R(\xi,\eta)\cos(l\xi+m\eta)d\xi d\eta,$$

(6.6—92)

其中的相关函数可由记录 $\zeta(x,y)$ 计算

$$R(\xi,\eta)=E[\zeta(x+\xi,y+\eta)\zeta(x,y)]。\quad(6.6-93)$$

SWOP 谱就是根据(6.6—92)式得到的。但是这种用傅氏变换的方法计算量太大，很难得到普遍应用。下面介绍一种利用航空立体摄影记录确定方向谱的“过滤法”(Крылов，1966)。

设范围充分大的海面上的波面可表为

$$\zeta(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{S(l_i,m_j)\triangle l\triangle m}\cos(l_ix+m_jy+\varepsilon_{ij}),$$

(6.6—94)

其中 $S(l,m)$ 为以波数表示的二维谱，ε_{ij} 为随机位相。对于所有沿 x 方向传播的组成波，其波数为 l，而 $m=0$，因此沿 x 方向的一维波数谱为 $S(l,0)$。

另外，如果沿平行于 x 轴的方向取 $2N+1$ 个铅直平面，于正、负 y 轴上各取 N 个，相邻两平面之间的距离为 $\triangle y$。这些铅直平面与海表面相交处呈现的波剖面为

$$\zeta(x,s\triangle y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{S(l_i,m_j)\triangle l\triangle m}\cos(l_ix+m_js\triangle y+\varepsilon_{ij}),$$

(6.6—95)

$$s = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots \pm N。$$

将这些波剖面沿 y 方向求平均，得平均波面

$$\bar{\zeta}(x) = \frac{1}{2N+1}\sum_{s=-N}^{N}\zeta(x, s\triangle y), \qquad (6.6-96)$$

将(6.6—95)式代入上式，经简单运算后可得

$$\bar{\zeta}(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{N}\sqrt{S(l_i, m_j)\triangle l\triangle m}$$

$$\times \frac{\sin[(N+\frac{1}{2})m_j\triangle y]}{(2N+1)\sin(\frac{1}{2}m_j\triangle y)}\cos(l_i x + \varepsilon_{ij})。\quad (6.6-97)$$

令

$$F(m_j\triangle y; N) = \left\{\frac{\sin[(N+\frac{1}{2})m_j\triangle y]}{(2N+1)\sin(\frac{1}{2}m_j\triangle y)}\right\}^2, \qquad (6.6-98)$$

于是(6.6—97)式可写成

$$\bar{\zeta}(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sqrt{S(l_i, m_j)F(m_j\triangle y; N)\triangle l\triangle m}$$

$$\times \cos(l_i x + \varepsilon_{ij}), \qquad (6.6-99)$$

函数 $F(m_j\triangle y; N)$称为滤波器。

设过程 $\bar{\zeta}(x)$的谱以 $S(l)$表示，由(6.6—99)式的结构可以看出

$$S(l) = \int_{-\infty}^{\infty} S(l, m)F(m\triangle y; N)dm。\qquad (6.6-100)$$

只要滤波器 $F(m\triangle y; N)$在 $m=0$ 附近具有显著之值，而在其它处其值可以忽略不计，它就可以把 $S(l, m)$中沿 x 轴方向($m=0$ 附近)的组成波的贡献保留下来，而将其它方向的组成波的贡献过滤掉。

为了使函数 $F(m\triangle y; N)$具有这种功能，可适当地选取$\triangle y$ 和

N。由(6.6—98)式可知，F为偶函数，它相对于m有一系列使得$F=1$的主极大值，而在相邻的两个主极大值之间又有一些次要的极大值。其中第一和第二个主极大值条件

$$\frac{1}{2}m\triangle y = 0, \pi,$$

对于第二个主极大值

$$m = 2\pi/\triangle y。\qquad (6.6-101)$$

合成波数$k=\sqrt{l^2+m^2}$，在实际海浪中总存在一个波数$\hat{k}$的上界$\hat{k}_{max}$，超过这个波数的波浪的能量可以忽略。对于组成波来说，也应存在一个波数的上界k_{max}，在应用中可取$k_{max}\simeq\hat{k}_{max}$。于是(6.6—101)式可近似表为

$$\triangle y \simeq \frac{2\pi}{k_{max}} = \lambda_{min}。\qquad (6.6-102)$$

因此，如$\triangle y$的选取满足(6.6—102)式时，在F的第二个主极大值出现处所对应的$S(l,m)$之值已是小得可以忽略不计，也就是说，当选取$\triangle y=\lambda_{min}$时，只有$F$的第一个主极大值($m=0$附近)起作用。此外，还希望$F$只在$m=0$附近的极小范围内才具有显著值，这样就可以把沿$x$方向($m=0$)附近的组成波保留下来。由(6.6—98)式可以看出，F相对于m有一系列零值，第一个零值所对应的m值为

$$m = \frac{\pi}{(N+\frac{1}{2})\triangle y},$$

从而滤波器的宽度为

$$\triangle m = \frac{2\pi}{(N+\frac{1}{2})\triangle y}$$

$$= \frac{2\pi}{(N+\frac{1}{2})\lambda_{min}} = \frac{k_{max}}{(N+\frac{1}{2})}。\qquad (6.6-103)$$

显然，$\triangle m$ 随 N 的增加而变小。若$\triangle m$ 充分小，在$\triangle m$ 范围内的谱值可近似地视为常值。通常取$\triangle m=0.02—0.04\mathrm{m}^{-1}$，以确定 N 值。

由于 $m\triangle y$ 之值不大，而 N 值很大，因而(6.6—98)式的滤波器可化为

$$F(m\triangle y;N)=\frac{\sin^2[(N+\frac{1}{2})m\triangle y]}{[(N+\frac{1}{2})m\triangle y]^2}。\qquad(6.6-104)$$

又根据滤波器的功能，F 只在 $m=0$ 附近很小范围内具有显著值，因而(6.6—100)式可表为

$$S(l)=\int_{-\infty}^{\infty}S(l,m)F(m\triangle y;N)dm\simeq\int_{-\infty}^{\infty}S(l,0)F(m\triangle y;N)dm,$$

$$(6.6-105)$$

将(6.6—104)式代入(6.6—105)式，经计算得

$$S(l)=\frac{2\pi}{(2N+1)\triangle y}S(l,0)。\qquad(6.6-106)$$

由于 $S(l)$为平均波面 $\bar{\zeta}(x)$对应的一维谱，可以通过谱估计求得，于是沿 x 方向的波数谱便可求得

$$S(l,0)=\frac{(2N+1)\triangle y}{2\pi}S(l)。\qquad(6.6-107)$$

将 x 轴依次指向其它不同的方向，利用上述同样的步骤便可得到不同方向的一维谱，结果海浪相对于不同波数和方向(从而频率和方向)的结构便确定了。

其次讨论依据自由浮标记录确定方向谱的方法。这种谱分析的方法是将方向谱 $S(\omega,\theta)$相对于 θ 展成傅氏级数，通过自由浮标记录确定傅氏级数的系数。

自由浮标在测波面高度的同时，还用浮子测定波面梯度的两个分量，它们可表为

$$\zeta(x,y,t)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sqrt{2S(\omega_i,\theta_j)\triangle\omega\triangle\theta}\times$$

$$\cos\left[\frac{\omega_i^2}{g}(x\cos\theta_j + y\sin\theta_j) - \omega_i t + \varepsilon_{ij}\right], \quad (6.6-108)$$

$$\zeta_x(x,y,t) = -\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k}\sqrt{2S(\omega_i,\theta_j)\triangle\omega\triangle\theta}\,\frac{\omega_i^2}{g}\cos\theta_j \times$$
$$\sin\left[\frac{\omega_i^2}{g}(x\cos\theta_j + y\sin\theta_j) - \omega_i t + \varepsilon_{ij}\right], \quad (6.6-109)$$

$$\zeta_y(x,y,t) = \zeta_x(x,y,t)\tan\theta_j。 \quad (6.6-110)$$

对于小浮标，可以近似认为 x,y 为固定值，并取为 0，于是以上三式可简记为

$$\left.\begin{aligned}\zeta(t) &= \zeta(x,y,t)\big|_{x=y=0},\\ \zeta_x(t) &= \zeta_x(x,y,t)\big|_{x=y=0},\\ \zeta_y(t) &= \zeta_y(x,y,t)\big|_{x=y=0}。\end{aligned}\right\} \quad (6.6-111)$$

由(6.6-111)式，协方差和交叉协方差可表为

$$R_x(\tau) = E[\zeta_x(t+\tau)\zeta(t)],$$

$$R_y(\tau) = E[\zeta_y(t+\tau)\zeta(t)],$$

$$R_{xx}(\tau) = E[\zeta_x(t+\tau)\zeta_x(t)],$$

$$R_{yy}(\tau) = E[\zeta_y(t+\tau)\zeta_y(t)],$$

$$R_{xy}(\tau) = E[\zeta_x(t)\zeta_y(t+\tau)]。$$

以上各式的计算结果可写成积分形式

$$\left.\begin{aligned}
R_x(\tau) &= \int_0^\infty\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\omega^2}{g}\cos\theta S(\omega,\theta)d\theta\right]\sin\omega\tau d\omega,\\
R_y(\tau) &= \int_0^\infty\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\omega^2}{g}\sin\theta S(\omega,\theta)d\theta\right]\sin\omega\tau d\omega,\\
R_{xx}(\tau) &= \int_0^\infty\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\omega^4}{g^2}\cos^2\theta S(\omega,\theta)d\theta\right]\cos\omega\tau d\omega,\\
R_{yy}(\tau) &= \int_0^\infty\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\omega^4}{g^2}\sin^2\theta S(\omega,\theta)d\theta\right]\cos\omega\tau d\omega,\\
R_{xy}(\tau) &= \int_0^\infty\left[\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\omega^4}{2g^2}\sin 2\theta S(\omega,\theta)d\theta\right]\cos\omega\tau d\omega。
\end{aligned}\right\}$$

(6.6－112)

上式中的各式经傅氏变换得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{g}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega,\theta)\cos\theta d\theta &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R_x(\tau)\sin\omega\tau d\tau,\\
\frac{\omega^2}{g}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega,\theta)\sin\theta d\theta &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R_y(\tau)\sin\omega\tau d\tau,\\
\frac{\omega^4}{g^2}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega,\theta)\cos^2\theta d\theta &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R_{xx}(\tau)\cos\omega\tau d\tau,\\
\frac{\omega^4}{g^2}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega,\theta)\sin^2\theta d\theta &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R_{yy}(\tau)\cos\omega\tau d\tau,\\
\frac{\omega^4}{2g^2}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega,\theta)\sin 2\theta d\theta &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty R_{xy}(\tau)\cos\omega\tau d\tau。
\end{aligned}\right\}$$

(6.6－113)

有了(6.6－113)式以后，再将 $S(\omega,\theta)$ 展成傅氏级数，并只取前几项

$$S(\omega,\theta) = \frac{1}{2}a_0 + a_1\cos\theta + b_1\sin\theta + a_2\cos 2\theta + b_2\sin 2\theta,$$

其中系数

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega,\theta)d\theta \qquad (6.6-114)$$

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega,\theta)\cos\theta d\theta,\\
b_1 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega,\theta)\sin\theta d\theta,\\
a_2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega,\theta)\cos 2\theta d\theta,\\
b_2 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega,\theta)\sin 2\theta d\theta。
\end{aligned}\right\} \tag{6.6-115}
$$

a_0 比较容易确定

$$
a_0 = \frac{1}{\pi}S(\omega) = \frac{2}{\pi^2}\int_0^{\infty} R(\tau)\cos\omega\tau d\tau。 \tag{6.6-116}
$$

将(6.6—113)式代入(6.6—115)式，得

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 &= \frac{2g}{\pi^2\omega^2}\int_0^{\infty} R_x(\tau)\sin\omega\tau d\tau,\\
b_1 &= \frac{2g}{\pi^2\omega^2}\int_0^{\infty} R_y(\tau)\sin\omega\tau d\tau,\\
a_2 &= \frac{2g^2}{\pi^2\omega^4}\int_0^{\infty} [R_{xx}(\tau)-R_{yy}(\tau)]\cos\omega\tau d\tau,\\
b_2 &= \frac{4g^2}{\pi^2\omega^4}\int_0^{\infty} R_{xy}(\tau)\cos\omega\tau d\tau。
\end{aligned}\right\} \tag{6.6-117}
$$

因此，只要根据自由浮标的记录$\zeta(t)$以及$\zeta_x(t)$和$\zeta_y(t)$计算出协方差和交叉协方差，便可由(6.6—116)和(6.6—117)式确定谱展式的系数，从而最终确定谱估计值。

最后，讨论应用仪器列阵记录进行方向谱谱估计的方法。记录是由若干测头同步取得的，这种方法是由每一对测头的同步记录计算出交叉谱，再由多数的交叉谱估计出海浪的方向谱。

设一对测头的空间位置为(x,y)，$(x+\xi,y+\eta)$，所得的同步记录为$\zeta(x,y,t)$和$\zeta(x+\xi,y+\eta,t)$，由它们计算交叉协方差函数

$$
R(\xi,\eta,\tau) = E[\zeta(x,y,t)\zeta(x+\xi,y+\eta,t+\tau)]。 \tag{6.6-118}
$$

作变换

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(\xi,\eta,\tau)e^{-i\omega\tau}d\tau = c(\xi,\eta,\omega) - iq(\xi,\eta,\omega),$$

(6.6 — 119)

其中

$$\left.\begin{aligned} c(\xi,\eta,\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi,\eta,\tau)\cos\omega\tau d\tau, \\ q(\xi,\eta,\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} R(\xi,\eta,\tau)\sin\omega\tau d\tau, \end{aligned}\right\} \quad (6.6-120)$$

$c(\xi,\eta,\omega)-iq(\xi,\eta,\omega)$为交叉谱，$c(\xi,\eta,\omega)$为同相谱，$q(\xi,\eta,\omega)$为异相谱。

对(6.6—119)式作逆变换，有

$$R(\xi,\eta,\tau) = \int_0^{\infty} c(\xi,\eta,\omega)\cos\omega\tau d\omega + \int_0^{\infty} q(\xi,\eta,\omega)\sin\omega\tau d\omega,$$

(6.6 — 121)

又根据(6.6—16)式，交叉协方差函数可表为

$$R(\xi,\eta,\tau) = \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} S(\omega,\theta)\cos\left[\frac{\omega^2}{g}\xi\cos\theta + \frac{\omega^2}{g}\eta\sin\theta - \omega\tau\right]d\omega d\theta,$$

故而同相谱和异向谱又可表为

$$\left.\begin{aligned} c(\xi,\eta,\omega) &= \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega,\theta)\cos\left(\frac{\omega^2}{g}\xi\cos\theta + \frac{\omega^2}{g}\eta\sin\theta\right)d\theta, \\ q(\xi,\eta,\omega) &= \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega,\theta)\sin\left(\frac{\omega^2}{g}\xi\cos\theta + \frac{\omega^2}{g}\eta\sin\theta\right)d\theta。 \end{aligned}\right\}$$

(6.6 — 122)

由(6.6—122)式可得

$$c(\xi,\eta,\omega) + iq(\xi,\eta,\omega) = \int_{-\pi}^{\pi} S(\omega,\theta)e^{i\frac{\omega^2}{g}(\xi\cos\theta+\eta\sin\theta)}d\theta。$$

(6.6 — 123)

设任一对测头之间的距离以 D 表示，两点连线与 x 轴的夹角为 β，于是(6.6—123)式可表为

$$c(\xi,\eta,\omega)+iq(\xi,\eta,\omega)=\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega,\theta)e^{i\omega^2 D\cos(\theta-\beta)/g}d\theta_{\circ}$$

(6.6 — 124)

将方向谱以相对于 θ 的级数表示

$$S(\omega,\theta)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta),$$

(6.6 — 125)

上式代入(6.6—124)式得

$$\begin{aligned}c(\xi,\eta,\omega)+iq(\xi,\eta,\omega)&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a_0e^{i\frac{\omega^2}{g}D\cos(\theta-\beta)}d\theta\\&+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{N}a_n\cos n\theta e^{i\frac{\omega^2}{g}D\cos(\theta-\beta)}d\theta\\&+\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{n=1}^{N}b_n\sin n\theta e^{i\frac{\omega^2}{g}D\cos(\theta-\beta)}d\theta_{\circ}\end{aligned}\qquad(6.6-126)$$

作置换 $\tau=\theta-\beta$,则(6.6—126)式变成

$$\begin{aligned}c(\xi,\eta,\omega)+iq(\xi,\eta,\omega)&=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2}a_0e^{i\frac{\omega^2}{g}D\cos\tau}d\tau\\&+\sum_{n=1}^{N}(a_n\cos n\beta+b_n\sin n\beta)\int_{-\pi}^{\pi}\cos n\tau e^{i\frac{\omega^2}{g}D\cos\tau}d\tau\\&+\sum_{n=1}^{N}(-a_n\sin n\beta+b_n\cos n\beta)\int_{-\pi}^{\pi}\sin n\tau e^{i\frac{\omega^2}{g}D\cos\tau}d\tau_{\circ}\end{aligned}$$

(6.6 — 127)

根据公式

$$2\pi i^nJ_n(z)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\cos\tau}\cos n\tau d\tau,$$

$$0=\int_{-\pi}^{\pi}e^{iz\cos\tau}\sin n\tau d\tau,$$

于是(6.6—127)式可表示成

$$\begin{aligned}c(\xi,\eta,\omega)+iq(\xi,\eta,\omega)&=\pi a_0J_0(kD)+2\pi\sum_{n=1}^{N}i^nJ_n(kD)\\&\times(a_n\cos n\beta+b_n\sin n\beta)_{\circ}\end{aligned}\qquad(6.6-128)$$

其中$k=\frac{\omega^2}{g}$。上式右边的c和q由每对测头记录求得，为已知，而右边共有$2N+1$个傅氏级数的系数a_0，a_n和b_n，其中a_0可表为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega,\theta)d\theta=\frac{1}{\pi}S(\omega)。$$

因此a_0可根据测头记录进行能谱估计后求得；其余的N对未知数(a_n,b_n)则需要N对测头记录求得交叉谱$c(\xi,\eta,\omega)-iq(\xi,\eta,\omega)$，建立联立方程组求解。但是在实际应用中，考虑到观测资料的统计可变性，应使方程个数大于未知量的个数，以最小二乘法求解。

6.6.5 海浪谱在海浪要素计算中的应用

海浪谱是海浪内部结构的描述，本小节将讨论如何根据海浪谱计算对外表现出来的海浪要素。

首先讨论波高的计算。根据前面规定，$\bar{a}$表示由观测得到的海浪振幅的平均值。由(6.5—14)式知，$\bar{a}$和均方差σ之间的关系为

$$\sigma=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\bar{a}。$$

将平均波高$\overline{H}=2\bar{a}$代入上式，得

$$\overline{H}=\sqrt{2\pi\sigma^2}=\sqrt{\pi E}=1.77\sqrt{E},\quad(6.6-129)$$

其中E根据谱式确定，即

$$E=2\sigma^2=2\int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}S(\omega,\theta)d\omega d\theta=2\int_0^{\infty}S(\omega)d\omega。\quad(6.6-130)$$

另外，根据§6.5中所得到的均方根波高H_{rms}，某累积率所对应的波高H_F以及部分大波平均波高H_P与平均波高的关系式，也可以将这些波高与σ^2联系起来。例如，由(6.5—34)式可得有代表性的部分大波平均波高

$$\left.\begin{aligned}H_{1/3}&=1.596\overline{H}=2.83\sqrt{E},\\H_{1/10}&=2.032\overline{H}=3.60\sqrt{E}。\end{aligned}\right\}\quad(6.6-131)$$

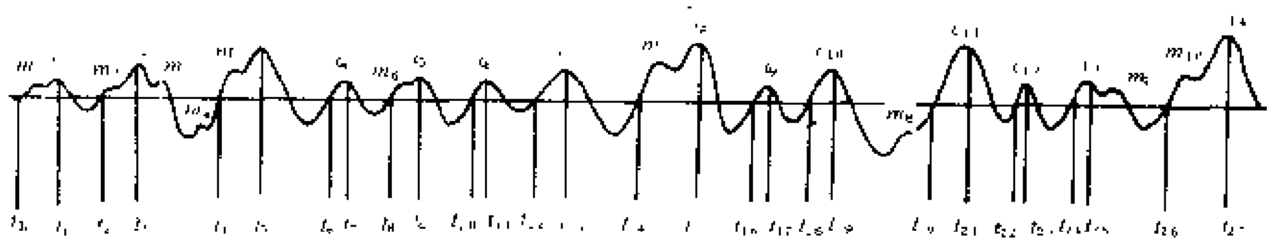


图 6—34　海浪记录曲线

其次讨论周期的计算。如图 6—34 所示，为固定地点的海浪记录，其中横坐标代表时间，也代表平均线。记录曲线由下向上跨过平均线之点称为上跨零点，由上向下跨过平均线之点称为下跨零点，相邻的上跨及下跨零点间的曲线的最高点称为峰，并以 C 表示，而出现峰值的时刻和上跨零点的时刻分别注有奇数下标和偶数下标。图中除了 14 个峰之外，还有 10 个极值，以 m 表示。

前面曾将海浪周期定义为相邻两波峰相继经过一固定地点所经历的时间间隔。据这种定义，平均周期相当于相邻两个峰之间的时间间隔的平均值，若以 $\overline{T}^*$ 表示，则

$$\overline{T}^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_{2i+1}-t_{2i-1}) = \frac{t_{2n+1}-t_1}{n}, \quad (6.6-132)$$

可是，在对海浪 记录进行统计分析时，常常根据相邻上跨零点的时间间隔定义周期，若以 $\overline{T}$ 表示，可得

$$\overline{T} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(t_{2i}-t_{2i-2}) = \frac{t_{2n}-t_0}{n}, \quad (6.6-133)$$

由以上两式，容易得到

$$\overline{T}^* = \overline{T} + \frac{t_{2n+1}-t_{2n}}{n} - \frac{t_1-t_0}{n}$$

当 n 充分大时，可取

$$\overline{T}^* = \overline{T}, \quad (6.6-134)$$

这说明，在应用中这两种定义的平均周期是一致的。

可以证明，平均周期 $\overline{T}$ 可根据谱用下面的形式确定

$$\overline{T} = 2\pi\left[\frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty} S(\omega,\theta)d\theta d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty} \sigma^2 S(\omega,\theta)d\theta d\omega}\right]^{1/2}$$

$$= 2\pi\left[\frac{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty} A^2(\omega,\theta)d\theta d\omega}{\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\infty} \sigma^2 A^2(\omega,\theta)d\theta d\omega}\right]^{1/2}$$

$$= 2\pi\left[\frac{\int_{0}^{\infty} A^2(\omega)d\omega}{\int_{0}^{\infty} \sigma^2 A^2(\omega)d\omega}\right]^{1/2}。 \qquad (6.6-135)$$

作为例子，将 Neumann 谱代入得

$$\overline{T} = \sqrt{3}\,\pi\frac{U}{g}。 \qquad (6.6-136)$$

Neumann 谱有一极大值，其对应的频率为

$$\omega_{max} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{g}{U},$$

由此求得周期

$$T_{max} = \frac{2\pi}{\sigma_{max}} = \sqrt{6}\,\pi\frac{U}{g}, \qquad (6.6-137)$$

由以上两式可得比值

$$\frac{T_{max}}{\overline{T}} = \sqrt{2} = 1.412。 \qquad (6.6-138)$$

上式表明，谱极大值对应的周期和海浪对外表现的平均周期之间有一定关系。这是对充分成长情况下的比值。但此值可能偏大，根据实际观测，此比值约为 1.2，而且随风浪发展阶段的变化不大。

下面讨论波长的计算。海浪虽然由各方向的组成波构成，但在风作用下，对谱贡献大的组成波是沿风的方向传播的。设沿风向取

一铅直平面，于某一固定时刻出现在这个平面上的波面形状也和图 6—34 相类似，只不过图中的横坐标表示距离，而不是时间。将此波面上相邻两上跨零点的距离定义为波长 λ，其平均值 $\bar{\lambda}$ 经推导可得与谱的关系

$$\bar{\lambda} = 2\pi \left[\frac{\int_0^\infty A^2(k_0) dk_0}{\int_0^\infty k_0^2 A^2(k_0) dk_0} \right]^{1/2} 。 \tag{6.6-139}$$

其中

$$k_0 = \frac{\omega^2}{g} \cos\theta, \tag{6.6-140}$$

为组成波的波数沿 x 轴（主方向）的分量。作为例子，先将(6.6—51)式的变量 ω,θ 转换成 k_0,θ 后，再对 θ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 积分，结果得

$$A^2(k_0) = \frac{C}{\pi g^{5/2} k_0^{7/2}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos\theta)^{9/2} e^{-2g\cos\theta/k_0 U^2} d\theta, \tag{6.6-141}$$

将上式代入(6.6—139)式得

$$\bar{\lambda} = \frac{\pi}{g} U^2 。 \tag{6.6-142}$$

由(6.6—136)式和(6.6—142)式求得

$$\bar{\lambda} = \frac{g}{3\pi} \bar{T}^2 = \frac{2}{3} \left(\frac{g}{2\pi} \bar{T}^2 \right) 。 \tag{6.6-143}$$

这是海浪平均波长和平均周期的关系，显然它与正弦波理论得到的波长与周期的关系 $\lambda = \frac{g}{2\pi} T$ 不同，在形式上差一个因子 $\frac{2}{3}$。实际观测表明，(6.6—143)式是符合实际的。

第七章　潮波

潮波是天体引潮力所引起的海水运动。与海浪在海面此起彼伏的景象不同，潮波波面起伏缓慢，波峰波谷难辨。当在固定地点进行观测时，就会发现海面有每天一次或每天两次的周期性升降现象和伴随着的海水水平流动，前者称之为潮汐，后者称之为潮流。一般说来，潮波波面的升降速度约为 10^{-5}—10^{-4}m/s，而潮流速度可达 10^{-2}—1m/s。因此，潮波运动中，海水质点的水平速度远大于它的铅直速度。众多的定点观测表明，潮汐的变化与月球和太阳相对于地球的位置有关，潮流也是如此，反映了月球引潮力和太阳引潮力在形成海洋潮波中起着主要作用，而其它天体的引潮力相对地可以忽略不计。另一方面，潮流现象要比潮汐现象复杂得多：在一个周期里，潮流的大小和方向都不断发生变化，形成一种左旋或者右旋的旋转流。比较不同地点的潮汐观测可以发现，潮汐振幅和初位相因地而异，其中初位相随距离缓慢的变化反映了潮波运动的大尺度性质。最近几十年里，利用流体动力学基本方程求数值解的许多结果表明，海洋中的潮波形状是很复杂的，不同的海区形状和海底地形对应着完全不同的潮波型式。由此可见，海洋中的潮波是海水在天体引潮力驱动下受具体的海洋地理环境和地球自转影响的结果。

由于历史上的原因，潮汐理论有两种，一是潮汐静力学理论（平衡潮理论），一是潮汐动力学理论。1687 年牛顿提出了万有引力定律，解决了产生潮波运动的原动力——引潮力的问题。但他当时却把原等于动力学的问题当成静力学的问题来处理，建立了平衡潮理论。尽管如此，平衡潮理论所包含的许多概念，比如潮汐椭

球的概念，分潮的概念，调和常数的概念等，都有助于人们理解实际海洋中的部分潮汐现象。尤其是调和常数，它至今仍是潮汐和潮流预报的依据。直到 1775—1776 年，差不多一个世纪后，拉普拉斯才提出潮汐动力学理论，将全球大洋中的潮波看成是在月球和太阳引潮力作用下的强迫波动。此后，经许多科学家的努力探索，使得人们对实际海洋中的潮波运动规律有了一些认识，用以说明一些由静力学理论所不能解释的现象。求流体动力学方程的解析解，只有限于一些简单几何形状的理想海区才能获得，并且只能定性地说明一些实际现象，而不能够给出实际海洋中潮波分布规律。为了得到具体海区中的潮波运动特征，可以求流体动力学基本方程的数值解。

§7.1 平衡潮理论

7.1.1 天体引潮力的主要部分

由 §4.1 的(4.1—6)式和(4.1—7)式知，月球和太阳的引潮势为

$$\Omega_M = -\mu_0 M\left(\frac{1}{L} - \frac{1}{D} - \frac{r}{D^2}\cos\theta\right), \qquad (7.1-1)$$

$$\Omega_S = -\mu_0 S\left(\frac{1}{L_1} - \frac{1}{D_1} - \frac{r}{D_1^2}\cos\theta_1\right), \qquad (7.1-2)$$

其中 M，S 分别为月球和太阳的质量，D，D_1 分别为月球中心到地球中心的距离和太阳中心到地球中心的距离，L，L_1 分别为地球上任意一点到月球中心的距离和到太阳中心的距离，θ，θ_1 分别为月球天顶距和太阳天顶距。下面以月球引潮势为例进行讨论。

(7.1—1)式中包含变量 r，θ，D 和 L，由图 4—1 知，L 可用 D，r

和 θ 三个变量表示

$$L^2 = D^2 + r^2 - 2Dr\cos\theta$$

或

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{D}[1 - 2(\frac{r}{D})\cos\theta + (\frac{r}{D})^2]^{1/2}。$$

由于 $r \ll D$，由二项式展开，上式可表为

$$\frac{1}{L} = \frac{1}{D}\{1 - \frac{1}{2}[(\frac{r}{D})^2 - 2(\frac{r}{D})\cos\theta]$$

$$+ \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}[(\frac{r}{D})^2 - 2(\frac{r}{D})\cos\theta]^2$$

$$- \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2}[(\frac{r}{D})^2 - 2(\frac{r}{D})\cos\theta]^3 + \cdots\cdots\}$$

$$= \frac{1}{D}\{1 + \frac{r}{D}\cos\theta + \frac{1}{2}(\frac{r}{D})^2(3\cos^2\theta - 1)$$

$$+ \frac{1}{2}(\frac{r}{D})^3(5\cos^3\theta - 3\cos\theta) +$$

$$\frac{1}{8}(\frac{r}{D})^4(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3) + \cdots\cdots\},$$

将上式代入(7.1—1)式，得

$$\Omega_M = \frac{\mu_0 M}{D}\sum_{l=2}^{\infty}(\frac{r}{D})^l P_l(\cos\theta), \qquad (7.1-3)$$

其中

$$P_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(3\cos^2\theta - 1),$$

$$P_3(\cos\theta) = \frac{1}{2}(5\cos^3\theta - 3\cos\theta),$$

$$P_4(\cos\theta) = \frac{1}{8}(35\cos^4\theta - 30\cos^2\theta + 3),$$

………………。

如果略去$(\frac{r}{D})^3$以及以上方次之项，得月球引潮势的主要部分，并记为V_M

$$V_M = -\mu_0 M \frac{r^2}{2D^3}(3\cos^2\theta - 1)。\qquad (7.1-4)$$

经类似推导，可得太阳引潮势的主要部分，并记为V_s，

$$V_s = -\mu_0 S \frac{r^2}{2D_1^3}(3\cos^2\theta_1 - 1)。\qquad (7.1-5)$$

由(7.1—4)式可得月球引潮力铅直分量和水平分量的主要部分

$$F_{MV} = -\frac{\partial V_M}{\partial r} = \mu_0 M \frac{r}{D^3}(3\cos^2\theta - 1), \qquad (7.1-6)$$

$$F_{MH} = -\frac{3}{2}\mu_0 M \frac{r}{D^3}\sin 2\theta, \qquad (7.1-7)$$

而由(7.1—5)式可得太阳引潮力铅直分量和水平分量的主要部分

$$F_{SV} = \mu_0 S \frac{r}{D_1^3}(3\cos^2\theta_1 - 1), \qquad (7.1-8)$$

$$F_{SH} = -\frac{3}{2}\mu_0 S \frac{r}{D_1^3}\sin 2\theta_1。\qquad (7.1-9)$$

为了说明简便起见，以后的讨论中，将引潮力或引潮势的主要部分均简称为引潮力或引潮势。

月球引潮力的振幅与太阳引潮力的振幅之比为

$$\frac{F_{MH}\text{的振幅}}{F_{SH}\text{的振幅}} = \frac{F_{MV}\text{的振幅}}{F_{SV}\text{的振幅}} = \frac{M}{S}(\frac{D_1}{D})^3 = 2.17,$$

表明月球引潮力最大值为太阳引潮力最大值的2.17倍。将(7.1—6)式和(7.1—7)式中的r以地球半径a代替，再利用关系式$g=\frac{\mu_0 E}{a^2}$(E为地球质量)，于是地球表面的月球引潮力的两个分量为

$$F_{MV} = g\frac{a^3}{D^3}\frac{M}{E}(3\cos^2\theta - 1), \qquad (7.1-10)$$

$$F_{MH} = -\frac{3}{2}g\frac{a^3}{D^3}\frac{M}{E}\sin 2\theta。 \qquad (7.1-11)$$

已知$(\frac{a}{D})^3 = 4.56\times 10^{-6}$，$\frac{M}{E} = \frac{1}{81.3}$，取 $\theta = 0, 45°, 90°, 135°, 180°, 225°, 270°, 315°$，计算地球表面月球引潮力的量值，其结果列于表

表 7－1　地球表面月球引潮力分布

θ/(°)	F_{MV}		F_{MH}	
0	$1.12\times 10^{-7}g$	指向月球	0	
45	$0.23\times 10^{-7}g$		$-0.84\times 10^{-7}g$	顺时针方向
90	$-0.56\times 10^{-7}g$	指向地心	0	
135	$0.28\times 10^{-7}g$		$0.84\times 10^{-7}g$	逆时针方向
180	$1.12\times 10^{-7}g$	背向月球	0	
225	$0.23\times 10^{-7}g$		$0.84\times 10^{-7}g$	顺时针方向
270	$-0.56\times 10^{-7}g$	指向地心	0	
315	$0.28\times 10^{-7}g$		$0.84\times 10^{-7}g$	逆时针方向

7－1 之中。可以看出，无论是月球引潮力的铅直分量还是水平分量都是很小的，最大的量值也不过为重力加速度的 10^{-7}。引潮力铅直分量只能稍稍改变一下重力的大小，几乎不能产生海水的铅直运动，或者说引潮力的铅直分量相对于重力可以忽略。另一方面，虽然引潮力的水平分量与其铅直分量的量级相当，但是水平分量能使海水发生辐聚和辐散，从而形成海水的起伏涨落。由此可以得出结论：形成海洋潮汐潮流运动的真正原动力是引潮力的水平分量。图 7－1 是地球表面月球引潮力水平分量的分布图，图中大圆为地球表面与通过地心和月心的任一截面的交线。很显然，θ＝0°和 180°处为月球引潮力水平分量的辐聚点，而在 θ＝90°和 270°

处是其辐散点。在辐聚点和辐散点附近，引潮力水平分量很小，但是正是在这些附近海水堆积和流失最多。如果地球表面为等深的海水包围，海水没有惯性，其结果必然形成一椭球，称之为潮汐椭球，其长轴指向月球中心。

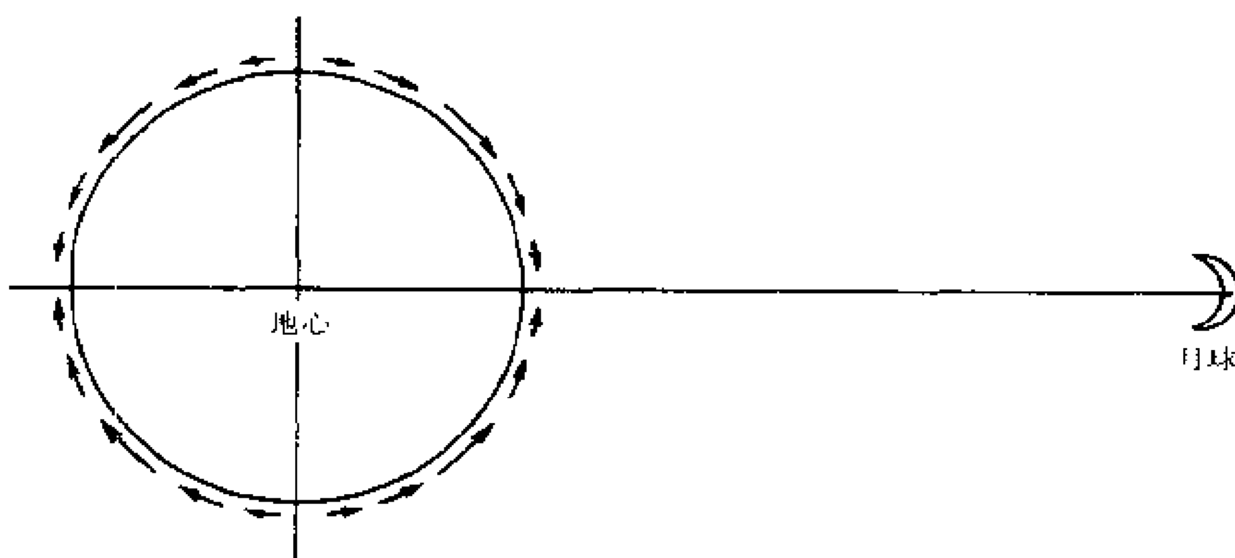


图 7—1　月球引潮力水平分量分布图

太阳引潮力铅直分量和水平分量的分布情况与月球的类似，只是其量值仅为月球的一半；太阳引潮力所形成的潮汐椭球之长轴指向太阳中心。

7.1.2　平衡潮及其主要结论

假定地球表面为等深海水所包围，海水没有惯性。所谓平衡潮就是这种理想的全球大洋对引潮力的响应。如前所述，引潮力的铅直分量对海水运动几乎没有影响，产生海洋潮汐的真正原动力为引潮力的水平分量，因此，根据平衡潮概念，某一瞬间地球表面的海水在引潮力水平分量和重力作用下相平衡。显然这是一种动态平衡，随着天体的运动，新的平衡不断取代旧的平衡。以月球为例，设在某一瞬间，在月球引潮力水平分量作用下，海面相对于原静止

水面发生倾斜。如图 7－2 所示，P 为压强梯度力，F_{MH}为月球引潮力水平分量，α 为海面倾角，在 X 点处 F_{MH}，g 和 P 相平衡，于是海面坡度有如下关系

$$\tan\alpha = \frac{F_{MH}}{g} = \frac{\delta\bar{\xi}_M}{\delta s}, \qquad (7.1-12)$$

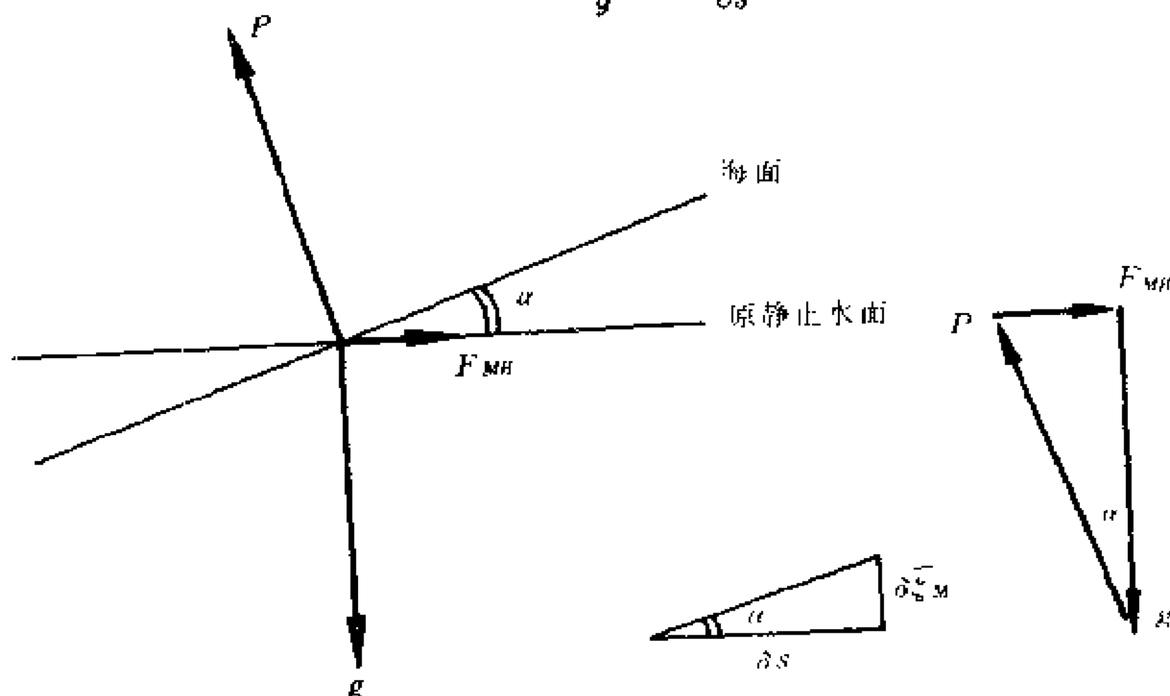


图 7－2　X 点受力示意图

其中 $\bar{\xi}_M$ 为海面相对于静止水面的升降，称之为月球平衡潮潮高。又据引潮力与引潮势的关系，月球引潮力水平分量可表为

$$F_{MH} = -\frac{\partial V_M}{\partial s}, \qquad (7.1-13)$$

由以上两式求得

$$\bar{\xi}_M = -\frac{V_M}{g} + C = \frac{\mu_0 M}{g}\frac{a^2}{2D^3}(3\cos^2\theta - 1) + C。$$

利用海面升高和降低的水体体积之和为零，可以证明常数 C 为零，再利用关系 $g = \frac{\mu_0 E}{a^2}$，于是月球平衡潮潮高表达式变为

$$\bar{\xi}_M = -\frac{V_M}{g} = \frac{1}{2}\frac{M}{E}(\frac{a}{D})^3 a(3\cos^2\theta - 1)。\quad (7.1-14)$$

类似地可得太阳平衡潮潮高表达式

$$\bar{\xi}_S = -\frac{V_s}{g} = \frac{1}{2}\frac{S}{E}(\frac{a}{D_1})^3 a(3\cos^2\theta_1 - 1)。\quad (7.1-15)$$

从地心到月球平衡潮潮面的距离 R_M 和到太阳平衡潮潮面的距离 R_s 可分别表为

$$R_M = a + \bar{\xi}_M = a + \frac{3}{2}\frac{M}{E}(\frac{a}{D})^3 a(\cos^2\theta - \frac{1}{3}),$$

(7.1-16)

$$R_S = a + \bar{\xi}_S = a + \frac{3}{2}\frac{S}{E}(\frac{a}{D_1})^3 a(\cos^2\theta_1 - \frac{1}{3})。$$

(7.1-17)

显然,(7.1-16)式表示一个长半轴为 $a+\frac{M}{E}(\frac{a}{D})^3 a$ 和短半轴为 $a-\frac{1}{2}\frac{M}{E}(\frac{a}{D})^3 a$ 的椭球面,其长轴指向月球中心;面(7.1-17)式则表示长半轴为 $a+\frac{S}{E}(\frac{a}{D_1})^3 a$,短半轴为 $a-\frac{1}{2}\frac{S}{E}(\frac{a}{D_1})^3 a$ 的椭球面,其长轴指向太阳中心。理想的海洋表面形状是两个椭球面的叠加结果,由于地球、月球和太阳的相对运动,海洋表面的形状不断发生变化。

由(7.1-14)式知,当 $\theta=0$ 或 180°时,月球平衡潮潮高达最大,其值为

$$\bar{\xi}_{Mmax} = \frac{M}{E}(\frac{a}{D})^3 a,$$

而当 $\theta=90°$或 270°时,达最小值,其值为

$$\xi_{Mmin} = -\frac{1}{2}\frac{M}{E}(\frac{a}{D})^3 a,$$

于是，月球平衡潮的最大潮差为

$$\bar{\zeta}_{Mmax}-\bar{\zeta}_{Mmin}=\frac{3}{2}\frac{M}{E}(\frac{a}{D})^3a=0.535\text{m}。$$

类似地可得太阳平衡潮的最大潮差为

$$\bar{\zeta}_{Smax}-\bar{\zeta}_{Smin}=\frac{3}{2}\frac{S}{E}(\frac{a}{D_1})^3a=0.246\text{m}。$$

每当阴历初一或十五，地、月和日接近在同一条直线上，月球平衡潮椭球的长轴与太阳平衡潮椭球的长轴接近重合，于是理想海面的最大潮差接近两者之和，即约为 0.78m；每当阴历初七、八或廿二、廿三，月球平衡潮椭球长轴与太阳平衡潮椭球的短轴相重，于是理想海洋表面出现最小潮差，即为 0.29m。平衡潮理论的这个结论同大洋实测资料很接近，例如夏威夷群岛的火奴鲁鲁一带最大的潮差为 0.9—1m，但比近岸的实测资料小得多。

月球平衡潮潮高最大值与太阳平衡潮潮高最大值之比

$$\frac{\bar{\zeta}_{Mmax}}{\bar{\zeta}_{Smax}}=\frac{M}{S}(\frac{D_1}{D})^3=2.17$$

或

$$\frac{\bar{\zeta}_{Smax}}{\bar{\zeta}_{Mmax}}=\frac{S}{M}(\frac{D}{D_1})^3=0.46$$

因此，太阳平衡潮潮高最大值还不到月球的一半。实际海洋中的太阴潮确实比太阳潮强得多。

由于地球的赤道平面与月球绕地球运动的轨道平面有一交角，也与地球绕太阳运动的轨道平面有一交角，因此，当地球自转时，除了赤道上之外，其它地区均会发生潮汐日不等现象。实际观测表明，潮汐日不等现象是存在的。

下面对平衡潮潮高进行初步展开。已知关系式

$$\cos\theta=\sin\varphi\sin\delta+\cos\varphi\cos\delta\cos T_1 \qquad (7.1-18)$$

其中 φ 为地理纬度，δ 为月球赤纬，T_1 为月球时角（它被定义为观

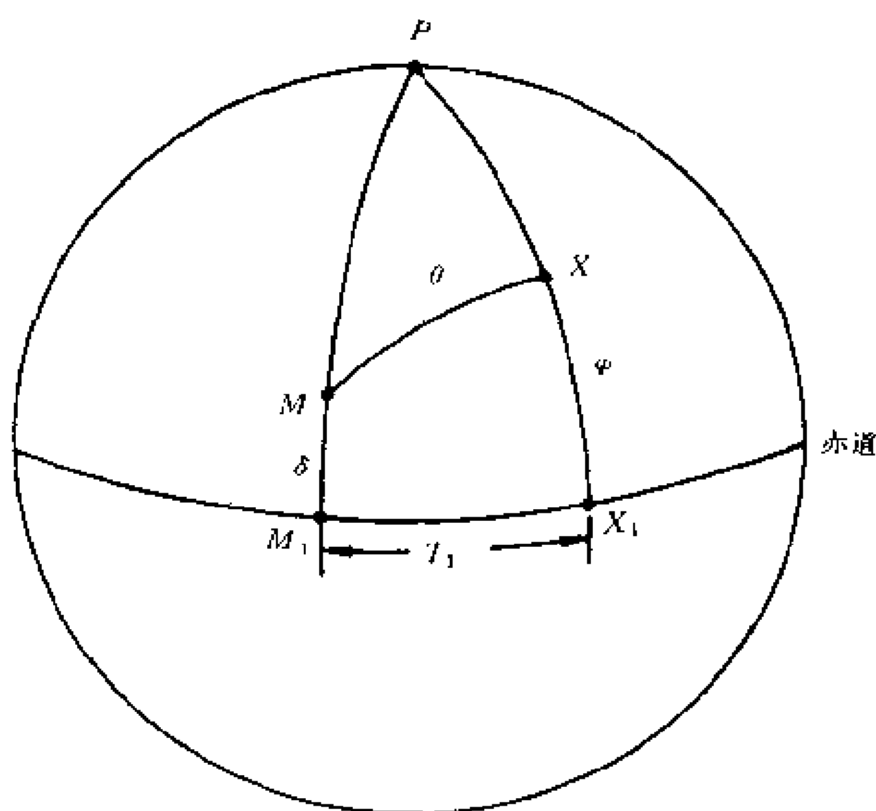


图 7—3　与月球和观测点有关的变量

测地点所在经度与月球所在经度在赤道上的夹角，当月球位于观测地点经度时，$T_1=0$，当月球位于从观测点向西与观测点经度相差 180°的经度上时，$T_1=180°$，T 在一个太阴日内变化 360°)，图 7—3 示出了这些变量。利用此关系式，月球平衡潮潮高表达式(7.1—14)可展成三大项

$$\bar{\xi}_M = \bar{\xi}_0 + \bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2$$

$$= 2G\left(\frac{\bar{D}}{D}\right)^3\left\{\left[\frac{3}{2}\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2\delta - \frac{1}{3}\right)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\sin 2\varphi \sin 2\delta \cos T_1 + \frac{1}{2}\cos^2\varphi \cos^2\delta \cos 2T_1\right\},$$

(7.1—19)

其中常数 $G=\frac{3}{4}\frac{M}{E}(\frac{a}{\overline{D}})^3a$，$\overline{D}$ 为地月之间平均距离。花括号内的第一项随月球赤纬 δ 而变，具有半个月的周期，第二项主要随月球时角 T_1 而变，具有一个太阴日的周期，同时随 δ 有缓慢变化，第三项具有半个太阴日的周期，同时也随 δ 有缓慢变化。这三项又随地月之距离 D 而缓慢变化。另外，这三项随地理纬度有不同情况的变化。第一项（长周期项）在 $\varphi=35°.26$ 处振幅为零，由此向赤道或向极地振幅逐渐变大；第二项（日周期项）在赤道处振幅为零，随着纬度增加振幅渐渐变大，到达 $\varphi=45°$ 处其振幅达最大值，此后随着纬度增加振幅逐渐减小，到达极地振幅又成为零；第三项（半日周期项）在赤道处振幅最大，随纬度为增加振幅逐渐减小，到达极地变为零。

太阳平衡潮潮高公式(7.1—15)也可展成三大项

$$\overline{\xi}_S=\overline{\xi}'_0+\overline{\xi}'_1+\overline{\xi}'_2$$

$$=2G'(\frac{\overline{D}_1}{D_1})^3\{[\frac{3}{2}(\sin^2\varphi-\frac{1}{3})(\sin^2\delta_1-\frac{1}{3})]$$

$$+\frac{1}{2}\sin2\varphi\sin2\delta_1\cos T+\frac{1}{2}\cos^2\varphi\cos^2\delta_1\cos2T\},\qquad(7.1-20)$$

其中 $G'=\frac{3}{4}\frac{S}{E}(\frac{a}{\overline{D}_1})^3a$，$\overline{D}_1$ 为地日之间的平均距离，δ_1 为太阳赤纬，T 为太阳时角。

实际海洋中确实以长周期、全日周期和半日周期的潮汐为主。

7.1.3 平衡潮的分潮

如前所述，平衡潮由三类不同周期的潮汐构成，每一类潮汐又都伴随着缓慢的周期运动。下面将每一类潮汐作进一步展开，使得展开后的每一项为一调和项。这些调和项称之为平衡分潮。这样的处理对于理论研究和实际应用都是重要的。具体的展开过程很

繁琐,因此不作详细讨论。(7.1—19)式中的三大项中的每一项均可展成许多平衡分潮,即

$$\bar{\zeta}_0 = \sum_i \bar{\zeta}_{0i} = \sum_i G\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right)G_{0i}(I) \times \cos[V_{0i}(s,h,p,t) + u_{0i}(\xi,\nu)], \quad (7.1-21)$$

$$\bar{\zeta}_1 = \sum_i \bar{\zeta}_{1i} = \sum_i G\sin 2\varphi G_{1i}(I) \times \cos[V_{1i}(s,h,p,t) + u_{1i}(\xi,\nu)], \quad (7.1-22)$$

$$\bar{\zeta}_2 = \sum_i \bar{\zeta}_{2i} = \sum_i G\cos^2\varphi G_{2i}(I) \times \cos[V_{2i}(s,h,p,t) + u_{2i}(\xi,\nu)], \quad (7.1-23)$$

其中 I 为月球轨道与赤道的交角,其变化周期为 18.61 年,变化范围为 23°27′±5°08′;ξ 和 ν 为与月球轨道缓慢变化有关的角度;t 为时间,s 为月球的平均经度。h 为平太阳的经度,p 为月球的近地点平均经度。同样,太阳平衡潮三大项也可展成许许多多太阳平衡分潮

$$\bar{\zeta}'_0 = \sum_i \bar{\zeta}'_{0i} = \sum_i G'\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sin^2\varphi\right)G_{0i}(\omega) \times \cos[V_{0i}(s,h,p_1,t)], \quad (7.1-24)$$

$$\bar{\zeta}'_1 = \sum_i \bar{\zeta}'_{1i} = \sum_i G'\sin 2\varphi G_{1i}(\omega) \times \cos[V_{1i}(s,h,p_1,t)], \quad (7.1-25)$$

$$\bar{\zeta}'_2 = \sum_i \bar{\zeta}'_{2i} = \sum_i \cos^2\varphi G_{2i}(\omega) \times \cos[V_{2i}(s,h,p_1,t)], \quad (7.1-26)$$

其中 ω 为黄道与赤道的交角,为一常数,$\omega=23°27'$;p_1 为近日点的

平均经度。

表 7－2 中列出了一些比较重要的平衡分潮的振幅和位相。表中有几对带方括号的平衡分潮，每对的位相基本相同，在实际应用中是将每对进行矢量合成变成一个，比如[K_1]和[K_1]合成后以 K_1 表示，两个[M_1]合成以后以 M_1 表示，等等。

每个平衡分潮的振幅包括三个因子，并且有 $G'=0.46G$，因此，同一类平衡分潮（长周期分潮，或者全日周期分潮，或者半日周期分潮）的振幅相对大小仅取决于 $G(I)$（对月球平衡分潮）或 $0.46G(\omega)$（对太阳平衡分潮）。另一方面，由于月球平衡分潮的 $G(I)$ 与 $u(\xi,\nu)$ 具有相同的 18.61 年缓慢的变化，因此近似地取 $G(I)\cos u$ 为月球平衡分潮的振幅，而太阳平衡分潮的振幅仍为 $0.46G(\omega)$。为了给出月球平衡分潮的平均大小，求 $G(I)\cos u$ 的 18.61 年平均，记为$[G(I)\cos u]_0$，它和 $0.46G(\omega)$一起称为平衡分潮的平均系数。再定义

$$f=\frac{G(I)}{[G(I)\cos u]_0}, \qquad (7.1-27)$$

称为节点因子，为 I 的函数，其值在 1 附近变动。根据计算结果，平均系数$[G(I)\cos u]_0$ 或 $0.46G(\omega)$列于表 7－3 的第二列。由此可见，全日平衡分潮中 K_1 的平均系数最大，而半日平衡分潮中 M_2 的平均系数最大。

表 7—2 主要平衡分潮的振幅和位相

名称	振幅			位相							
				F						[illegible]	
	$G(G')$	$G(\varphi)$	$G(I)(G'(\omega))$	T	S	h	p	p_1	$\pi/2$	ξ	ν
M_m	$\frac{3}{4}\frac{M}{E}(\frac{a}{D})^3a$	$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sin^2\varphi$	$(\frac{2}{3}-\sin^2 I)3e$		1		−1				
M_{sf}			$(\frac{2}{3}-\sin^2 I)3m2$		2	2					
M_f			$\sin^2 I(1-\frac{5}{2}e^2)$		2					−2	
S_a	$\frac{3}{4}\frac{S}{E}(\frac{c}{D_1})^3a$		$(\frac{2}{3}-\sin^2\omega)3e_1$			1		1			
S_{sa}			$\sin^2\omega(1-\frac{5}{2}e_1^2)$			2					
$[K_1]$		$\sin 2\varphi$	$\sin 2\omega(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e_1^2)$	1		1			−1		
$[K_1]$	$\frac{3}{4}\frac{M}{E}(\frac{a}{D})^3a$		$\sin 2I(\frac{1}{2}+\frac{8}{4}e^2)$	1		1			−1		−1
O_1			$\sin I\cos^2\frac{I}{2}(1-\frac{5}{2}e^2)$	1	−2	1			1	2	−1
P_1	$\frac{3}{4}\frac{S}{E}(\frac{a}{D_1})^3a$		$\sin\omega\cos^2\frac{\omega}{2}(1-\frac{5}{2}e_1^2)$	1		−1			1		
Q_1	$\frac{3}{4}\frac{M}{E}(\frac{a}{D})^3a$		$\sin I\cos^2\frac{I}{2}\cdot\frac{7}{2}e$	1	−3	1	1		1	2	−1
J_1			$\sin 2I\cdot\frac{3}{4}e$	1	1	1	−1		−1		−1
OO_1			$\sin I\sin^2\frac{I}{2}(1-\frac{5}{2}e^2)$	1	2	1			−1	−2	−1
$[M_1]$			$\sin I\cos^2\frac{I}{2}\cdot\frac{1}{2}e$	1	−1	1	−1		−1	2	−1
$[M_1]$			$\sin 2I\cdot\frac{3}{4}e$	1	−1	1	1		−1		−1
M_2		$\cos^2\varphi$	$\cos^4\frac{I}{2}(1-\frac{5}{2}e^2)$	2	−2	2				2	−2
S_2	$\frac{3}{4}\frac{S}{E}(\frac{a}{D_1})^3a$		$\cos^4\frac{\omega}{2}(1-\frac{5}{2}e_1^2)$	2							
$[K_2]$			$\sin^2\omega(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e_1^2)$	2		2					
$[K_2]$	$\frac{3}{4}\frac{M}{E}(\frac{a}{D})^3a$		$\sin^2 I(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}e^2)$	2		2					−2
N_2			$\cos^4\frac{I}{2}\cdot\frac{7}{2}e$	2	−3	2	1			2	−2
$[L_2]$			$\cos^4\frac{I}{2}\cdot\frac{1}{2}e$	2	−1	2	−1		2	2	−2
$[L_2]$			$\sin 2I\cdot\frac{3}{4}e$	2	−1	2	1				−2

T_2	$\frac{3}{4}\frac{S}{E}(\frac{a}{D_1})^3 a$		$\cos^4\frac{\omega}{2}\cdot\frac{7}{2}e_1$	2		−1		1			

注：$e=0.05490$，为月球娄道的偏心率；$e_1=0.01675$ 为地球绕太阳的轨道偏心率；$m=0.0748$，为太阳运动平均角速度与月球运动平均角速度之比。

表 7—3　主要分潮的平均系数、角速率 ω 和周期 T

名称	平均系数	$\omega/(°)h^{-1}$	T/h
M_m	0.08254	0.54437469	27.554550×24
M_{sf}	0.01369	1.01589576	14.765294×24
M_f	0.15647	1.09803306	13.660790×24
S_a	0.01156	0.04106668	365.259639×24
S_{sa}	0.07281	0.08213728	182.621099×24
K_1	0.53011	15.04106864	23.934469
O_1	0.37694	13.94303559	25.81934
P_1	0.17543	14.95893136	24.06589
Q_1	0.07217	13.3986609	26.86836
M_2	0.90809	28.98410424	12.420601
S_2	0.42248	30.0	12.0
N_2	0.17386	28.43972954	12.658348
K_2	0.11498	30.08213728	11.967234

平衡分潮位相中的 V 是位相中变化较快的部分，它是天文变量 T,s,h,p,p_1 的线性函数，一般地可表示为

$$V = nT + n_1 s + n_2 h + n_3 p + n_4 p_1 + n_5 \frac{\pi}{2}, \quad (7.1-28)$$

其中 $n=0,1,2$；n_1,n_2,n_3,n_4，和 n_5 取零或正负整数。均匀变化的天文变量可表示成

$$
\left.\begin{aligned}
T &= T_0 + \omega_T t, \\
S &= S_0 + \omega_s t, \\
h &= h_0 + \omega_h t, \\
p &= p_0 + \omega_p t, \\
p_1 &= p_{10} + \omega_{p_1} t
\end{aligned}\right\} \qquad (7.1-29)
$$

其中 t 以区时表示；$T_0, s_0, h_0, p_0, p_{10}$ 为 $t=0$ 时刻之值；变量的变化角速度为

$$
\left.\begin{aligned}
\omega_T &= \frac{360^\circ}{24h} = 15^\circ/\mathrm{h}, \\
\omega_s &= \frac{360^\circ}{24 \times 27.321582} = 0^\circ.54901653/\mathrm{h}, \\
\omega_h &= \frac{360^\circ}{24 \times 365.242109} = 0^\circ.04106864/\mathrm{h}, \\
\omega_p &= \frac{360^\circ}{24 \times 365.25 \times 8.84732} = 0^\circ.00464183/\mathrm{h}, \\
\omega_{p_1} &= \frac{360^\circ}{24 \times 365.25 \times 20940} = 0^\circ.000001961/\mathrm{h}。
\end{aligned}\right\}
$$

$$(7.1-30)$$

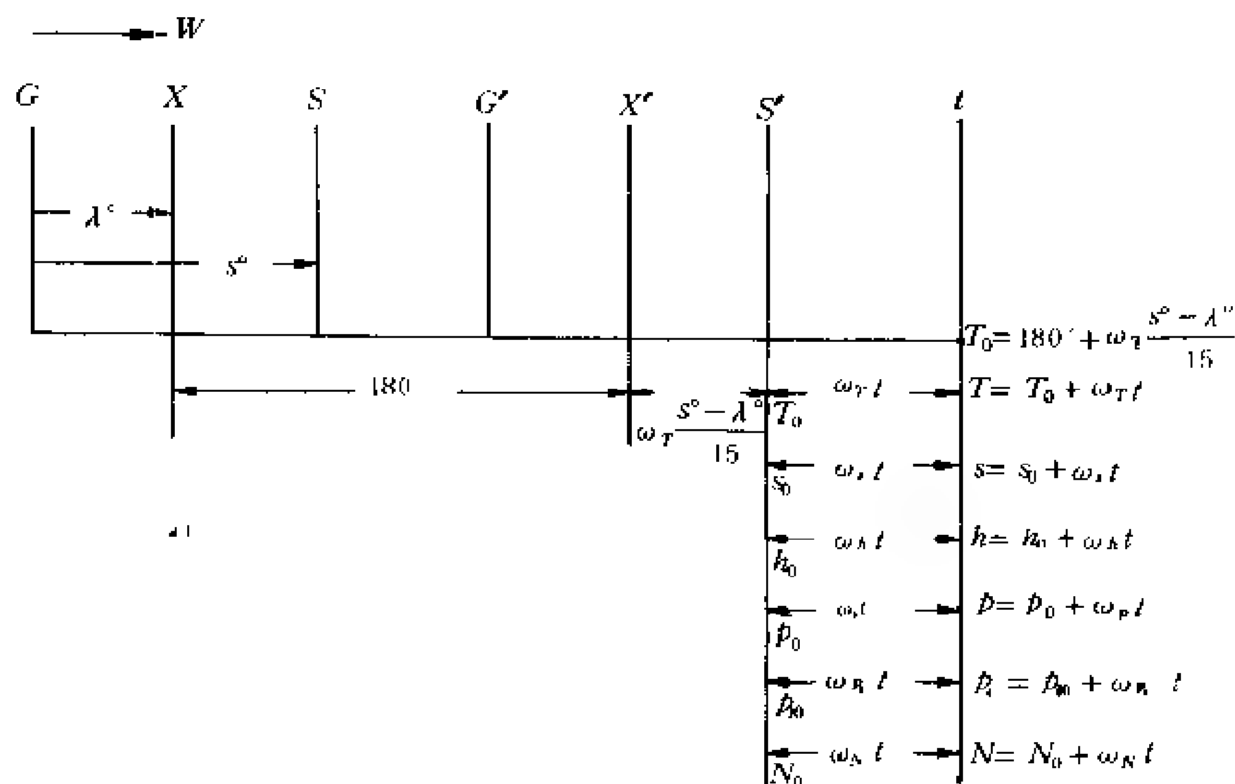
因为讨论地球上任意点 X 处的潮汐，通常采用的时间系统为区时，因此根据时角定义，区时零时的平太阳时角

$$
\begin{aligned}
T_0 &= 180^\circ + \frac{S^0 - \lambda^0}{15}\omega_T \\
&= 180^\circ + (S^0 - \lambda^0), \qquad (7.1-31)
\end{aligned}
$$

其中 S° 为标准经度，λ° 为 X 点的经度，假定均为西经。(7.1—29)式和(7.1—31)式中的天文变量关系如图 7—4 所示。

将(7.1—29)式和(7.1—31)式代入(7.1—28)式，再加上 u，得

$$
\begin{aligned}
V + u = {} & n(180 + S^\circ - \lambda^\circ) + n_1 s_0 + n_2 h_0 + n_3 p_0 + n_4 p_{10} + n_5 90 \\
& + (n\omega_T + n_1\omega_s + n_2\omega_h + n_3\omega_p + n_4\omega_{p_1})t + u
\end{aligned}
$$



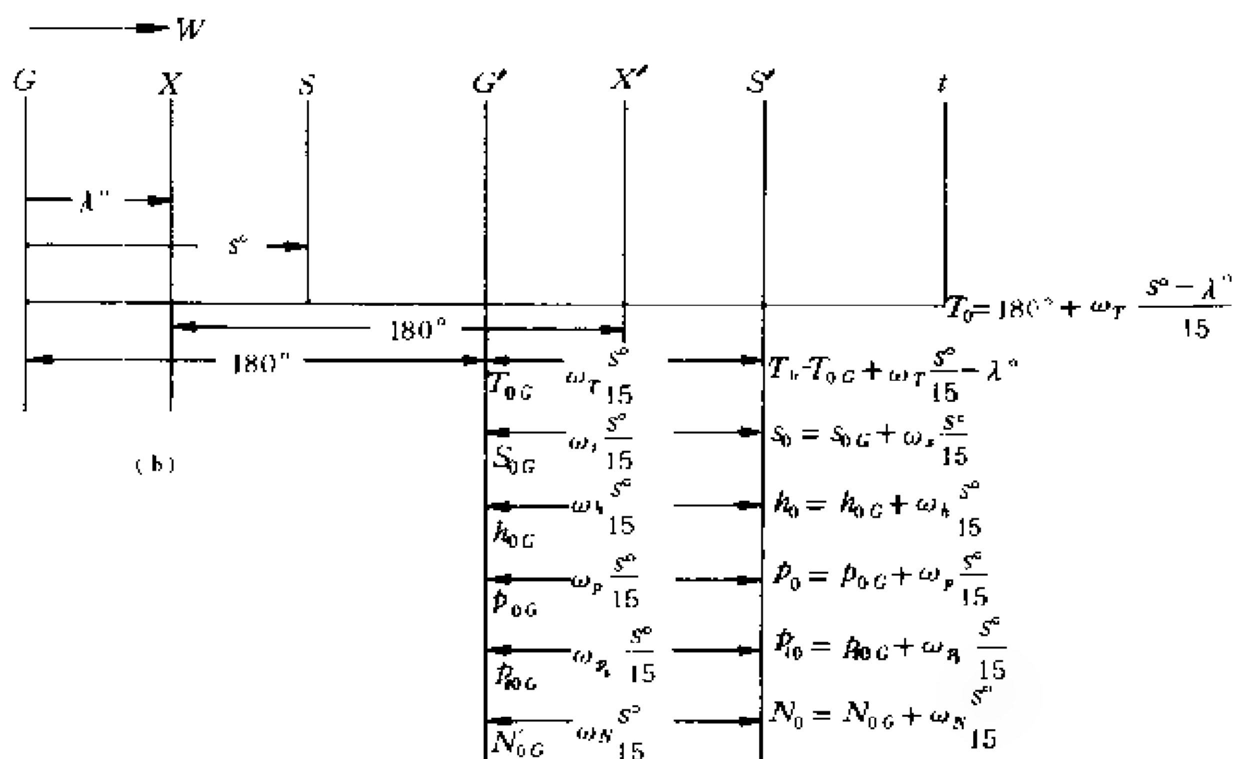


图 7—4 (a)天文变量关系式 示意图

(b)区时零时天文变量与格林尼治零时天文变量的关系

令平衡分潮的初位相和角速度分别为

$$(V_0+u)_{地}=n180+n_1s_0+n_2h_0+n_2p_0+n_4p_{10}+n_590+n(S^0-\lambda^0)+u, \qquad (7.1-32)$$

$$\omega=n\omega_T+n_1\omega_S+n_2\omega_h+n_3\omega_p+n_4\omega_{p_1}, \qquad (7.1-33)$$

于是平衡分潮的位相可表为

$$V+u=(V_0+u)_{地}+\omega t。 \qquad (7.1-34)$$

例如平衡分潮 M_2,应取 $n=2,n_1=-2,n_2=2,n_3=0,n_4=0,n_5=0$,于是

$$(V_0+u)_{地M_2}=-2s_0+2h_0+u_{M_2},$$

$$\omega_{M_2}=2\omega_T-2\omega_s+2\omega_h=28°.9841/\mathrm{h}。$$

对于在同一时区内的不同地点的平衡分潮初位相$(V_0+u)_{地}$可以用标准子午线处的平衡分潮初位相来表示。设标准子午线处平衡分潮初位相以$(V_0+u)_{区}$表示,实际上在(7.1—32)式中取 $\lambda°=S°$便得,即

$$(V_0+u)_{区}=n180+n_1s_0+n_2h_0+n_3p_0+n_4p_{10}+n_590+u。 \qquad (7.1-35)$$

显然,它与$(V_0+u)_{地}$的关系为

$$(V_0+u)_{区}=(V_0+u)_{地}-n(S°-\lambda°), \qquad (7.1-36)$$

这样任意地点(在同一时区内)的平衡分潮初位相便可由标准于午线处的平衡分潮初位相来确定了。更一般地,不同标准子午线处的$(V_0+u)_{区}$可以用格林尼治子午线的平衡分潮初位相表示。设格林尼治子午线处,世界时零时的平衡分潮初位相以$(V_0+u)_{格}$表示,参照(7.1—35)式,它可表达为

$$(V_0+u)_{格}=n180+n_1s_{0G}+n_2h_{0G}+n_3p_{0G}+n_4p_{10G}+n_590+u, \qquad (7.1-37)$$

其中 $S_{0G}, h_{0G}, p_{0G}, p_{10G}$为世界时零时的天文变量之值。对于西经，标准子午线与格林尼治子午线的时差为$\triangle t=\frac{S^{\circ}}{15}$，因此 s_{0G}, h_{0G}, p_{0G}, p_{10G}与 s_0, h_0, p_0, p_{10}分别有如下关系

$$\left.\begin{aligned} s_{0G} &= s_0-\omega_s \frac{S^{\circ}}{15}, \\ h_{0G} &= h_0-\omega_h \frac{S^{\circ}}{15}, \\ p_{0G} &= p_0-\omega_p \frac{S^{\circ}}{15}, \\ p_{10G} &= p_{10}-\omega_{p_1} \frac{S^{\circ}}{15}, \end{aligned}\right\} \tag{7.1-38}$$

代入(7.1—37)式，得

$$\begin{aligned}(V_0+u)_{格} = &\, n180+n_1S_0+n_2h_0+n_3p_0+n_4p_{10}+n_590+u \\ &-(n_1\omega_s+n_2\omega_h+n_3\omega_p+n_4\omega_{p_1})\frac{S^{\circ}}{15},\end{aligned}$$

利用$(V_0+u)_{区}$的定义和 ω 的定义，上式可表为

$$(V_0+u)_{格}=(V_0+u)_{区}-\omega\frac{S^{\circ}}{15}+nS^{\circ}。 \tag{7.1-39}$$

令 $\overline{H}=GG(\varphi)[G(I)\cos u]_0$，对太阳平衡分潮 $\overline{H}=0.46GG(\varphi)G(\omega)$，再利用(7.1—34)式，(7.1—36)式和(7.1—39)式，平衡分潮可表为以下三种形式：对于西经有

$$\left.\begin{aligned} \overline{\zeta}_i &= f\overline{H}\cos[\omega t+(V_0+u)_{地}], \\ \overline{\zeta}_i &= f\overline{H}\cos[\omega t+(V_0+u)_{区}+n(S^{\circ}-\lambda^{\circ})], \\ \overline{\zeta}_i &= f\overline{H}\cos[\omega t+(V_0+u)_{格}-n\lambda^{\circ}+\omega\frac{S^{\circ}}{15}]。\end{aligned}\right\}$$

$$\tag{7.1-40}$$

对于东经可得

$$
\left.
\begin{aligned}
\bar{\zeta}_i &= f\bar{H}\cos[\omega t + (V_0 + u)_{地}], \\
\bar{\zeta}_i &= f\bar{H}\cos[\omega t + (V_0 + u)_{区} - n(S^\circ - \lambda^\circ)], \\
\bar{\zeta}_i &= f\bar{H}\cos[\omega t + (V_0 + u)_{格} + n\lambda^\circ - \omega \frac{S^\circ}{15}]。
\end{aligned}
\right\}
$$

(7.1－41)

$(V_0+u)_{格}$按(7.1－37)式计算，其中的 s_{0G}, h_{0G}, p_{0G}和 p_{10G}可依下列天文变量公式求得

$$
\left.
\begin{aligned}
s_{0G} &= 277^\circ.025 + 129^\circ.38481(y-1900) \\
&\quad + 13^\circ.17640(D+Y), \\
h_{0G} &= 280^\circ.190 - 0^\circ.23872(y-1900) \\
&\quad + 0^\circ.98565(D+Y), \\
p_{0G} &= 334^\circ.385 + 40^\circ.66249(y-1900) \\
&\quad + 0^\circ.11140(D+Y), \\
p'_{0G} &= 281^\circ.221 + 0.01718(y-1900) \\
&\quad + 0.0000471(D+Y),
\end{aligned}
\right\} (7.1-42)
$$

式中 y 为年份，D 是从 y 年 1 月 1 日起算的日数，如 1 月 2 日，$D=1$，1 月 3 日，$D=2$；$Y=\frac{1}{4}(y-1901)$的整数部份。求得$(V_0+u)_{格}$之后，可按(7.1－39)式求得$(V_0+u)_{区}$，再由(7.1－36)式求得$(V_0+u)_{地}$。不过常用的是$(V_0+u)_{格}$。(7.1－40)式或(7.1－41)式中的 f 和 u 一般以讨论时间的中间日期来确定，因为它们变化缓慢。它们是 I, ξ, v 的函数，但均可表示成月球轨道升交点经度 N 的函数，下面给出主要分潮的 f 和 u 的计算公式

$$
\left.\begin{aligned}
f_{Mm} &= 1.0000 - 0.1300\cos N + 0.0013\cos 2N, \\
u_{Mm} &= 0; \\
f_{Mf} &= 1.0429 + 0.4135\cos N - 0.0040\cos 2N, \\
u_{Mf} &= -23^{\circ}.74\sin N + 2^{\circ}.68\sin 2N - 0^{\circ}.38\sin 3N; \\
f_{K_1} &= 1.0060 + 0.1150\cos N - 0.0088\cos 2N \\
&\quad + 0.0006\cos 3N, \\
u_{K_1} &= -8^{\circ}.86\sin N + 0^{\circ}.68\sin 2N - 0^{\circ}.07\sin 3N; \\
f_{O_1} &= 1.0089 + 0.1871\cos N - 0.0147\cos 2N \\
&\quad + 0.0014\cos 3N, \\
u_{O_1} &= 10^{\circ}.80\sin N - 1^{\circ}.34\sin 2N + 0.19\sin 3N; \\
f_{P_1} &= 1, \\
u_{P_1} &= 0; \\
f_{Q_1} &= f_{O_1}, \\
u_{Q_1} &= u_{O_1}; \\
f_{M_2} &= 1.0004 - 0.0373\cos N + 0.0002\cos 2N, \\
u_{M_2} &= -2^{\circ}.14\sin N; \\
f_{S_2} &= 1, \\
u_{S_2} &= 0; \\
f_{N_2} &= f_{M_2}, \\
u_{N_2} &= u_{M_2}; \\
f_{K_2} &= 1.0241 + 0.2863\cos N + 0.0083\cos 2N \\
&\quad - 0.015\cos 3N, \\
u_{K_2} &= -17^{\circ}.74\sin N + 0^{\circ}.68\sin 2N - 0^{\circ}.04\sin 3N。
\end{aligned}\right\}
\quad (7.1-43)
$$

其中 $N = N_{00} + \omega_N t_m$，$t_m$ 为中间时刻，

$$N_{0G} = 259°.157 - 19°32818(y - 1900) - 0°.05295(D + Y),$$
(7.1—44)

$$\omega_N = \frac{360}{24 \times 365.25 \times 18.6129} = 0°.00220641/\text{h}。$$
(7.1—45)

至此，每个平衡分潮的振幅和位相均可求出。

最后强调指出，在所有平衡分潮中有八个平均系数最大的，其中全日同期的有四个，半日周期的有四个，它们的名称是

$$K_1, O_1, P_1, Q_1, (K_1 > O_1 > P_1 > Q_1)$$

$$M_2, S_2, N_2, K_2, (M_2 > S_2 > N_2 > K_2)$$

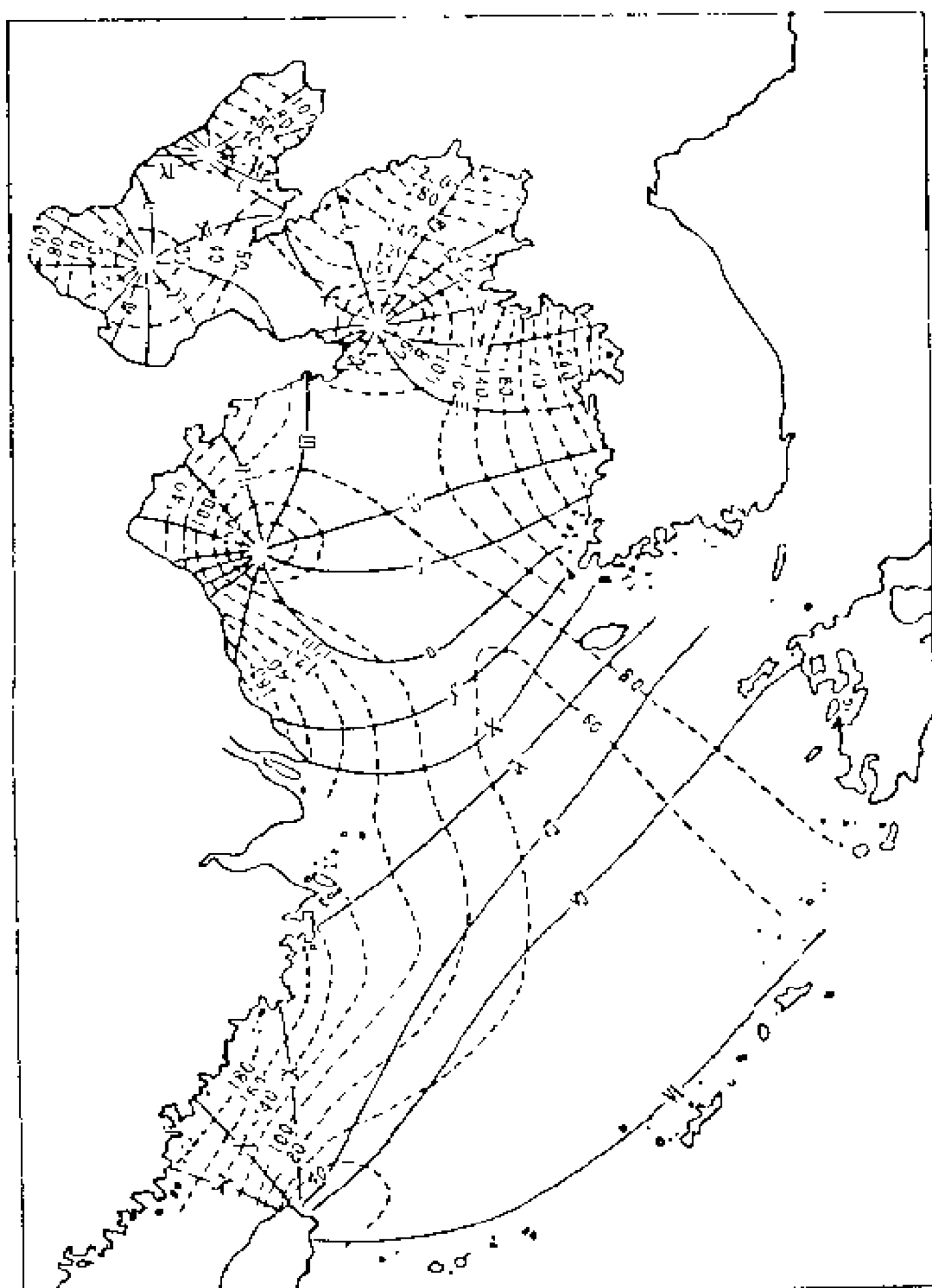
称之为八大分潮，而其中的 K_1, O_1, M_2 和 S_2 称之为四个主要分潮。这与大量实际观测相符。

§7.2 平衡潮理论的订正

7.2.1 实际海洋中的潮汐与潮流

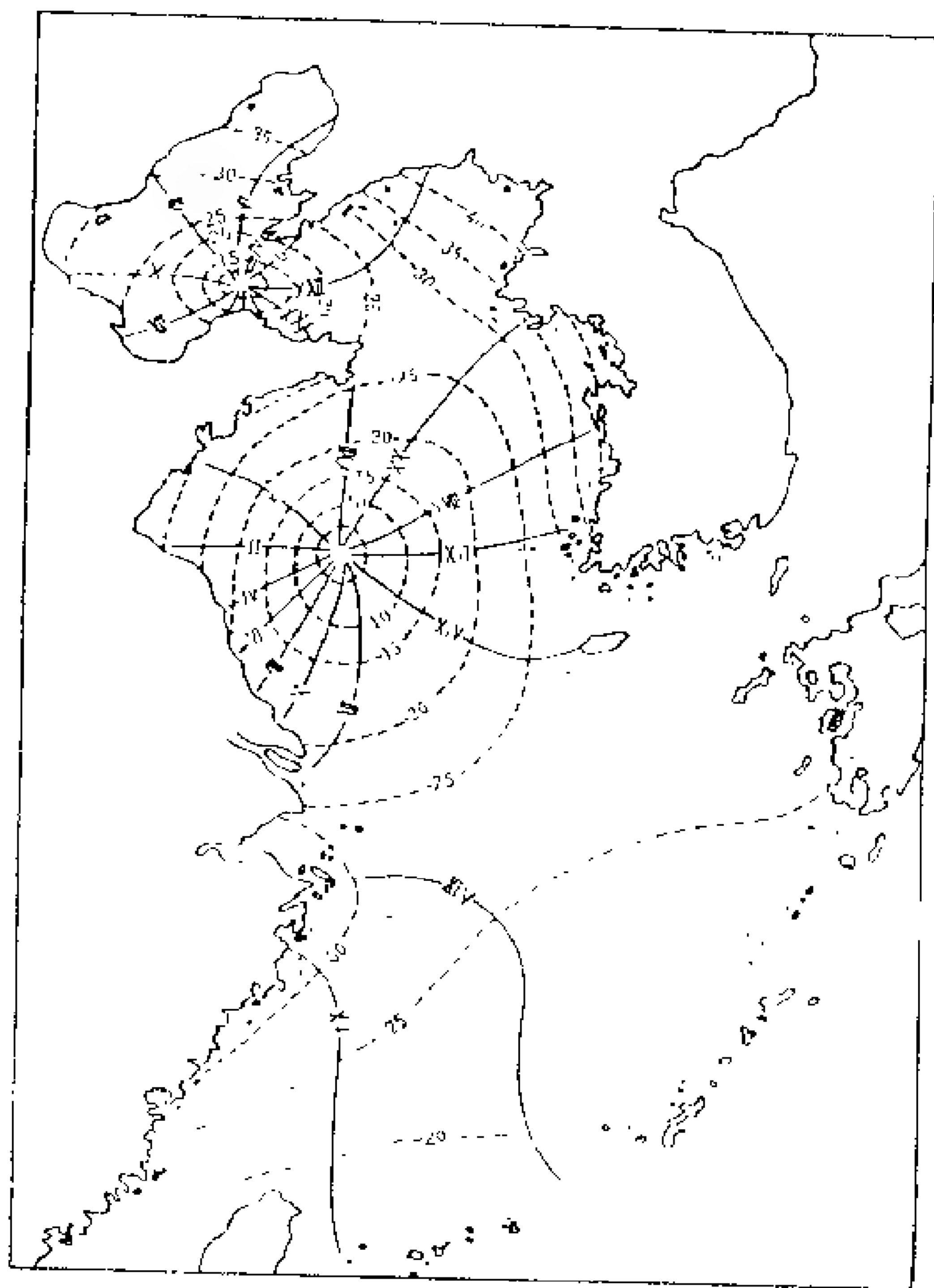
平衡潮理论的结论虽然可以说明实际海洋中的一些简单潮汐现象，但是由于平衡潮理论的假定与实际相差太远，并将原等于动力学的问题当成静力学问题来处理，因此平衡潮理论与实际海洋中的潮汐相差很远。实际海洋潮波是天体引潮力作用下的一种强迫波动，由于陆地存在，海底地形起伏变化，海底摩擦以及地球自转等的影响，潮波呈现十分复杂的图象。图 7—5—图 7—11 是我国近海和大洋的主要分潮波的等振幅线和等位相线分布图（沈育疆，1980；叶安乐等，1983；Brettschneider，1986；Luther，1975，Hendershott，1972）。

这些图是利用流体动力学基本方程求数值解的结果绘制的。这些图所展示的潮波分布特征与平衡潮的结论截然不同。



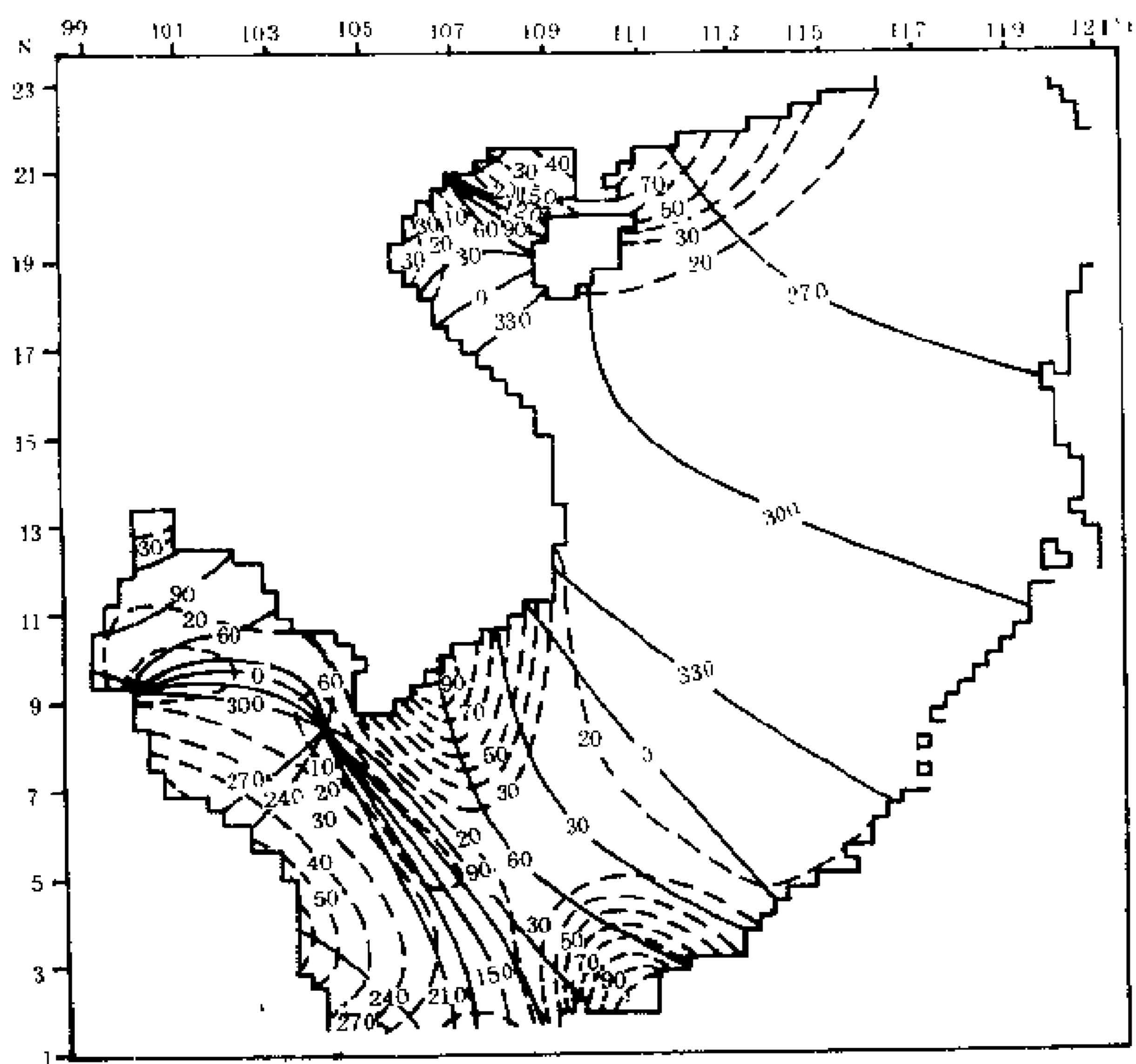
7—5　渤、黄、东海

实线:同潮时线(东八时),虚线:等振幅线(cm)(沈育疆　1980)



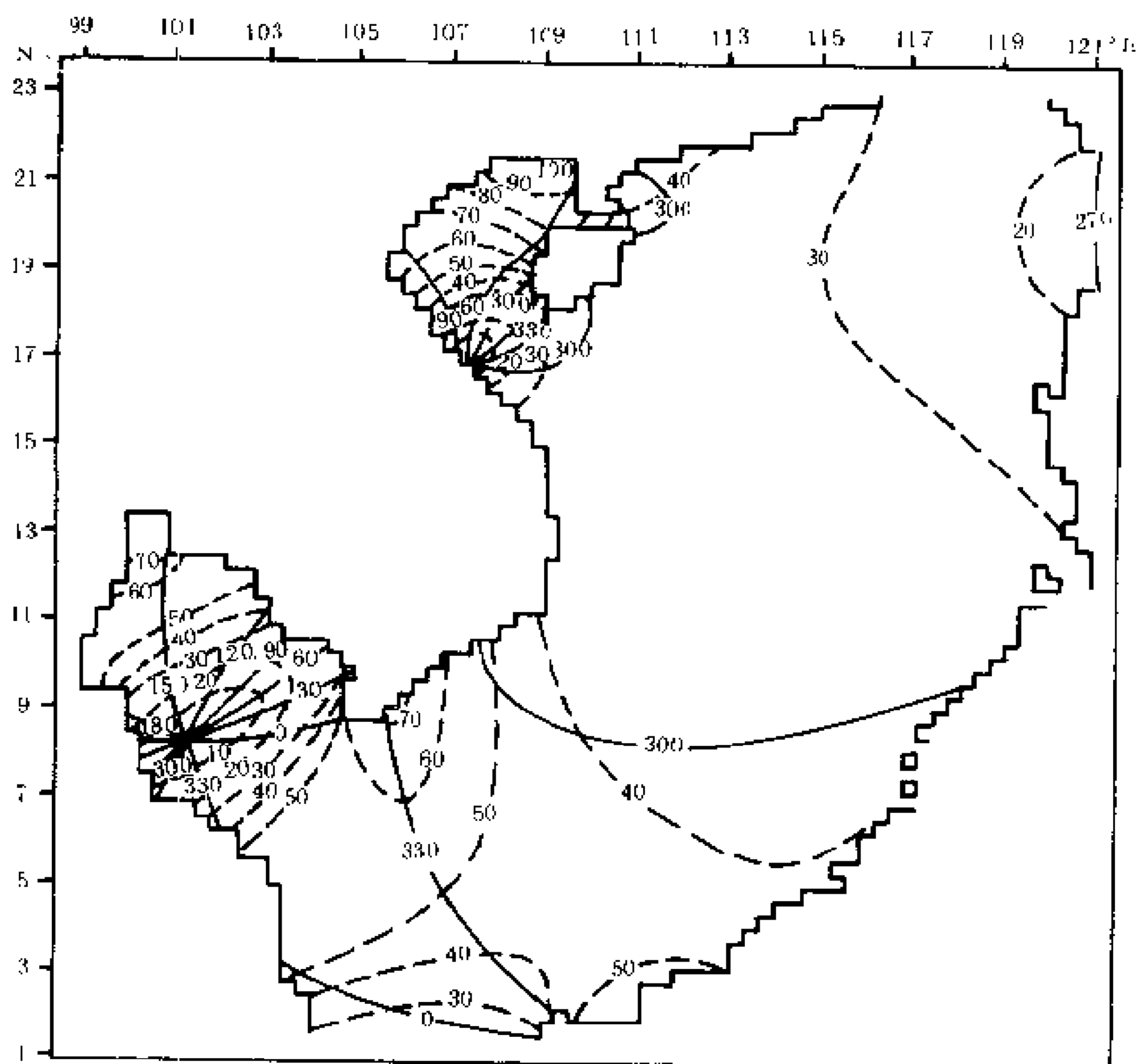
7—6　渤、黄、东海 K_1 等潮图

实线：同潮时线(东八时)，虚线：等振幅线(cm)



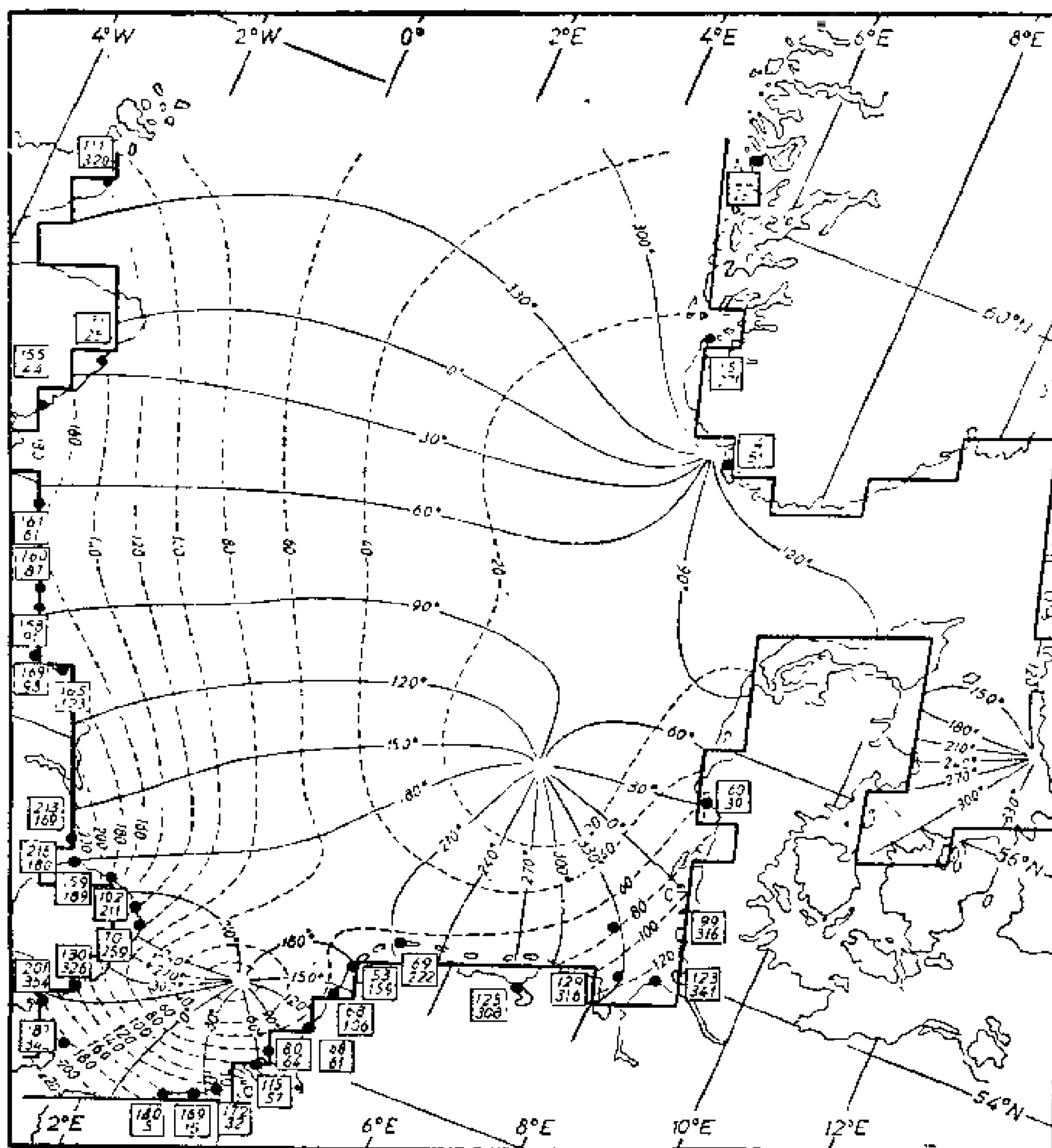
7—7　南海 M_2 同潮图

实线：同位相线(°)，虚线：等振幅线(cm)



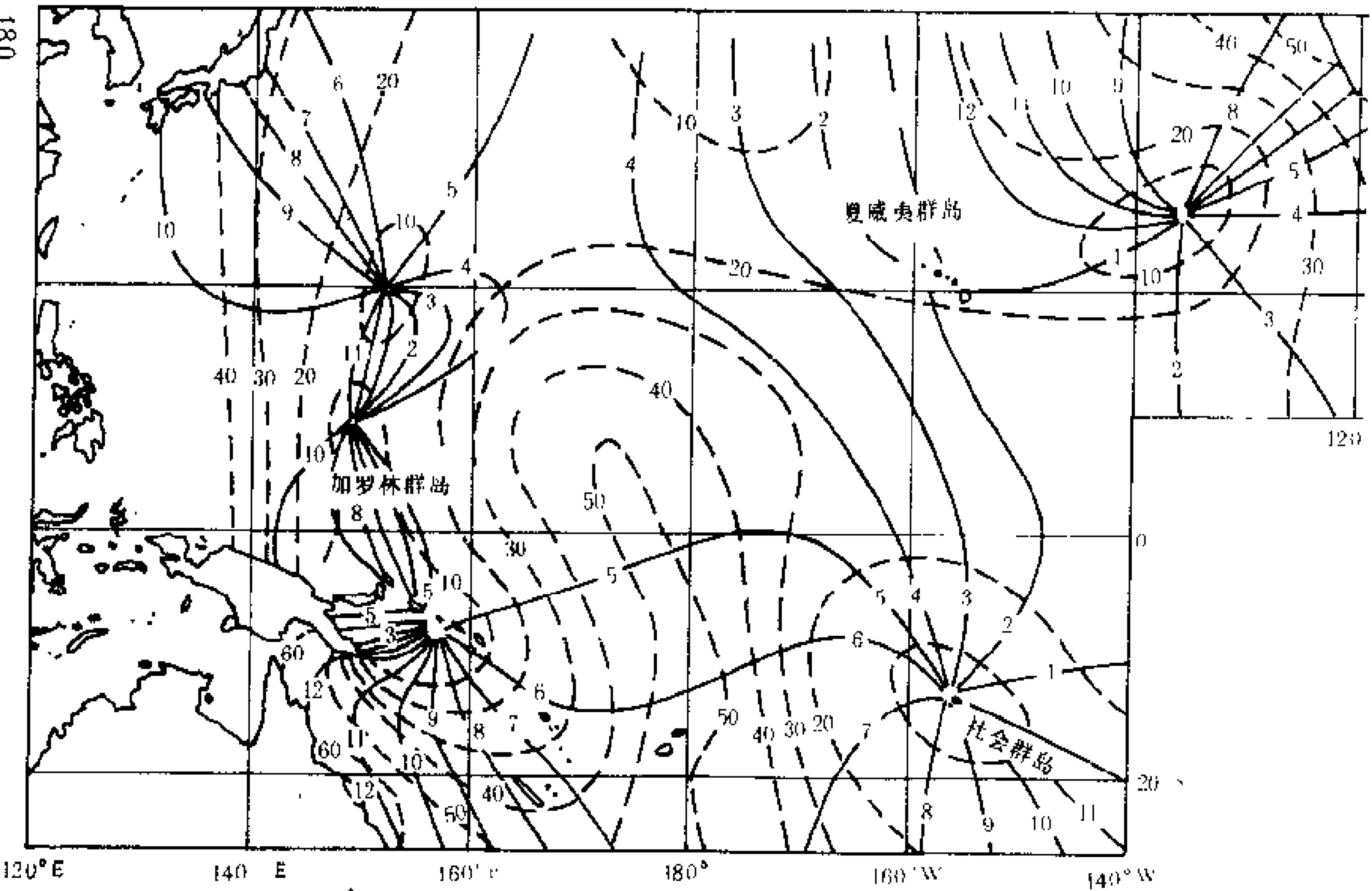
7—8 南海 K_2 同潮图

实线:同位相线(°),虚线:等振幅线(cm)

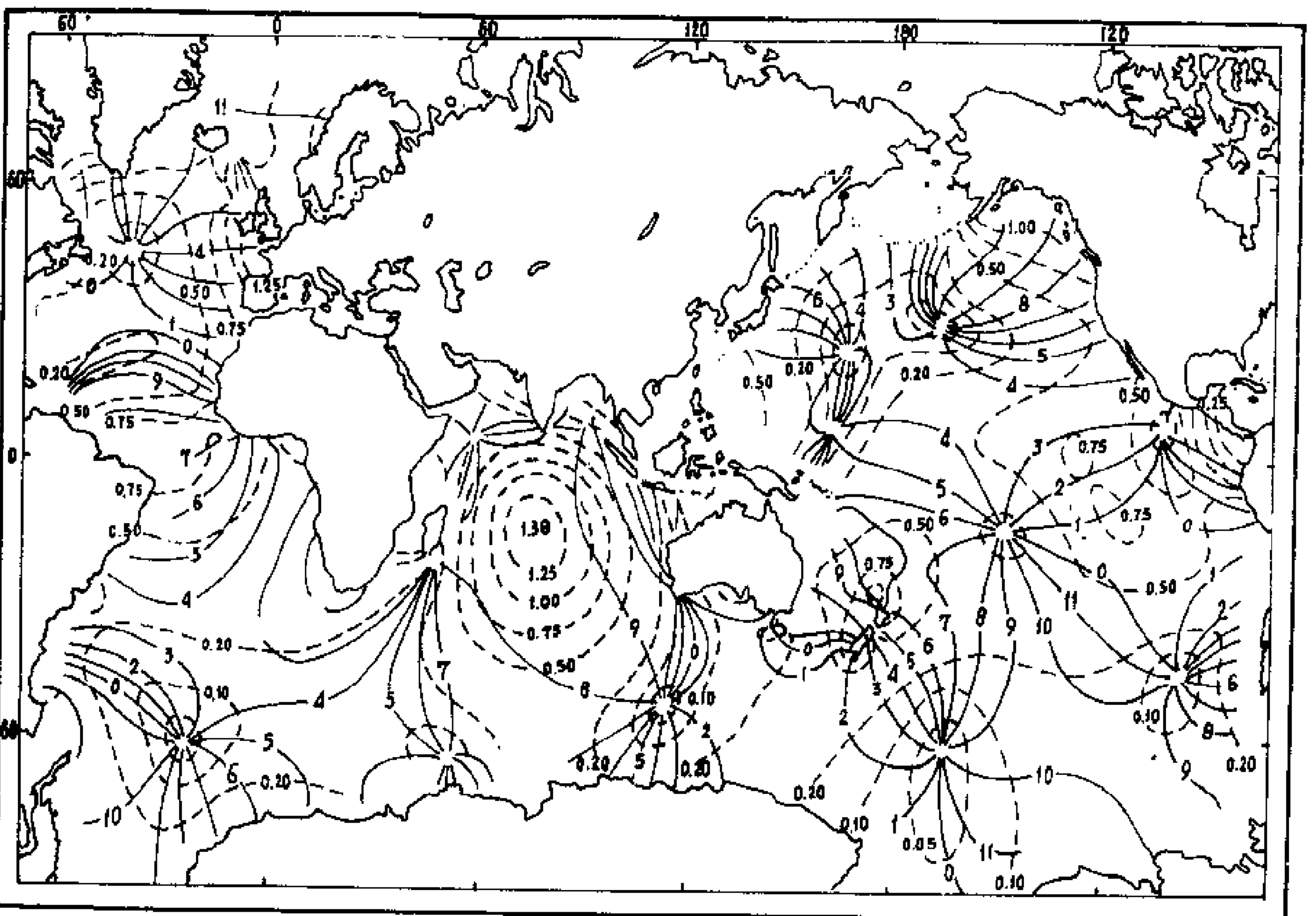


7—9　北海 M_2 分潮同潮图

(Brettschneider, 1968)



7-10 大西洋西部和中部 M_2 分潮同潮图 (Luther, 1975)



7—11　全球大洋 M_2 分潮同潮图　　(Hendershott, 1972)

图中最显著的特征是存在许多以振幅很小的区域为中心，同位相线绕这个中心向左或向右旋转，振动振幅由中心向外逐渐增大，并且等振幅线形成封闭曲线。像这样的系统称之为旋转潮波系统，那个振幅很小的区域称之为无潮点。

平衡潮理论结果表明，半日周期的平衡分潮的振幅比例于 $\cos^2\varphi$，在 $\varphi=0$ 处振幅最大，随着纬度的增大而减小，全日周期的平衡分潮的振幅比例于 $\sin2\varphi$，在 $\varphi=45°$ 处振幅最大，由此向赤道和向极地振幅逐渐减小。但如图 7—5—图 7—11 所示，实际潮汐的振幅分布没有这种规律。为了清楚地说明理论和实际的差别，表 7—4 列出了不同纬度处四大平衡分潮的平均振幅，表 7—5 列出了与对应纬度相近处的实际四大分潮振幅。这些观测结果表明，实际半日分潮的振幅并不是随纬度的增加而减小，全日分潮的振幅也不是在纬度 45°处最大，与平衡潮的结论不同。但是有一点与平衡潮结论一致，即，在同一地点，实际 M_2 分潮的振幅总大于实际 S_2 分潮的振幅，实际 K_1 分潮的振幅总是大于实际 O_1 分潮的振幅。许许多多的观测表明，在同一地点，实际半日（或全日）分潮的振幅大小次序与半日（或全日）平衡分潮平均系数的大小次序一致。

表 7—4　不同纬度处平衡分潮相对振幅

$\varphi/(°)$	$G(\varphi)[G(I)\cos u]_0$ 或 $0.46G(\varphi)G'(\omega)$			
	M_2	S_2	K_1	O_1
0	0.90809	0.42248	0	0
10	0.88074	0.41081	0.1814	0.1289
20	0.80189	0.37400	0.3410	0.2423
30	0.68109	0.3177	0.4594	0.3264
40	0.53291	0.2486	0.5224	0.3712
45	0.45406	0.2118	0.5305	0.3769
60	0.22703	0.1059	0.4594	0.3264

表 7—5　不同纬度处实际分潮振幅 H

代号	$\varphi/(°)$	H/m			
		M_2	S_2	K_1	O_1
A	5	0.32	0.13	0.41	0.34
B	10.07	0.20	0.08	0.33	0.29
C	20.17	0.41	0.13	0.19	0.11
D	40	0.12	0.04	0.25	0.08
E	40.5	1.17	0.33	0.33	0.26

根据前面关于平衡分潮位相表达式知，$(V_0+u)_{地}$除了与区时零时的天文变量 s_0, h_0, p_0, p_{10} 有关外，还与标准子午线经度 S^0 和地点经度 λ^0 有关。但是它与地点的纬度无关。由图 7—5—图 7—11 可见，实际海洋中分潮的位相随地点的变化很复杂，不仅与地点的经度有关，而且与地点的纬度有关。这是因为实际海洋潮汐受海洋形状，海底地形，摩擦和地球自转的影响所致。由实际观测资料分析发现，实际分潮的位相可表为

$$\omega t+(V_0+u)_{地}-K, \qquad (7.2-1)$$

其中 K 对固定地点为一常数，称为地方迟角，它表明实际分潮出现高潮(即最大值)的时刻要比平衡分潮出现高潮的时刻落后$\dfrac{K}{\omega}$小时。表 7—6 是几个经度相近但纬度不同的地点的 K 值和 $\tau(=\dfrac{K}{\omega})$值，它们随地点变化很大。

表 7—6　几个地点的 M_2 分潮的 K 值和 $\tau(=\frac{K}{\omega})$

站　号	$K/(°)$	τ/h
A	170	5.87
B	193	6.66
C	322	11.11
D	78	2.69
E	110	3.80
F	264	9.11

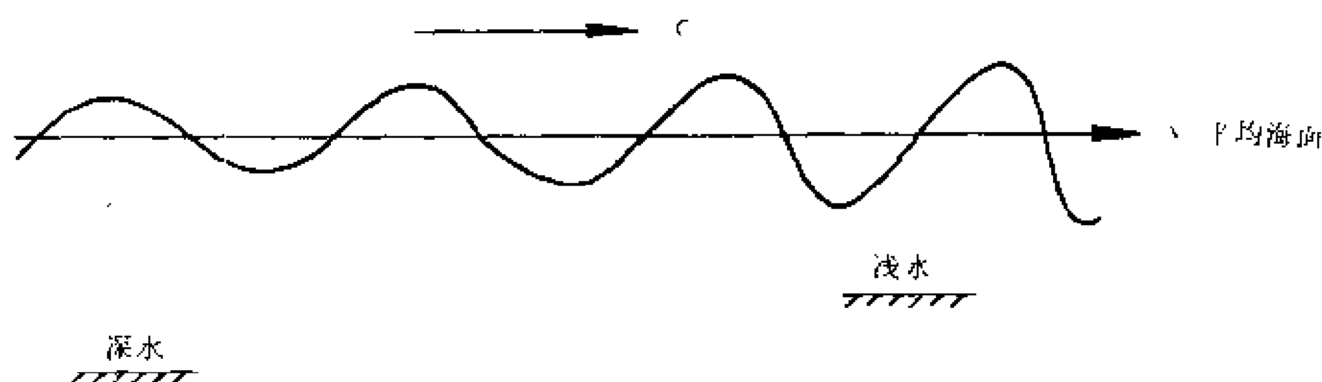


图 7—12　浅水区域潮位沿程变化示意图

当潮波由深水传入近岸进入浅水或者河口区域时，潮波将发生变形。图 7—12 是半日潮占优势区域中，潮波由深水进入浅水的过程中潮位的沿程变化曲线，图 7—13(a)是深水站 A 的潮位随时间变化曲线，图 7—13(b)是浅水站 B 的潮位随时间变化曲线。由此可见，深水处潮波波形接近正弦波，但随着水深变浅，波形发生畸变。在半日潮地区，主要分潮波为 M_2 和 S_2 分潮波，这种畸变就会产生 M_4，M_6，S_4，S_6，MS_4，……高阶谐波。因此，实际海洋中的分

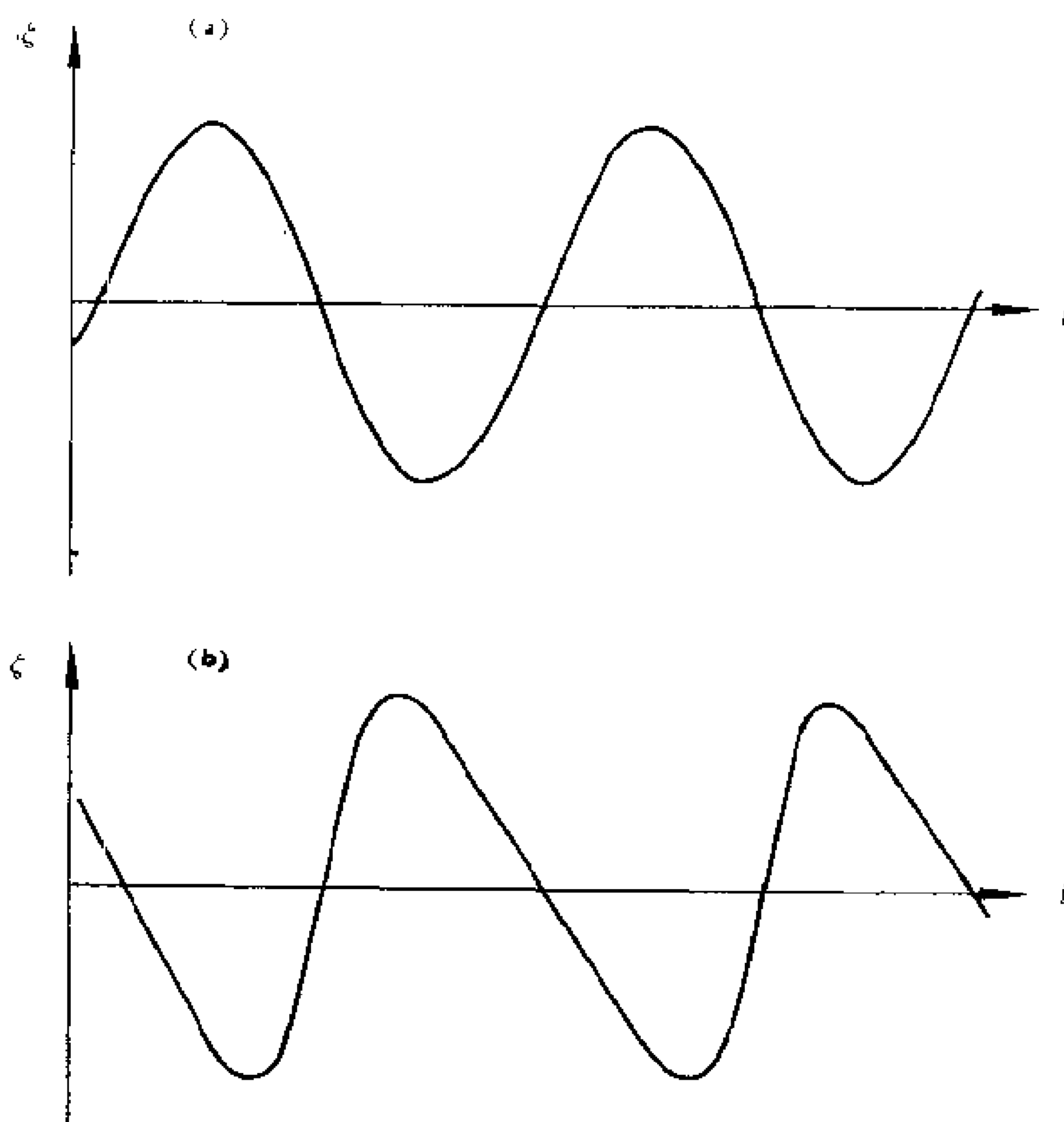


图 7—13　(a)深水站 A 的潮位随时间变化曲线

(b)浅水站 B 的潮位随时间变化曲线

潮波包括两部分(如果暂不考虑气象状况变化的影响),一部分是频率完全与平衡分潮对应的分潮波,称之为天文分潮波,另一部是

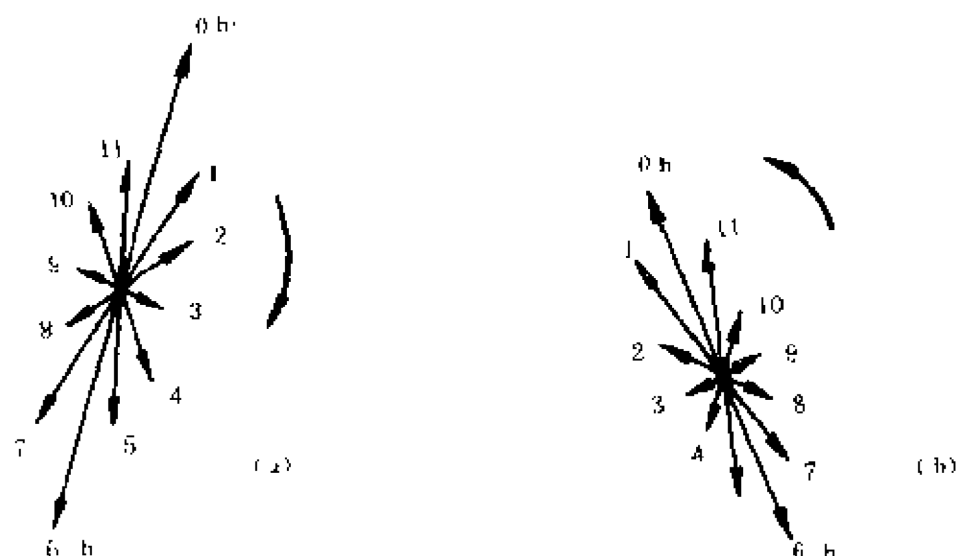


图 7—14 (*a*)表层潮流矢量图

(*b*)底层潮流矢量图

由于浅水和摩擦效应引起的频率为天文分潮波频率倍数或两个天文分潮波频率之和或之差的分潮波，称之为浅水分潮波。

实际海洋潮波不仅表现在海面的起伏运动，而且还表现在海水沿水平方向的流动。图 7—14 和图 7—15 是两个地点的潮流矢量图。由图可见，潮流运动是复杂的，如图 7—14 所示的潮流矢量端点的轨迹接近椭圆形状，但表层和底层的流矢量变化的方向相反，表层的为顺时针方向，底层的逆时针方向；图 7—15 所示的潮流矢量，在总体上是沿顺时针方向变化，但在某一段时间里出现沿逆时针方向变化，然后又恢复为沿顺时针方向变化。这种与潮流矢量总体变化方向相反的变化，称之为旋转潮流中的“倒转现象”。(叶安乐，1983*c*)。

实际海洋中的潮汐除了与天体的引潮力有关，还受气象状况变化的影响。由于气象要素有周期性的变化，因此海面相应地发生周期性变化，称之为气象潮，以区别于由天体引潮力在实际海洋中

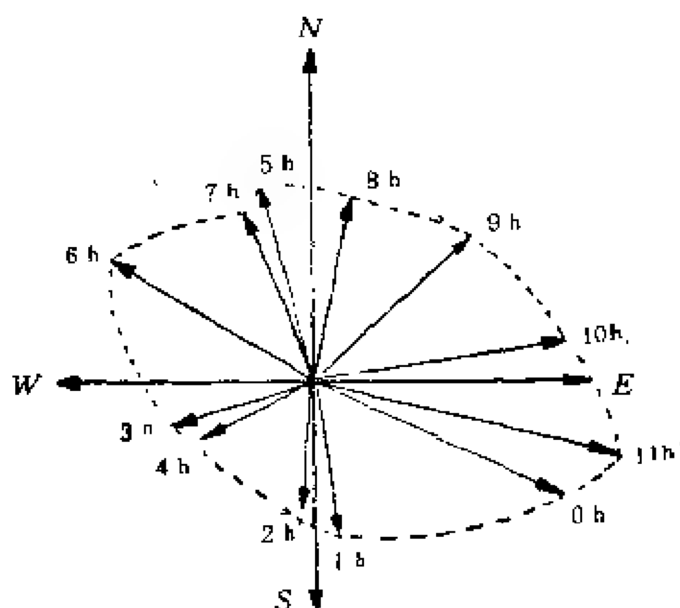


图 7—15 有倒转现象的潮流矢量图

引起的天文潮。气象要素，例如气温、日照量等的变化周期为一天，引起海面升降变化的周期也为一天。人们将它称为气象全日潮，记为 S_1。气象要素的年变化和半年变化，相应地产生海面变化周期为一年和半年的振动，分别以 S_a 和 S_{sa}表示。由于气象变化周期起因于太阳辐射的周期性，因此气象潮又叫做辐射潮。上述三个周期的气象潮 S_1，S_a，和 S_{sa}在平衡潮展开中可以找到它们的对应物。但是平衡分潮 S_1 和 S_a 的平均系数都很小，因此实际潮汐中的 S_1 和 S_a 实质上是气象因素引起的。只有 S_{sa}平衡分潮的平均系数较大，故实际的 S_{sa}可能是由天文和气象两者引起的。

7.2.2 分潮调和常数

由(7.1—14)式和(7.1—15)式知，$\bar{\zeta}_M=-\frac{V_M}{g}$和 $\bar{\zeta}_S=-\frac{V_S}{g}$，即平衡潮比例于引潮势，因此，平衡潮的展开实际上是引潮势的展开。展开后，每一个频率为 ω 的平衡分潮对应着一个具有相同频率的引潮力分量。对于实际海洋，每一个引潮力分量将引起一个具有

相同频率的天文分潮波，由它产生的海面周期性铅直振动称为一个天文分潮。天文潮波在浅水海区传播的过程中发生畸变，结果产生浅水潮波。和天文潮波一样，浅水潮波也可视为若干简谐波动之和，每一个谐波称之为一个浅水分潮波，由它产生的海面铅直振动称为一个浅水分潮。另外，还有气象分潮。实际潮汐因此可视为许许多多天文分潮、浅水分潮和气象分潮之和。

正如前一小节所述，通过实际资料分析发现，具有相同频率的天文分潮和平衡分潮的振幅不同，位相相差一个常数 K。设频率为 ω_i 的平衡分潮为

$$\bar{\zeta}_i = f_i \bar{H}_i \cos[\omega_i t + (V_0 + u)_{地}],$$

相应的天文分潮可表为

$$\zeta_i = f_i H_i \cos[\omega_i t + (V_0 + u)_{地} - K_i], \qquad (7.2-2)$$

其中 H_i 为天文分潮的平均振幅，K_i 称为地方迟角；H_i 和 K_i 仅为地点的函数，对固定地点为相对不变的量。如果利用(7.1—36)式和(7.1—39)式以$(V_0+u)_{区}$和$(V_0+u)_{格}$分别代替$(V_0+u)_{地}$，则得

$$\zeta_i = f_i H_i \cos[\omega_i t + (V_0 + u)_{区i} - K'_i], \qquad (7.2-3)$$

$$\zeta_i = f_i H_i \cos[\omega_i t + (V_0 + u)_{格i} - g_i], \qquad (7.2-4)$$

其中 K'_i 称为区时迟角，g_i 称为专用迟角，它们与地方迟角 K_i 的关系为

$$\left.\begin{aligned} K'_i &= K_i - n(S^\circ - \lambda^\circ) \\ g_i &= K_i + n\lambda^\circ - \omega_i \frac{S^\circ}{15} \end{aligned}\right\}, \text{(西经适用)} \qquad (7.2-5)$$

或

$$\left.\begin{aligned} K'_i &= K_i + n(S^\circ - \lambda^\circ) \\ g_i &= K_i - n\lambda^\circ + \omega_i \frac{S^\circ}{15} \end{aligned}\right\}。\text{(东经适用)} \qquad (7.2-6)$$

对全日周期分潮取 $n=1$，对半日周期分潮取 $n=2$。以上的 H_i 和 K_i

(K'_i, g_i)通常称之为分潮调和常数，其中 H_i 为分潮调和常数振幅，$K_i(K'_i, g_i)$称为分潮调和常数位相。(7.2—2)、(7.2—3)和(7.2—4)三式可统一表示成

$$\zeta_i = R_i \cos(\omega_i t - \theta_{0i}), \qquad (7.2-7)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} R_i &= f_i H_i, \\ \theta_{0i} &= K_i - (V_0 + u)_{地i} = K'_i - (V_0 + u)_{区i} \\ &= g_i - (V_0 + u)_{格i}. \end{aligned}\right\} \qquad (7.2-8)$$

通常先由实际资料分析求出 R_i 和 θ_{0i}，再依(7.2—8)式求得分潮调和常数 H_i 和 $K_i(K'_i, g_i)$。

潮波进入浅水后生成的浅水分潮波包括两种，一是倍潮波，一是复合潮波。频率为天文分潮波频率倍数的浅水分潮叫做倍潮波，频率为天文分潮波频率之和或之差的浅水分潮叫做复合潮波。根据动力学理论，频率为 ω_1 和 ω_2 的两个天文分潮波在浅水中传播，由于非线性效应，在一级近似下产生如下浅水分潮

$$\left.\begin{aligned} \zeta_{11} &= f_1^2 H_1^2 \cos[2\omega_1 t + 2(V_0 + u)_{地1} - 2K_1], \\ \zeta_{22} &= f_2^2 H_2^2 \cos[2\omega_2 t + 2(V_0 + u)_{地2} - 2K_2], \\ \zeta_{12s} &= f_1 f_2 H_1 H_2 \cos[(\omega_1 + \omega_2)t, \\ &\quad + (V_0 + u)_{地1} + (V_0 + u)_{地2} - (K_1 + K_2)], \\ \zeta_{12d} &= f_1 f_2 H_1 H_2 \cos[(\omega_1 - \omega_2)t, \\ &\quad + (V_0 + u)_{地1} - (V_0 + u)_{地2} - (K_1 - K_2)]. \end{aligned}\right\}$$

$$(7.2-9)$$

其中 ζ_{11}和 ζ_{22}为倍潮，ζ_{12s}和 ζ_{12d}为复合潮。它们的平均振幅和迟角由实际资料分析确定。设倍潮的调和常数振幅和调和常数位相以 H_{11}、H_{22}和 K_{11}、K_{22}表示，复合潮的调和常数振幅和位相以 H_{12s}、H_{12d}和 K_{12s}、K_{12d}表示，如果令

$$\left.\begin{aligned}
&f_{11}=f_1^2, f_{22}=f_2^2, f_{12s}=f_1f_2, f_{12d}=f_1f_2;\\
&\omega_{11}=2\omega_1, \omega_{22}=2\omega_2, \omega_{12s}=\omega_1+\omega_2, \omega_{12d}=\omega_1-\omega_2;\\
&(V_0+u)_{地11}=2(V_0+u)_{地1},\\
&(V_0+u)_{地22}=2(V_0+u)_{地2},\\
&(V_0+u)_{地12s}=(V_0+u)_{地1}+(V_0+u)_{地2},\\
&(V_0+u)_{地12d}=(V_0+u)_{地1}-(V_0+u)_{地2},
\end{aligned}\right\}$$

(7.2 — 10)

则(7.2—9)式可表为

$$\left.\begin{aligned}
&\zeta_{11}=f_{11}H_{11}\cos[\omega_{11}t+(V_0+u)_{地11}-K_{11}],\\
&\zeta_{22}=f_{22}H_{22}\cos[\omega_{22}t+(V_0+u)_{地22}-K_{22}],\\
&\zeta_{12s}=f_{12s}H_{12s}\cos[\omega_{12s}t+(V_0+u)_{地12s}-K_{12s}],\\
&\zeta_{12d}=f_{12d}H_{12d}\cos[\omega_{12d}t+(V_0+u)_{地12d}-K_{12d}]。
\end{aligned}\right\}$$

(7.2 — 11)

作为例子,如果取 $\omega_1=\omega_{M_2}$,$\omega_2=\omega_{s_2}$,按习惯,这时的分潮的代号 11 以名称 M_4 代替,22 以名称 S_4 代替,12s 以名称 MS_4 代替,12d 以名称 M_{sf}代替,这些分潮记为

$$\left.\begin{aligned}
&\zeta_{M_4}=f_{M_4}H_{M_4}\cos[\omega_{M_4}t+(V_0+u)_{地M_4}-K_{M_4}],\\
&\zeta_{S_4}=f_{S_4}H_{S_4}\cos[\omega_{S_4}t+(V_0+u)_{地S_4}-K_{S_4}],\\
&\zeta_{MS_4}=f_{MS_4}H_{MS_4}\cos[\omega_{MS_4}t+(V_0+u)_{地MS_4}-K_{MS_4}],\\
&\zeta_{M_{sf}}=f_{M_{sf}}H_{M_{sf}}\cos[\omega_{M_{sf}}t+(V_0+u)_{地M_{sf}}-K_{M_{sf}}]。
\end{aligned}\right\}$$

(7.2 — 12)

以上仅是考虑两个天文分潮波所产生的一级近似浅水分潮,对于更多的天文分潮波,类似地可产生更多的倍潮和复合潮。从(7.2—11)式,可将任一浅水分潮表示成与天文分潮相同的形式

$$\zeta_j=f_jH_j\cos[\omega_jt+(V_0+u)_{地j}-K_j] \quad (7.2-13)$$

只是其中的 f_j 和$(V_0+u)_{地j}$要由天文分潮的 f_i 和$(V_0+u)_{地i}$按(7.2—10)式确定。

至此，实际潮汐可表为天文分潮、浅水分潮和气象分潮之和

$$\zeta = \sum_k f_k H_k \cos[\omega_k t + (V_0 + u)_{地k} - K_k], \quad (7.2-14)$$

并且以后将天文分潮、浅水分潮和气象分潮统称为分潮。

7.2.3 分潮流和潮流调和常数

潮流与潮汐是潮波运动的两种表现形式，一个分潮对应着一个分潮流。由于潮流矢量的方向不断变化，将它沿 x 方向（指向东为正）和 y 方向（指向北为正）进行分解，设 W 为某时刻流矢量的大小，θ 为其方向，按习惯取沿正 y 方向流向 $\theta=0$，沿正 x 方向流向 $\theta=90°$，又设 u 为流矢量的 y 分量，v 为其 x 分量，于是潮流的北分量和东分量为

$$\left.\begin{aligned} u &= W\cos\theta \\ v &= W\sin\theta \end{aligned}\right\} \quad (7.2-16)$$

它们可表示成与潮汐表达式(7.2－14)中的分潮对应的许多调和振动的叠加，即

$$u = \sum_k f_k U_k \cos[(\omega_k t + (V_0 + u)_{地k} - \xi_k], \quad (7.2-17)$$

$$v = \sum_k f_k V_k \cos[(\omega_k t + (V_0 + u)_{地k} - \eta_k], \quad (7.2-18)$$

其中，(7.2－17)式的每一项称为分潮流的北方量，(7.2－18)式的每一项称为分潮流的东分量，U_k，ξ_k 称为分潮流北分量的调和常数，V_k，η_k 称为分潮流东分量的调和常数。

§7.3 潮汐与潮流的分析和预报

潮汐与潮流的分析和预报方法大体上分为两类，一类是调和分析和预报方法，另一类是非调和分析和预报方法。

7.3.1 早期调和分析方法

调和分析和预报是将实际观测到的潮汐(潮流)视为许许多多分潮(分潮流)的叠加,求出它们的调和常数,然后利用已知的调和常数预报未来的潮汐(潮流)。

早期的调和分析,由于当时只能依靠手工或手摇计算机进行计算,出现了一些卓有成效的计算方法。下面介绍两种过去比较广泛使用的方法。其中的基本思想对现代潮汐研究仍有实际意义。

Darwin(1883)提出了所谓的 Darwin 分析方法。大家知道,分潮当中有一些分潮,它们的频率 ω(从而周期 T)成倍数,例如 M_1,M_2,M_4,……,S_1,S_2,S_4,……等。这些频率成倍数的分潮称为分潮系,M_1,M_2,M_4……叫 M 分潮系,S_1,S_2,S_4,……叫 S 分潮系。Darwin 方法的主要特点是首先将不同的分潮系从观测资料中分离出来,然后再将分潮系中的分潮逐个分离出来,最后求出各分潮的调和常数。为了进行分潮系的分离,引进分潮日和分潮时的概念。与 24 小时接近的分潮周期,称为分潮日,例如 M_1 分潮的周期为 24.84 小时,与 24 接近,因此 M 分潮系的分潮日等于 24.84 小时,类似地,S 分潮系的分潮日等于 24 小时。分潮时等于分潮日的 1/24,例如,1M 分潮时=1.0350501 小时,1S 分潮时=1 小时。因为对某一个分潮系来说,于该分潮系的不同分潮日的同一分潮时时刻,所有分潮的位相相同,而其它分潮系所包含的分潮的位相则不断变化,因此,如果选择适当天数,将某一分潮系的不同分潮日的同一分潮时的观测资料相加,则该分潮系的分潮越加越大,而其他分潮系则被抵消。在过去,观测资料大多数使用目测,并且每小时观测一次,因此需要将钟表时间整点的观测资料转换成分潮时整点的资料。精确的转换是不可能的,只能近似地以四舍五入的方法,即选择与某分潮时最接近的钟表时,并将该钟表时的观测资料近似地当作某分潮时的观测资料,例如第一个 M 分潮日的第 1 个 M

分潮时等于 1.0350501 小时，与钟表时 1 时最接近，因此将钟表时 1 时的观测资料近似认为是 1M 分潮时的观测资料。一般说来，半个月，一个月和一年是适当天数，按某分潮系的同一分潮时叠加观测资料，可保留该分潮系，而消除其它分潮系。在各分潮系均从实际资料中分离出来以后，由于分潮系中各分潮的频率成倍数，故可用傅氏分析方法将各分潮的振幅 R 和初位相 θ_0 求出来，最后求得它们的调和常数 H 和 $K(K',g)$。

Doodson(1928,1954)提出了 Doodson 方法。分潮中所有周期相近的分潮，称为一个分潮族，比如半日分潮族，全日分潮族。Doodson 方法是首先将不同的分潮族从实测资料中分离出来，然后将分潮族中的各分潮分离出来。为了进行分潮族分离，Doodson 给出了 16 种基本线性组合(见表 7—7)，他进一步利用这些基本组合再作组合，得到主要包含某一分潮族贡献的函数值(见表 7—8)。下面对基本线性组合和主要包含某一分潮族贡献的函数作些说明。实际潮汐由若干分潮叠加而成

$$\zeta = \sum_k R_k \cos(\omega_k t - \theta_{0k}), \qquad (7.3-1)$$

基本线性组合，例如表 7—7 中的组合类型(1)

$$\begin{aligned}
\zeta_0 + \zeta_2 &= \zeta_t + \zeta_{t+2} \\
&= \sum_k R_k \cos(\omega_k t - \theta_{0k}) + \sum_k R_k \cos[\omega_k(t+2) - \theta_{0k}] \\
&= \sum_k 2\cos\omega_k R_k \cos(\omega_k t - \theta_{0k} + \omega_k) \\
&= \sum_k J R_k \cos(\omega_k t - \theta_{0k} + \eta)
\end{aligned} \qquad (7.3-2)$$

其中 $J = 2\cos\omega_k$，$\eta = \omega_k$。当 $\omega_k = 90°/\text{h}$，$J = 0$，所以类型(1)的基本线性组合可以消除 S_6 分潮。其它类型的基本线性组合，也可以表示成与(7.3—2)式相同的形式，只不过对不同类型的线性组合有不同的 J 和 η。然后利用这些被列于表 7—7 中的基本组合进行再组合求得与分潮族有关的函数，例如利用(1)，(5)，(8)，(9)和(12)类

型的组合可得主要包含半日分潮族贡献的函数 X_2，即

$$
\begin{aligned}
X_2 = \{&[(\zeta_0+\zeta_2+\zeta_4)-(\zeta_4+\zeta_6+\zeta_8)] \\
&+[(\zeta_2+\zeta_4+\zeta_6)-(\zeta_6+\zeta_8+\zeta_{10})] \\
&+[(\zeta_{12}+\zeta_{14}+\zeta_{16})-(\zeta_{16}+\zeta_{18}+\zeta_{20})] \\
&+[(\zeta_{14}+\zeta_{16}+\zeta_{18})-(\zeta_{18}+\zeta_{20}+\zeta_{22})]\} \\
&+\{[(\zeta_6+\zeta_8+\zeta_{10})-(\zeta_{10}+\zeta_{12}+\zeta_{14})] \\
&+[(\zeta_8+\zeta_{10}+\zeta_{12})-(\zeta_{12}+\zeta_{14}+\zeta_{16})] \\
&+[(\zeta_{18}+\zeta_{20}+\zeta_{22})-(\zeta_{22}+\zeta_{24}+\zeta_{26})] \\
&+[(\zeta_{20}+\zeta_{22}+\zeta_{24})-(\zeta_{24}+\zeta_{26}+\zeta_{28})]\},
\end{aligned}
$$

表 7—7　潮高的基本线性组合

类型	组　　合	J	η	消除的分潮
(1)	$\zeta_0+\zeta_2$	$2\cos\omega t$	ωt	S_6
(2)	$\zeta_0+\zeta_3$	$2\cos\frac{3}{2}\omega t$	$\frac{3}{2}\omega t$	S_4
(3)	$\zeta_0+\zeta_4$	$2\cos 2\omega t$	$2\omega t$	S_3
(4)	$\zeta_0+\zeta_6$	$2\cos 3\omega t$	$3\omega t$	S_2, S_6
(5)	$\zeta_0+\zeta_{12}$	$2\cos 6\omega t$	$6\omega t$	S_1
(6)	$\zeta_0-\zeta_2$	$2\cos(\omega t+90°)$	$\omega t+90°$	S_0
(7)	$\zeta_0-\zeta_3$	$2\cos(\frac{1}{2}\omega t+90°)$	$\frac{1}{2}\omega t+90°$	S_0, S_6
(8)	$\zeta_0-\zeta_4$	$2\cos(2\omega t+90°)$	$2\omega t+90°$	S_0, S_6
(9)	$\zeta_0-\zeta_6$	$2\cos(3\omega t+90°)$	$3\omega t+90°$	S_0, S_4, S_8
(10)	$\zeta_0-\zeta_8$	$2\cos(4\omega t+90°)$	$4\omega t+90°$	S_0, S_3, S_6
(11)	$\zeta_0-\zeta_{12}$	$2\cos(6\omega t+90°)$	$6\omega t+90°$	S_0, S_2, S_4, S_6, S_8
(12)	$\zeta_0+\zeta_2+\zeta_4$	$\sin 3\omega t/\sin\omega t$	$2\omega t$	S_4, S_8
(13)	$\zeta_0+\zeta_4+\zeta_8$	$\sin 6\omega t/\sin 2\omega t$	$4\omega t$	S_2, S_4, S_6
(14)	$\zeta_0+\zeta_8+\zeta_{16}$	$\sin 12\omega t/\sin 4\omega t$	$8\omega t$	S_1, S_2, S_4, S_8
(15)	$\zeta_0+\zeta_9+\zeta_{18}$	$\sin 13.5\omega t/\sin 4.5\omega t$	$9\omega t$	O_1(近似)
(16)	$\zeta_0+\zeta_5+\zeta_{10}+\zeta_{15}+\zeta_{20}$	$\sin 12.5\omega t/\sin 2.5\omega t$	$10\omega t$	M 分潮系(近似)

表 7—8　与分潮族有关的函数

与分潮族有关的函数	J_p	φ_p	利用的基本线性组合类型
X_0	$2\cos\omega_t \frac{\sin 12\omega_t}{\sin 4\omega_t} \frac{\sin 12.5\omega_t}{\sin 2.5\omega_t}$	$19\omega_t$	(1),(14),(16)
X_1	$32\cos\omega_t\cos 2\omega_t\cos 3\omega_t\cos^2(6\omega_t+90°)$	$18\omega_t+180°$	(1),(3),(4) (11),(11)
X_2	$32\cos^2\omega_t\cos 6\omega_t\sin^2 3\omega_t$	$14\omega_t+180°$	(1),(5),(8) (9),(12)
X_3	$4\cos(2\omega_t+90°)\cos(6\omega_t+90°)\times$ $\sin 12\omega_t\sin 13.5\omega_t/(\sin 4\omega_t\sin 4.5\omega_t)$	$25\omega_t+180°$	(8),(11), (14),(15)
X_4	$16\cos^2 3\omega_t\cos 6\omega_t\cos(\frac{1}{2}\omega_t+90°)$	$12.5\omega_t+90°$	(4),(4),(5) (7)
X_5	$4\cos 6\omega_t\cos(\omega_t+90°)[\frac{\sin 6\omega_t}{\sin 2\omega_t}]^2$	$15\omega_t+90°$	(5),(6), (13),(13)

上式中的小括号(　)为线性组合类型(12),可消除 S_4,S_8 分潮,中括号[　]为线性组合类型(8),可消除 S_0 和 S_8 分潮,花括号{　}中的前两个(或后两个)中括号之和[　]+[　]为线性组合类型(1),可消除 S_6 分潮,花括号内的四个中括号之和[　]+[　]+[　]+[　]为线性组合类型(9),可消除 S_1 消潮。总起来,再组合的结果,消除了 S_0,S_1,S_4,S_6,S_8,另外 S_3 虽未被消除,但实际上它很小,可以忽略,结果只有 S_2 保存下来。因此 X_2 为主要包含半日分潮贡献的函数。将 X_2 的组合进行归并

得

$$X_2 = \zeta_0 + 2\zeta_2 + \zeta_4 - 2\zeta_6 - 4\zeta_8 - 2\zeta_{10} + 2\zeta_{12} + 4\zeta_{14} + 2\zeta_{16} - 2\zeta_{18} - 4\zeta_{20} - 2\zeta_{22} + \zeta_{24} + 2\zeta_{26} + \zeta_{28} \quad。 \tag{7.3—3}$$

将式中的 ζ 以(7.3—1)式代入,可写成

$$X_2 = \sum_k J_2 R_k \cos(\omega_k t - \theta_{0k} + \eta_2) \qquad (7.3-4)$$

其中

$$J_2 = 32\sin^2 3\omega_k \cos^2 \omega_k \cos 6\omega_k$$

$$\eta_2 = 14\omega_k + 180°.$$

如将 $\omega_{M_2}, \omega_{S_2}, \omega_{M_4}, \omega_{0_1}$ 代入 J_2 内可得

$$J_2(\omega_{M_2}) = 24.38,$$

$$J_2(\omega_{S_2}) = 24.00,$$

$$J_2(\omega_{M_4}) = 0.10,$$

$$J_2(\omega_{0_1}) = 1.42,$$

显然，X_2 主要包含半日分潮的影响。利用表 7－8 中所列出的基本线性组合类型，可求得主要包含其它分潮族影响的函数 X_0, X_1, X_4, X_6，它们的 J 和 η 列在同一个表中。将 X_0, X_1, X_2, X_4, X_6 以统一的形式表示

$$X_p = \sum_k J_p R_k \cos(\omega_k t - \theta_{0k} + \eta_p), \qquad (7.3-5)$$

其中 $p=0,1,2,3,4,6$。再引进 Y_p，它们利用了与 X_p 完全相同的基本线性组合类型，仅仅是起始时刻不同，因此仅仅在位相上与 X_p 有一差值，即

$$Y_p = \sum_k J_p R_k \cos(\omega_k t - \theta_{0k} + \eta'_p), \qquad (7.3-6)$$

例如对 X_2 和 Y_2 来说，两者起始时刻差 3 小时，故 $\eta'_2 - \eta_2 = 3\omega_k$。用 (7.3－5)式和(7.3－6)式引入主函数

$$A_p = X_p + Y_p$$
$$= \sum_k 2J_p \cos\frac{1}{2}(\eta_p - \eta'_p) R\cos\left[\omega_k t - \theta_{0k} + \frac{1}{2}(\eta_p + \eta'_p)\right]$$

$$B_p = X_p - Y_p$$
$$= \sum_k -2J_p \sin\frac{1}{2}(\eta_p - \eta'_p) R\sin\left[\omega_k t - \theta_{0k} + \frac{1}{2}(\eta_p + \eta'_p)\right]$$

令

$$\left.\begin{aligned} a_\nu &= 2J_\nu\cos\frac{1}{2}(\eta_\nu - \eta'_\nu), \\ b_\nu &= -2J_\nu\sin\frac{1}{2}(\eta_\nu - \eta'_\nu), \\ \delta_\nu &= \theta_{0k} - \frac{1}{2}(\eta_\nu - \eta'_\nu), \end{aligned}\right\} \qquad (7.3-7)$$

于是主函数表为

$$A_\nu = \sum_k a_\nu R_k\cos(\omega_k t - \delta_\nu), \qquad (7.3-8)$$

$$B_\nu = \sum_k b_\nu R_k\sin(\omega_k t - \delta_\nu), \qquad (7.3-9)$$

(7.3－8)和(7.3－9)式的左边 A_ν 和 B_ν 由实际观测资料求得，它们主要包含 P 分潮族的贡献，其余分潮的影响可忽略不计，因此可利用(7.3－8)式和(7.3－9)式将 P 分潮族的各个分潮分离出来。下面介绍一年观测资料情况下，将分潮族内所包含的分潮分离出来的做法。将时间 t 改用以每天零时起算的时间 t'，日期顺序数以 s 表示，则

第一天　$s = 0$,　$t = 0$,　$t' = 0$

第二天　$s = 1$,　$t = 24$,　$t' = 0$

第三天　$s = 2$,　$t = 48$,　$t' = 0$

第 n 天　$s = (n-1)$,　$t = 24\times(n-1)$,　$t' = 0$

利用这些，(7.3－8)式和(7.3－9)式变成

$$A_\nu = \sum_k a_\nu R_k\cos(\omega_k t' + s\tilde{\omega}_k - \delta_\nu),$$

$$B_p = \sum_k a_p R_k \sin(\omega_k t' + s\tilde{\omega}_k - \delta_p),$$

其中 $\tilde{\omega}_k = 24\omega_k$。如果从每天 $t'=0$ 时刻组合观测资料，求出 X_p, Y_p，于是主函数可表为

$$A_p = \sum_k a_p R_k \cos(s\tilde{\omega}_k - \delta_p), \qquad (7.3-10)$$

$$B_p = \sum_k b_p R_k \sin(s\tilde{\omega}_k - \delta_p)。 \qquad (7.3-11)$$

将以上两式展开可得

$$A_p = \sum_k (E_k \cos s\tilde{\omega}_k + F_k \sin s\tilde{\omega}_k) \qquad (7.3-12)$$

$$B_p = \sum_k (E'_k \cos s\tilde{\omega}_k + F'_k \sin s\tilde{\omega}_k), \qquad (7.3-13)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} E_k &= a_p R_k \cos\delta_p, \\ F_k &= a_p R_k \sin\delta_p, \\ E'_k &= -b_p R_k \sin\delta_p, \\ F'_k &= b_p R_k \cos\delta_p。 \end{aligned}\right\} \qquad (7.3-14)$$

如果取中间日期 $s=0$，一年资料取 $s=-177$——$+177$，则在此期间内，用(7.3—12)式对 365 个均匀实测值 A_p 作平方逼近，即要求

$$D = \sum_{s=-177}^{177} \left[\sum_{k=1}^{N} (E_k \cos\tilde{\omega}_k s + F_k \sin\tilde{\omega}_k s) - A_p\right]^2 = \text{最小},$$

其条件为

$$\frac{\partial D}{\partial E_j} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial F_j} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \cdots\cdots N, \qquad (7.3-15)$$

其中 N 应理解为 p 分潮族内的分潮个数，而不是所有分潮的个数。由(7.3—15)式得两个方程组

$$\sum_s \left[\sum_k (E_k \cos\tilde{\omega}_k s \cos\tilde{\omega}_j s + F_k \sin\tilde{\omega}_k s \cos\tilde{\omega}_j s) - A_p \cos\tilde{\omega}_j s\right] = 0,$$

$$(7.3-16)$$

$$\sum_{s}\left[\sum_{k}E_{k}\cos\tilde{\omega}_{k}s\sin\tilde{\omega}_{j}s+F_{k}\sin\tilde{\omega}_{k}s\sin\tilde{\omega}_{j}s)-A_{s}\sin\tilde{\omega}_{j}s\right]=0。$$

(7.3 — 17)

大致以$\triangle s$=29.53 天的间隔将 s 分成若干段，每段的中心记为 $\bar{s}$。考虑到 s 为整数，则 $\bar{s}$ 可取为－163，－133，－103，－74，－44，－15，15，44，73，103，133，163。这样，在每一段内 $\tilde{\omega}s$ 可写成

$$\tilde{\omega}s=\tilde{\omega}(s-\bar{s})+\tilde{\omega}\bar{s}。\qquad (7.3-18)$$

利用(7.3—18)式，并注意到关系式(7.3—14)，由(7.3—16)式可得下列两个方程组，

$$\sum_{k}a_{r}R_{k}\cos\delta_{r}\sum_{\bar{s}}\cos\tilde{\omega}_{k}\bar{s}\cos\tilde{\omega}_{j}\bar{s}\sum_{s-\bar{s}}\cos\tilde{\omega}_{k}(s-\bar{s})\cos\tilde{\omega}_{j}(s-\bar{s})$$
$$=\sum_{\bar{s}}\cos\tilde{\omega}_{j}\bar{s}\sum_{s-\bar{s}}A_{s}\cos\tilde{\omega}j(s-\bar{s}),\qquad (7.3-19)$$

$$\sum_{k}a_{r}R_{k}\cos\delta_{r}\sum_{\bar{s}}\sin\tilde{\omega}_{k}\bar{s}\sin\tilde{\omega}_{j}\bar{s}\sum_{s-\bar{s}}\sin\tilde{\omega}_{k}(s-\bar{s})\sin\tilde{\omega}_{j}(s-\bar{s})$$
$$=\sum_{\bar{s}}\sin\tilde{\omega}_{j}\bar{s}\sum_{s-\bar{s}}-A_{s}\sin\tilde{\omega}_{j}(s-\bar{s}),\qquad (7.3-20)$$

类似地，由(7.3—17)式也可得两个方程方程组

$$\sum_{k}a_{r}R_{k}\sin\delta_{r}\sum_{\bar{S}}\sin\tilde{\omega}_{k}\bar{s}\sin\tilde{\omega}_{j}\bar{s}\sum_{s-\bar{s}}\cos\tilde{\omega}_{k}(s-\bar{s})\cos\tilde{\omega}_{j}(s-\bar{s})$$
$$=\sum_{\bar{s}}\sin\tilde{\omega}_{j}\bar{s}\sum_{s-\bar{s}}A_{s}\cos\tilde{\omega}_{j}(s-\bar{s}),\qquad (7.3-21)$$

$$\sum_{k}a_{r}R_{k}\sin\delta_{r}\sum_{\bar{s}}\cos\tilde{\omega}_{k}\bar{s}\cos\tilde{\omega}_{j}\bar{s}\sum_{s-\bar{s}}\sin\tilde{\omega}_{k}(s-\bar{s})\sin\tilde{\omega}_{j}(s-\bar{s})$$
$$=\sum_{\bar{s}}\cos\tilde{\omega}_{j}\bar{s}\sum_{s-\bar{s}}A_{s}\sin\tilde{\omega}_{j}(s-\bar{s}),\qquad (7.3-22)$$

其中 j=1，2，3，……N，N 为分潮族的分潮个数。为了手工计算简单化，令

$$d_{c}=2\cos\tilde{\omega}_{j}(s-\bar{s})$$

$$d_s = 2\sin\tilde{\omega}_j(s-\bar{s})$$
$$m_c = 2\cos\tilde{\omega}_j\bar{s}$$
$$m_s = 2\sin\tilde{\omega}_j\bar{s}$$

并且当 $0\leqslant|d_c,d_s,m_c,m_s|<0.5$ 时，取值为 0，当 $0.5\leqslant|d_c,d_s,m_c,m_s|<1.5$ 时，取值为 1，当 $1.5\leqslant|d_c,d_s,m_c,m_s|\leqslant 2$ 时，取值为 2。于是(7.3－19)－(7.3－22)式可记为

$$\sum_k a_p R_k\cos\delta_p \sum_{\bar{s}} m_c\cos\tilde{\omega}_k\bar{s}\sum_{s-\bar{s}} d_c\cos\tilde{\omega}_k(s-\bar{s}) = \sum_{\bar{s}} m_c\sum_{s-\bar{s}} d_c A_p, \qquad (7.3-23)$$

$$\sum_k a_p R_k\cos\delta_p \sum_{\bar{s}} m_s\sin\tilde{\omega}_k\bar{s}\sum_{s-\bar{s}} d_s\sin\tilde{\omega}_k(s-\bar{s}) = \sum_{\bar{s}} m_s\sum_{s-\bar{s}} -d_s A_p, \qquad (7.3-24)$$

$$\sum_k a_p R_k\sin\delta_p \sum_{\bar{s}} m_s\sin\tilde{\omega}_k\bar{s}\sum_{s-\bar{s}} d_c\cos\tilde{\omega}_k(s-\bar{s}) = \sum_{\bar{s}} m_s\sum_{s-\bar{s}} d_c A_p, \qquad (7.3-25)$$

$$\sum_k a_p R_k\sin\delta_p \sum_{\bar{s}} m_c\cos\tilde{\omega}_k\bar{s}\sum_{s-\bar{s}} d_s\sin\tilde{\omega}(s-\bar{s}) = \sum_{\bar{s}} m_c\sum_{s-\bar{s}} d_s A_p。 \qquad (7.3-26)$$

这是由(7.3－12)式导出的四个方程组，同样由(7.3－13)式也可导出和 B_p 有关的类似的四个方程组。由这八个方程组可以求出 $R_k\cos\delta_p$ 和 $R_k\sin\delta_p$，再利用(7.3－7)式的第三式，可求出分潮的振幅 R_k 和初位相 θ_{0k}，最后求出分潮的调和常数。

7.3.2 潮汐最小二乘法分析

现在，很复杂的潮汐调和分析已经可以利用快速电子计算机

来完成了，因此，不需要像早期调和分析方法那样分阶段地进行，可以直接从实测潮汐将所有分潮分离出来。在应用电子计算机分析潮汐的方法中，最小二乘法是一种有效的和应用广泛的方法（参见陈宗镛，1980）

设潮汐可以视为由 M 个分潮叠加而成

$$\begin{aligned}\zeta &= A_0 + \sum_{k=1}^{M} R_k\cos(\omega_k t - \theta_{0k}) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{M}(A_k\cos\omega_k t + B_k\sin\omega_k t),\end{aligned} \qquad (7.3-27)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A_k &= R_k\cos\theta_{0k}, \\ B_k &= R_k\sin\theta_{0k}。\end{aligned}\right\} \qquad (7.3-28)$$

一年是能使所有分潮分离的合适长度。若一年取 365 天，每小时读取一次记录，总共资料个数 $2N=24\times365=8520$。若取一年的中间时刻为时间原点，则观测的时间区间为$[-N,N]$。用(7.3－27)式对均匀分布的 $2N$ 次实测潮位 $\zeta(j)$ 作平方逼近，要求其偏差的平方之和最小，即

$$D = \sum_{j=-N}^{N}{}'' \left[\sum\zeta(j) - \sum_{k=0}^{M}(A_k\cos\omega_k j + B_k\sin\omega_k j)\right]^2 = \text{最小}$$

其中“$''$”表示首尾两项取半，$k=0$ 时，$\omega_0=0$，即 $k=0$ 的一项等于 A_0。使 D 最小的条件为

$$\frac{\partial D}{\partial A_i} = 0, \quad \frac{\partial D}{\partial B_i} = 0, \quad i = 0,1,2,3,\cdots\cdots M$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=-N}^{N}{}'' \sum_{k=0}^{M}(A_k\cos\omega_k j + B_k\sin\omega_k j)\cos\omega_i j &= \sum_{j=-N}^{N}{}''\zeta(j)\cos\omega_i j, \\ \sum_{j=-N}^{N}{}'' \sum_{k=0}^{M}(A_k\cos\omega_k j + B_k\sin\omega_k j)\sin\omega_i j &= \sum_{j=-N}^{N}{}''\zeta(j)\sin\omega_i j。\end{aligned}\right\}$$

(7.3－29)

由于

$$\sum_{j=-N}^{N}{}^{'}\sin\omega_k j\cos\omega_i j = \sum_{j=-N}^{N}{}^{'}\cos\omega_k j\sin\omega_i j = 0, \quad (7.3-30)$$

以及令

$$\left.\begin{aligned} F_{ik} &= \sum_{j=-N}^{N}{}^{'}\cos\omega_i j\cos\omega_k j, \\ G_{ik} &= \sum_{j=-N}^{N}{}^{'}\sin\omega_i j\sin\omega_k j, \end{aligned}\right\} \quad (7.3-31)$$

因此(7.3—29)式可表为

$$\sum_{k=0}^{M} A_k F_{ik} = \sum_{j=-N}^{N}{}^{'}\zeta(j)\cos\omega_i j, \quad i = 0,1,2,\cdots\cdots M, \quad (7.3-32)$$

$$\sum_{k=1}^{M} B_k G_{ik} = \sum_{j=-N}^{N}{}^{'}\zeta(j)\sin\omega_i j, \quad i = 1,2,\cdots\cdots M。 \quad (7.3-33)$$

由于已知潮汐资料和分潮频率，因此由方程组(7.3—32)可以求出$(M+1)$个A值，由方程组(7.3—33)可以求出M个B值。在计算机上实现对这两个方程组求解并不困难，首先计算(7.3—32)式右端项和(7.3—33)式的右端项，即先计算出$\sum_{j=-N}^{N}{}^{'}\zeta(j)\cos\omega_i j$和$\sum_{j=-N}^{N}{}^{'}\zeta(j)\sin\omega_i j$。其次算出$F_{ik}$和$G_{ik}$，它们是(7.3—31)式所示的求和形式，但可以化简为

$$
\left.\begin{aligned}
F_{ik} &= \sum_{j=-N}^{N}{}' \cos\omega_i j \cos\omega_k j = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin N(\omega_i-\omega_k)}{\tan\frac{1}{2}(\omega_i-\omega_k)} + \frac{\sin N(\omega_i+\omega_k)}{\tan\frac{1}{2}(\omega_i+\omega_k)}\right], i \neq k \\
G_{ik} &= \sum_{j=-N}^{N}{}' \sin\omega_i j \sin\omega_k j = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin N(\omega_i-\omega_k)}{\tan\frac{1}{2}(\omega_i-\omega_k)} - \frac{\sin N(\omega_i+\omega_k)}{\tan\frac{1}{2}(\omega_i+\omega_k)}\right], i \neq k \\
F_{ii} &= N + \frac{\sin N\omega_i \cos N\omega_i}{\tan\omega_i}, \quad i \neq 0 \\
G_{ii} &= N - \frac{\sin N\omega_i \cos N\omega_i}{\tan\omega_i}, \quad i \neq 0 \\
F_{00} &= 2N。
\end{aligned}\right\}
\tag{7.3-34}
$$

在实际应用中，是按(7.3—34)式计算 F_{ik}和 G_{ik}而不是按(7.3—31)式计算。第三，在完成以上关于方程组右端项的计算和方程组系数的计算之后，便可以由方程组解出 A 和 B。最后依关系式(7.3—28)，求得各分潮的振幅 R 和初位相 θ_0，进而求出它的调和常数 H 和 $K(K',g)$。

7.3.3 潮汐响应分析

前面讨论了潮汐调和分析，其特点是将实际潮汐视为一系列预先指定的频率振动之和，也就是说，规定哪一些频率的分潮出现，哪一些频率的分潮不出现。在深水区域，利用调和分析方法得到的调和常数进行预报，预报值与实际潮汐符合良好，然而在一些浅水区域，发现实测值与预报值之差值(剩余值)很大。例如 Rossiter 和 Lennon(1968)对英国泰晤士河口两个站的剩余值进行分析，发现其中每天偶数次(2，4，6，8，10)的振动很强；我国长江口也是浅水效应显著的地方，由剩余值分析发现高于每天 8 次的振动仍很重要。这一小节介绍的响应法分析则不需要规定什么频率出现，什么频率不出现，是对深水和浅水都能适用的潮汐分析方法。

海洋潮汐$\zeta(t)$是海洋这个物理系统对致潮物理量$V(t)$的响应。对深水大洋来说，它可以被认为是一个线性系统或弱非线性系统，于是输入函数$V(t)$与输出函数$\zeta(t)$的关系可表为

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)V(t-\tau)d\tau, \qquad (7.3-35)$$

其中$w(\tau)$为系统的脉冲响应，或称为权函数。对于近海，非线性效应不可忽略，因而为一非线性系统，于是输入函数与输出函数有如下关系

$$\zeta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} w(\tau)V(t-\tau)d\tau +$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w(\tau,\tau')V(t-\tau)V(t-\tau')d\tau d\tau + \cdots\cdots\cdots\cdots。$$

$$(7.3-36)$$

Munk 和 Cartwright(1965)首次采用这种输入与输出的响应关系研究潮汐，称做响应法。下面以线性响应关系式(7.3 35)为例对响应法作进一步讨论。

输入函数$V(t)$不仅包括天体引潮势，还包括大气压力，风和太阳辐射。Munk 和 Cartwright 在他们的研究中考虑了天体引潮势和太阳辐射。在地球表面，月球引潮势和太阳引潮势有如同(7.1—3)式所表达的形式

$$\Omega_M = \frac{\mu_0 M}{D}\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{a}{D}\right)^j P_j(\cos\theta), \qquad (7.3-37)$$

$$\Omega_S = \frac{\mu_0 S}{D_1}\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{a}{D_1}\right)^j P_j(\cos\theta_1), \qquad (7.3-38)$$

太阳辐射定义为

$$R(t) = \begin{cases} S_0 \dfrac{\overline{D}_1}{L_1}\cos\theta_1, 0 \leqslant \theta_1 \leqslant \dfrac{\pi}{2}, \\ 0, \qquad \dfrac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi, \end{cases}$$

其中 $S_0=(1367\pm7)\mathrm{W/m^2}$，为太阳常数。根据 Munk 和 Cartwright，白天的太阳辐射可展开为

$$R(t) = S_0 \frac{\overline{D}_1}{D_1}\{\frac{1}{2}P_1(\cos\theta_1) +$$

$$\sum_{j=2,4,6,\cdots\cdots} \frac{2j+1}{2}[(\frac{(1)(-1)\cdots(3-j)}{(2)(4)\cdots(2j+2)}]P_j(\cos\theta_1)\}。$$

(7.3－39)

设 η 表示 θ 或 θ_1，Legendre 多项式 $P_j(\cos\eta)$ 可用球调和函数表示，即

$$P_j(\cos\eta) = \frac{4\pi}{2j+1}\sum_{m=-j}^{j} Y_j^{m*}(\theta_X,\lambda_X)Y_j^m(\theta_C,\lambda_C),$$

(7.3－40)

其中 θ,λ 为格林尼治坐标中的余纬度和经度，X 和 C 分别指示观测地点和天体（太阳或月球），球调和函数

$$Y_j^m(\theta,\lambda) = U_j^m(\theta,\lambda) + iV_j^m(\theta,\lambda)$$

$$= (-1)^m[\frac{2j+1}{4\pi}]^{1/2}[\frac{(j-m)!}{(j+m)!}]^{1/2}P_j^m(\cos\theta)e^{im\lambda},$$

式中

$$P_j^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}P_j(x), \quad (j>0, \quad m=0,1,2,\cdots\cdots j)。$$

利用等式

$$(-1)^m Y_j^{m*}(\theta,\lambda) = Y_j^{-m}(\theta,\lambda),$$

(7.3－40)式可表为

$$P_j(\cos\eta) = \frac{4\pi}{2j+1}\{U_j^0(\theta_C,\lambda_C)U_j^0(\theta_X,\lambda_X) +$$

$$2\sum_{m=1}^{j}[U_j^m(\theta_C,\lambda_C)U_j^m(\theta_X,\lambda_X) +$$

$$V_j^m(\theta_C,\lambda_C)V_j^m(\theta_X,\lambda_X)]\},$$

表明(7.3－40)式的右端为实函数。将(7.3－40)式代入(7.3－

37)式、(7.3—38)式和(7.3—39)式分别得到

$$\Omega_M=\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}d_j^m(t)Y_j^m(\theta_X,\lambda_X),\qquad(7.3-40)$$

$$\Omega_S=\sum_{j=2}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}e_j^m(t)Y_j^m(\theta_X,\lambda_X),\qquad(7.3-41)$$

$$R(t)=\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{m=-j}^{j}f_j^m(t)Y_j^m(\theta_X,\lambda_X),\qquad(7.3-42)$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
d_j^m(t)&=\frac{\mu_0M}{D}\left(\frac{a}{D}\right)^j\frac{4\pi}{2j+1}Y_j^m(\theta_M,\lambda_M)\\
e_j^m(t)&=\frac{\mu_0S}{D_1}\left(\frac{a}{D_1}\right)^j\frac{4\pi}{2j+1}Y_j^m(\theta_S,\lambda_S)\\
f_j^m(t)&=\begin{cases}0, & (j=3,5,7\cdots\cdots),\\ S_0\left(\dfrac{\overline{D}_1}{D_1}\right)\dfrac{2\pi}{3}Y_1^m(\theta_s,\lambda_s), & (j=1),\\ S_0\left(\dfrac{\overline{D}_1}{D_1}\right)2\pi\dfrac{(1)(-1)\cdots(3-j)}{(2)(4)\cdots(2j+2)}Y_j^m(\theta_s,\lambda_s), & \\ \qquad (j=2,4,6\cdots\cdots)。 & \end{cases}
\end{aligned}\right\}\qquad(7.3-43)$$

实用上，将(7.3—35)式写成求和的形式

$$\zeta(t)=\sum_k w(k\triangle\tau)V(t+k\triangle\tau),k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots\cdots\qquad(7.3-44)$$

将(7.3—40)—(7.3—42)式代入上式，可表为

$$\zeta(t)=\sum_k\sum_j\sum_{m=-j}^{j}u_j^m(k\triangle\tau)C_j^m(t+k\triangle\tau)\qquad(7.3-45)$$

式中$C_j^m(t)$包括$d_j^m(t)$，$e_j^m(t)$，$f_j^m(t)$，$u_j^m=w(k\triangle\tau)Y_j^m(\theta_x,\lambda_x)$。通常取$\triangle\tau=2$ [illegible]，$k=0,\pm1,\pm2,\pm3$。$C_j^m(t)$根据天体坐标和地球中心到

天体的距离，依(7.3—43)式可以算出，于是利用(7.3—45)式对实测潮汐资料作平方逼近，即

$$D = \sum_{t=-T}^{T} \left[\zeta(t) - \sum_{k=-S}^{S} \sum_{m,j} w_j^m(2k) C_j^m(t+2k)\right]^2 = \text{最小},$$

可以估计出权函数 w_j^m.

Munk 和 Cartwright 应用这种方法分析了火奴鲁鲁和英国港口纽莱因的潮汐。纽莱因是一个典型的浅水港口，用 19 年的资料作了响应分析。由响应法作出的预报和由调和方法作出的预报进行了比较，发现前者的预报效果好于后者。

7.3.4　潮流短期观测的分析

如果潮流观测资料比较长而且是连续的，比如半月，一月，甚至一年的连续观测，则前面介绍的潮汐分析方法也适用于分析潮流，只是需要对潮流的北分量和东分量分别进行处理。

对于只有一天或两天的短期资料，频率很接近的一些分潮是不能互相分离的，只能将这些分潮当成一个整体来处理。在这些不能分离的分潮之中，有一个主要的，其余次要的则合并到这个主要分潮中而成为一项。合并后的项的平均振幅和频率不再是常数，因此称为准调和分潮。通常考虑六个准调和分潮，它们是 O_1 准调和分潮，K_1 准调和分潮，M_2 准调和分潮，S_2 准调和分潮，M_4 准调和分潮和 MS_4 准调和分潮。准调和分潮 O_1 是 Q_1，ρ_1，$2Q_1$，δ_1 等和 M_1 的一部分与分潮 O_1 合并的结果，准调和分潮 K_1 是 P_1，J_1，π_1，OO_1 等和 M_1 的一部分与 K_1 分潮合并的结果，准调和分潮 S_2 是 K_2，L_2，T_2，R_2 合并入 S_2 分潮的结果，准调和分 M_2 是 N_2，L_2，$2N_2$，ν_2，μ_2 等并入 M_2 分潮的结果，而准调和分潮 M_4 和 MS_4 是准调和分潮 M_2 和 S_2 所生成的浅水分潮。

根据方国洪(1974，1976，1981)，短期资料的潮位可表为

$$\zeta = X_0 + \sum_{k=1}^{6} D_k H_k \cos(p15°t - d_k - g_k), \quad (7.3-46)$$

而潮流的北分量和东分量可表为

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \sum_k D_k U_k \cos(p15°t - d_k - \xi_k), \\ v &= v_0 + \sum_k D_k V_k \cos(p15°t - d_k - \eta_k), \end{aligned}\right\} \quad (7.3-47)$$

其中 k 指示准调和分潮 $O_1, K_1, M_2, S_2, M_4, MS_4$；$(H, U, V)$ 和 (g, ξ, η) 为准调分潮的调和常数振幅和位相；D 和 d 为振幅系数和迟角订正，可由国家海洋局海洋科技情报研究所出版的《天文变量表》查得；$p=1,2,4$，分别用于全日、半日和四分之一日准调和分潮。D 和 d 随时间而变。$p15°$ 并不是准调和分潮的真正频率，准确的频率应是 $p15° - \dot{d}$，这里 d 上的黑圆点代表对时间的导数，因此这些准调和分潮的频率也是随时间而变的。但是由于每个准调和分潮中以与其同名的分潮占优势，从而这个频率在同名分潮频率上下作不大的变动。这样，在较短时间内，以中间时刻 $\overline{t}$ 所对应的 $\overline{D}, \overline{d}$ 近似代替 D 和 d，再令 $d^0 = \overline{d} - (p15° - \omega)\overline{t}$，则潮汐和潮流两个分量可近似表为

$$\zeta = X_0 + \sum_k \overline{D}_k H_k \cos(\omega_k t - d_k^0 - g_k) \quad (7.3-48)$$

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \sum_k \overline{D}_k U_k \cos(\omega_k t - d_k^0 - \xi_k), \\ v &= v_0 + \sum_k \overline{D}_k V_k \cos(\omega_k t - d_k^0 - \eta_k)。 \end{aligned}\right\} \quad (7.3-49)$$

设有 N 段短期潮流观测资料

$$\left.\begin{aligned} & w^{(1,1)}, w^{(1,2)}, \cdots\cdots w^{(1,j)}, \cdots\cdots w^{(1,n(1))} \\ & \theta^{(1,1)}, \theta^{(1,2)}, \cdots\cdots \theta^{(1,j)}, \cdots\cdots \theta^{(1,n(1))} \end{aligned}\right\},$$

$$\left.\begin{aligned} & w^{(2,1)}, w^{(2,2)}, \cdots\cdots w^{(2,j)}, \cdots\cdots w^{(2,n(2))} \\ & \theta^{(2,1)}, \theta^{(2,2)}, \cdots\cdots \theta^{(2,j)}, \cdots\cdots \theta^{(2,n(2))} \end{aligned}\right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} w^{(i,1)}, w^{(i,2)}, \cdots\cdots w^{(i,j)}, \cdots\cdots w^{(i,n(i))} \\ \theta^{(i,1)}, \theta^{(i,2)}, \cdots\cdots \theta^{(i,j)}, \cdots\cdots \theta^{(i,n(i))} \end{array}\right\},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} w^{(N,1)}, w^{(N,2)}, \cdots\cdots w^{(N,j)}, \cdots\cdots w^{(N,n(N))} \\ \theta^{(N,1)}, \theta^{(N,2)}, \cdots\cdots \theta^{(N,j)}, \cdots\cdots \theta^{(N,n(N))} \end{array}\right\}。$$

其中 w 和 θ 分别为流速和流向；$n(i)$为每段资料的个数，约为 24 左右，即每段资料长度为一天左右；N 段的观测个数为 $M=\sum_{i=1}^{N} n(i)$。对第 i 段第 j 个观测资料可分解为北分量和东分量

$$\left.\begin{array}{l} u^{(i,j)} = w^{(i,j)}\cos\theta^{(i,j)}, \\ v^{(i,j)} = w^{(i,j)}\sin\theta^{(i,j)}。 \end{array}\right\} \qquad (7.3-50)$$

下面以北分量为例进行讨论。第 i 段第 j 个观测到的北分量，按(7.3－47)式可表为

$$u^{(i,j)} = u_0^{(i)} + \sum_k D_k^{(i,j)} U_k \cos(p15t^{(i,j)} - d_k^{(i,j)} - \xi_k)$$

其中 $u_0^{(i)}$ 仅在第 i 段内为一常数，$k=1,2,3,4,5,6$，分别指示准调和分潮 O_1, K_1, M_2, S_2, M_4 和 MS_4。将上式展开

$$u^{(i,j)} = u_0^{(i)} + \sum_k [U_k\cos\xi_k D_k^{(i,j)}\cos(p15t^{(i,j)} - d_k^{(i,j)})$$

$$+ U_k\sin\xi_k D_k^{(i,j)}\sin(p15t_k^{(i,j)} - d_k^{(i,j)})], \qquad (7.3-51)$$

令

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 = U_{0_1}\cos\xi_{0_1}, \quad x_2 = U_{0_1}\sin\xi_{0_1}, \\
&x_3 = U_{k_1}\cos\xi_{k_1}, \quad x_4 = U_{k_1}\sin\xi_{k_1}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x_{11} = U_{MS_4}\cos\xi_{MS_4}, x_{12} = U_{MS_4}\sin\xi_{MS_4},
\end{aligned}\right\} \qquad (7.3-52)$$

$$\left.\begin{aligned}
&a_1^{(i,j)} = D_{\delta_1}^{(i,j)}\cos(15t^{(i,j)} - d_{\delta_1}^{(i,j)}), \\
&a_2^{(i,j)} = D_{\delta_1}^{(i,j)}\sin(15t^{(i,j)} - d_{\delta_1}^{(i,j)}), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&a_{11}^{(i,j)} = D_{MS_4}^{(i,j)}\cos(60t^{(i,j)} - d_{MS_4}^{(i,j)}), \\
&a_{12}^{(i,j)} = D_{MS_4}^{(i,j)}\sin(60t^{(i,j)} - d_{MS_4}^{(i,j)}).
\end{aligned}\right\} \qquad (7.3-53)$$

于是,(73—51)式可表为

$$\sum_{s=1}^{12} a_s^{(i,j)} x_s + u_0^{(i)} = u^{(i,j)}。 \qquad (7.3-54)$$

因为共有 M 次观测,故可建立 M 个方程,其中未知数共有 $12+N$ 个($x_1, x_2, x_3, \cdots x_{12}, u_0^{(1)}, u_0^{(2)}, \cdots\cdots u_0^{(N)}$)。为使未知量符号一致,令

$$\left.\begin{aligned}
&x_{13} = u_0^{(1)}, \quad x_{14} = u_0^{(2)}, \\
&x_{15} = u_0^{(3)}, \quad x_{16} = u_0^{(4)}, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&x_{12+(N-1)} = u_0^{(N-1)}, x_{12+N} = u_0^{(N)}。
\end{aligned}\right\} \qquad (7.3-55)$$

于是。M 个方程可记为

$$
\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
\sum_{s=1}^{12} a_s^{(1,1)} x_s + x_{13} = u^{(1,1)}, \\
\sum_{s=1}^{12} a_s^{(1,2)} x_s + x_{13} = u^{(1,2)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{s=1}^{12} a_s^{(1,n(1))} x_s + x_{13} = u^{(1,n(1))},
\end{array}\right\} \\
\left.\begin{array}{l}
\sum_{s=1}^{12} a_s^{(2,1)} x_s + x_{14} = u^{(2,1)}, \\
\sum_{s=1}^{12} a_s^{(2,2)} x_s + x_{14} = u^{(2,2)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{s=1}^{12} a_s^{(2,n(2))} x_s + x_{14} = u^{(2,n(2))},
\end{array}\right\} \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\left.\begin{array}{l}
\sum_{s=1}^{12} a_s^{(N,1)} x_s + x_{12+N} = u^{(N,1)}, \\
\sum_{s=1}^{12} a_s^{(N,2)} x_s + x_{12+N} = u^{(N,2)}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum_{s=1}^{12} a_s^{(N,n(N))} x_s + x_{12+N} = u^{(N,n(N))}。
\end{array}\right\}
\end{array}\right\} \quad (7.3-56)
$$

由于 $M>12+N$，方程(7.3－56)可用最小二乘法进行处理，结果可得下列方程组

$$
\left.\begin{aligned}
&A_{11}x_1+A_{12}x_2+\cdots\cdots A_{1,12+N}x_{12+N}=B_1,\\
&A_{21}x_1+A_{22}x_2+\cdots\cdots A_{2,12+N}x_{12+N}=B_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&A_{12+N,1}x_1+A_{12+N,2}x_2+\cdots\cdots\\
&\qquad+A_{12+N,12+N}x_{12+N}=B_{12+N},
\end{aligned}\right\}\quad(7.3-57)
$$

其系数矩阵是对称的，对于 $m,l=1,2,\cdots,12+N$，且 $l\geqslant m$，系数矩阵的元素为

$$
A_{ml}=\left\{\begin{array}{l}
\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{n(i)}a_m^{(i,j)}a_l^{(i,j)},(m,l=1,2\cdots,12,\text{且 }l\geqslant m)\\
\sum\limits_{j=1}^{n(l-12)}a_m^{(l-12,j)},\begin{pmatrix}m=1,2,\cdots,12,\\ l=13,14,\cdots,12+N\end{pmatrix}\\
n(m-12),(l=m=13,14,\cdots,12+N)\\
0,(m,l=13,14,\cdots,12+N,\text{且 }l>m)
\end{array}\right\}
$$

(7.3—58)

方程组的右端为

$$
B_m=\left\{\begin{array}{l}
\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{j=1}^{n(i)}u^{(i,j)}a_m^{(i,j)},(m=1,2,\cdots,12),\\
\sum\limits_{j=1}^{n(m-12)}u^{(m-12,j)},(m=13,14,\cdots,12+N)。
\end{array}\right\}
$$

(7.3—59)

由方程组(7.3—57)，求出 $x_1,x_2,\cdots x_{12+N}$，然后利用关系式(7.3—52)和(7.3—55)可得潮流北分量的调和常数 U 和 ξ 以及每段观测期间的余流北分量 u_0。

类似地，可求得潮流东分量的调和常数 V 和 η，以及各段观测期间的余流东分量 v_0。

7.3.5 潮流椭圆要素

根据潮流分析可以获得每个分潮流的北分量和东分量的调和

常数 U,ξ 和 V,η。利用它们能够描述分潮流的主要变化特征，包括分潮流的最大流速、最小流速、最大流速方向、最大流速发生时刻以及分潮流的旋转方向。

对任一准调和分潮流，其北分量和东分量为可表为

$$u = \overline{D}U\cos(\omega t - d^\circ - \xi),$$
$$v = \overline{D}V\cos(\omega t - d^\circ - \eta),。$$

若讨论其平均情况，可取 $\overline{D}=1$，再令 $t=\frac{d^\circ}{\omega}+t'$，即选取 $t=\frac{d^\circ}{\omega}$ 时刻为新时间坐标 t' 的起点，于是

$$\left.\begin{aligned} u &= U\cos(\omega t' - \xi), \\ v &= V\cos(\omega t' - \eta)。\end{aligned}\right\} \qquad (7.3-60)$$

上式为椭圆参数方程，消去 t' 之后得

$$V^2u^2 - 2UV\cos(\xi-\eta)uv + U^2v^2 = U^2V^2\sin^2(\xi-\eta), \qquad (7.3-61)$$

该椭圆方程叫做潮流椭圆，它是分潮流矢量端点轨迹的描述。

依(7.3—60)式，分潮流的流速和方向可表为

$$W = [U^2\cos^2(\omega t'-\xi) + V^2\sin^2(\omega t'-\eta)]^{1/2}, \qquad (7.3-62)$$

$$\theta = \arctan\frac{v}{u} = \arctan\frac{V\cos(\omega t'-\eta)}{U\cos(\omega t'-\xi)}。\qquad (7.3-63)$$

若以 τ 表示 W 发生极值所对应的时刻，则由 $\frac{dW}{dt'}=0$ 可得

$$\tau = \frac{1}{2\omega}\arctan\frac{U^2\sin 2\xi + V^2\sin 2\eta}{U^2\cos 2\xi + V^2\cos 2\eta}, \qquad (7.3-64)$$

当 $\frac{d^2W}{dt'^2}<0$ 时，τ 为最大流速发生时刻，记为 τ_1，当 $\frac{d^2W}{dt'^2}>0$ 时，τ 为最小流速发生时刻，记为 τ_2。将最大流速发生时刻 τ_1 代入(7.3—62)式和(7.3—63)式，得最大流速和最大流速的方向

$$\left.\begin{aligned} W_{max} &= [U^2\cos^2(\omega\tau_1-\xi) + V^2\cos^2(\omega\tau_1-\eta)]^{1/2}, \\ \theta_{max} &= \arctan\frac{V\cos(\omega\tau_1-\eta)}{U\cos(\omega\tau_1-\xi)}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.3-65)$$

而最小流速及其方向为

$$\left.\begin{aligned} W_{min} &= \left[U^2\sin^2(\omega\tau_1-\xi)+V^2\sin^2(\omega\tau_1-\eta)\right]^{1/2},\\ \theta_{max} &= \arctan\frac{V\sin(\omega\tau_1-\eta)}{U\sin(\omega\tau_1-\xi)}, \end{aligned}\right\} \tag{7.3-66}$$

分潮流椭圆的椭率

$$K=\frac{W_{min}}{W_{max}}。\tag{7.3-67}$$

由(7.3－63)式对 t 微商，得

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{u\dfrac{dv}{dt}-v\dfrac{du}{dt}}{u^2+v^2}=\frac{\omega UV\sin(\eta-\xi)}{U^2\cos^2(\omega t'-\xi)+V^2\cos^2(\omega t'-\eta)},\tag{7.3-68}$$

由此式可见，当 $\sin(\eta-\xi)>0$，即 $0<\eta-\xi<180°$，分潮流的流矢量随时间作顺时针旋转，而当 $\sin(\eta-\xi)<0$，即 $180°<(\eta-\xi)<360°$，流矢量作逆时针旋转，当 $\sin(\eta-\xi)=0$，分潮流作往复变化，称之为往复流。

以上求得的分潮流最大流速发生时刻 τ_1，最大流速 W_{max}，最小流速 W_{min}，最大流速方向 θ_{max}，椭率 K 和旋转方向统称为椭圆要素。

7.3.6 潮汐和潮流预报

1. 主港潮汐预报的调和法

实际潮汐预报只在一些重要港口进行，这些港口称为主港。对主港的潮汐预报目前通常采用调和方法。若分潮调和常数已知，预报任意时刻的潮高可根据下式进行

$$\zeta(t)=A_0+\sum f_k H_k\cos[\omega_k t+(V_0+u)_{格_k}-g_k],\tag{7.3-69}$$

其中 V_0 为推算起始日期的格林尼治天文初位相；t 为区时时间；f，u 的变化由于缓慢，因此它们在某一段时间内可取为常值(等于该

段中间时刻的 f 和 u 值)。V_0,u 和 f 的计算可参看§7.1 的 7.1.3 小节。

2. 附港潮汐推算的比较法

由众多的实际观测发现,对潮汐特征比较相似的主港和附近港口之间,它们的高潮时差(或低潮时差)变化不大,可以认为是一常数,它们的高潮高(或低潮高)之间近似地存在一种线性关系。设 T_0 和 T_1 分别表示高潮时和低潮时,Z_0 和 Z_1 分别表示高潮高和低潮高,则主港和附港之间的高潮时差和低潮时差为

$$\left.\begin{aligned}\triangle T_0 &= [T_0]_{附} - [T_0]_{主},\\ \triangle T_1 &= [T_1]_{附} - [T_1]_{主},\end{aligned}\right\} \tag{7.3-70}$$

而两港高潮高之间关系和低潮高之间关系为

$$\left.\begin{aligned}[Z_0]_{附} &= a[Z_0]_{主} + b,\\ [Z_1]_{附} &= a[Z_1]_{主} + b。\end{aligned}\right\} \tag{7.3-71}$$

(7.3－70)式和(7.3－71)式为经验关系,只要$\triangle T_0$,$\triangle T_1$,a 和 b 已知,该两式便可用来推出附港的高(低)潮时和高(低)潮高。其中 $\triangle T_0$ 和$\triangle T_1$ 可以通过实际观测资料进行统计取平均求得,也可以利用调和常数求得,例如对半日潮港,有

$$\triangle T_0 = \triangle T_1 = ([g_{M_2}]_{附} - [g_{M_2}]_{主})/\omega_{M_2}。 \tag{7.3-72}$$

为了确定 a 和 b,可将由实际观测资料统计平均得到的平均高潮高和平均低潮高 $\overline{Z}_0$ 和 $\overline{Z}_1$ 代入(7.3－71)式后,解出

$$\left.\begin{aligned}a &= \frac{[\overline{Z}_0]_{附} - [\overline{Z}_1]_{附}}{[\overline{Z}_0]_{主} - [\overline{Z}_1]_{主}},\\ b &= [\overline{Z}_0]_{附} - a[\overline{Z}_0]_{主}。\end{aligned}\right\} \tag{7.3-73}$$

上式中的 $\overline{Z}_0$ 和 $\overline{Z}_1$ 也可用调和常数计算出来,例如对半日潮港有

$$\overline{Z}_0 = 1.01H_{M2} + 0.29\frac{H_{S_2}^2}{H_{M_2}} + 0.04\frac{(H_{K_1} + H_{O_1})^2}{H_{M_2}}$$

$$-0.03\frac{(H_{K_1} + H_{O_1})^2}{H_{M_2}}\cos(g_{K_1} + g_{O_1} - g_{M_2})$$

$$+ H_{M_4}\cos(g_{M_4}-2g_{M_2}) + H_{M_6}\cos(g_{M_6}-3g_{M_2}),$$

$$\overline{Z}_1 = -1.01H_{M_2} + 0.29\frac{H_{S_2}^2}{H_{M_2}} - 0.04\frac{(H_{K_1}-H_{O_1})^2}{H_{M_2}}$$

$$-0.03\frac{(H_{K_1}+H_{O_1})^2}{H_{M_2}}\cos(g_{K_1}+g_{O_1}-g_{M_2})$$

$$+ H_{M_4}\cos(g_{M_4}-2g_{M_2}) - H_{M_6}\cos(g_{M_6}-3g_{M_2})。$$

3. 潮汐预报的响应法

对于深水区域，应用响应法作潮汐预报依下式进行

$$\zeta(t) = \sum_{k=-3}^{3}\sum_{j}\sum_{m=-j}^{j} w_j^m(2k)C_j^m(t+2k)$$

$$= \sum_{k=-3}^{3}\sum_{n} w_{nk}C_n(t+2k) \qquad (7.3-74)$$

其中 n 表示 m 和 j 的组合，w_{nk} 已由实际资料分析求得，$C_n(t+2k)$ 依(7.3−43)式计算。

对浅水区域，非线性效应必须考虑，预报公式取为

$$\zeta(t) = \sum_{k}\sum_{n} w_{nk}C_n(t+2k) +$$

$$\sum_{kk'}\sum_{nn'} w_{nn'kk'}C_n(t+2k)C_{n'}(t+2k')。\qquad (7.3-75)$$

4. 浅水潮汐预报方法

对于一些浅水港口，非线性高阶项仍很重要，由于调和分析方法中对哪些分潮存在哪些分潮不存在预先都作了规定，因此如果根据已知的调和常数进行回报，会发现实测值与回报值之差很可观。改进浅水港潮汐预报的方法，除了上面的响应法面外，还有浅水潮汐预报的准调和方法(方国洪和于克俊，1981)和浅水潮汐预报的相关法。这两种方法是对实际观测值与回报值之差

$$\delta_{实}(t) = \zeta_{实}(t) \quad h_{回} \tag{7.3-76}$$

进行分析，将 $\delta_{实}(t)$视为 $h_{回}(t)$的某种函数，即

$$\delta_{实}(t) = f(h_{回}), \tag{7.3-77}$$

对其分析，求得一些常数。进行预报时，先由调和常数进行预报求得 $h(t)$，由 $h(t)$和求得的常数计算出 $\delta(t)=f(h)$，最后求得逐时的潮汐预报值

$$\zeta(t) = h(t) + \delta(t)。 \tag{7.3-78}$$

关于 $\delta(t)$的具体分析，以浅水潮汐预报的相关法为例来简要说明。设某时刻的 $\delta(t)$决定于同一地点该时刻及前后时刻的 h 值，设

$$\delta(t) = F(h_i), i = 0, 1, 2, \cdots\cdots \tag{7.3-79}$$

其中 h_i 表示 h 对时间 t 的 i 级微商。将上式展成泰勒级数

$$\delta = \delta_0 + \sum_{i=0}^{\infty} a_i h_i + \sum_{\substack{i,j=0 \\ j \geqslant i}}^{\infty} a_{ij} h_i h_j + \sum_{\substack{i,j,k=0 \\ k \geqslant j \geqslant i}}^{\infty} a_{ijk} h_i h_j h_k, + \cdots\cdots。$$

上式右边的求和项为无限，实际应用中只能取有限项，记为 m，又从实际验证取 $m=6$ 较合适，于是

$$\delta = \delta_0 + \sum_{i=0}^{6} a_i h_i + \sum_{\substack{i,j=0 \\ j \geqslant i}}^{6} a_{ij} h_i h_j + \sum_{\substack{i,j,k=0 \\ k \geqslant j}}^{6} a_{ijk} h_i h_j h_k + \cdots\cdots。 \tag{7.3-80}$$

根据由已知调和常数回报所得的 $h_{回}$，计算出 $\delta_{实}$，则(7.3—80)式中的系数 $\delta_0, a_i, a_{ij}, \cdots\cdots$原则上便可确定。

5. 潮流预报的调和法

已知分潮流调和常数，潮流北分量和东分量的逐时大小可用下式计算

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \sum_k f_k U_k \cos[\omega_k t + (V_0 + u)_{格_k} - \xi_k], \\ v &= v_0 + \sum_k f_k V_k \cos[\omega_k t + (V_0 + u)_{格_k} - \eta_k]。 \end{aligned}\right\} \tag{7.3-81}$$

如果已知潮流的准调和分潮流的调和常数，则可采用下列形式计算

$$\left.\begin{aligned} u &= u_0 + \sum D_k U_k \cos(p15t - d_k - \xi_k), \\ v &= v_0 + \sum D_k U_k \cos(p15t - d_k - \eta_k)。\end{aligned}\right\} \quad (7.3-82)$$

当逐时北分量和东分量求得之后，可求得逐时合成潮流的大小和方向

$$\left.\begin{aligned} W &= \sqrt{u^2 + v^2}, \\ \theta &= \arctan\frac{v}{u}。\end{aligned}\right\} \quad (7.3-83)$$

§7.4 考虑地球形状的潮波

平衡潮理论不能阐明实际海洋中发生的潮汐与潮流现象，是因为这种理论的假定与实际相差太远，并将原应为动力学的问题当成静力学问题来处理的缘故。从动力学观点研究海洋潮汐始于18世纪末的 Laplace。他应用流体动力学方程，研究了全球为海水复盖但水深随纬度变化的大洋在天体引潮力作用下产生的强迫波动，从而建立了潮汐动力学理论—— Laplace 理论。其后，Airy (1842)讨论了绕地球的沟渠或有限沟渠中的强迫潮波。在 Laplace 理论建立一个多世纪之后，Hough(1897，1898)发展了 Laplace 理论，成功地用数学方法求解了潮汐方程。此后，又有许多研究者对地球上有限区域大洋中的潮波进行了探讨。

本节对这些经典的潮汐动力学理论进行讨论。讨论分为全球水域中的潮波和有限水域中的潮波。

7.4.1 全球水域中的潮波

大尺度的强迫潮波运动可用下述动力学基本方程[见(4.3—

37)式]描述

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u}{\partial t}-2\omega\cos\theta v=-\frac{g}{a\sin\theta}\frac{\partial\zeta}{\partial\lambda}-\frac{1}{a\sin\theta}\frac{\partial\Omega}{\partial\lambda},\\&\frac{\partial v}{\partial t}+2\omega\cos\theta u=\frac{g}{a}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}+\frac{1}{a}\frac{\partial\Omega}{\partial\theta},\\&\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{1}{a\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(-hv\sin\theta)+\frac{\partial hu}{\partial\lambda}\right]=0,\end{aligned}\right\}\quad(7.4-1)$$

其中u,v分别为流速的东分量和北分量，ω为地球自转角速度，$\theta=90°-\varphi$，λ为余纬度和经度，a为地球半经，h为水深。由平衡潮理论知，平衡潮潮高$\bar{\zeta}$与引潮势Ω的关系为$\bar{\zeta}=-\frac{\Omega}{g}$，因此(7.4—1)式可表为

$$\frac{\partial u}{\partial t}-2\omega\cos\theta v=-\frac{g}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\zeta-\bar{\zeta}),\qquad(7.4-2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+2\omega\cos\theta u=\frac{g}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}(\zeta-\bar{\zeta}),\qquad(7.4-3)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{1}{a\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}(-hv\sin\theta)+\frac{\partial}{\partial\lambda}(hu)\right]=0。\quad(7.4-4)$$

Laplace(1775，1776)根据以上方程研究了三类潮汐(长周期类，全日周期类和半日周期类)。

由(7.1—19)式知，月球平衡潮包括三大类

$$\begin{aligned}\bar{\zeta}_M=2G\left(\frac{\bar{D}}{D}\right)^3\{&\left[\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}-\sin^2\varphi\right)\left(\frac{1}{3}-\sin^2\delta\right)\right]\\&+\frac{1}{2}\sin2\varphi\sin2\delta\cos T_1\\&+\frac{1}{2}\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos2T_1\}。\end{aligned}$$

引入余纬度θ，并令

$$
\left.\begin{aligned}
H_0 &= 3G\left(\frac{\overline{D}}{D}\right)^3\left(\frac{1}{3}-\sin^2\delta\right),\\
H_1 &= 2G\left(\frac{\overline{D}}{D}\right)^3\sin 2\delta,\\
H_2 &= G\left(\frac{\overline{D}}{D}\right)^3\cos^2\delta,
\end{aligned}\right\} \qquad (7.4-5)
$$

于是月球平衡潮可表为

$$
\begin{aligned}
\overline{\xi}_M &= \overline{\xi}_0 + \overline{\xi}_1 + \overline{\xi}_2\\
&= H_0\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right) + H_1\sin\theta\cos\theta\cos T_1 + H_2\sin^2\theta\cos 2T_1。
\end{aligned}
$$

$$(7.4-6)$$

任意地点 X 的月球时角 T_1 与格林尼治的月球时角 T_G 有如下关系

$$T_1 = T_G + \lambda, \qquad (7.4-7)$$

其中若 λ 为东经取正值，若 λ 为西经取负值。设 t 为格林尼治的平太阴时，地球相对于平月球自转的角速率 $\omega_1=360°/24=15°/$平太阴时，因此有

$$T_G = \omega_1 t + 180°。 \qquad (7.4-8)$$

利用(7.4—7)式和(7.4—8)式，月球平衡潮的三类潮汐可写成

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{\xi}_0 &= H_0\left(\frac{1}{3}-\cos^2\theta\right),\\
\overline{\xi}_1 &= H_1\sin\theta\cos\theta\cos(\omega_1 t \pm \lambda + 180°),\\
\overline{\xi}_2 &= H_2\sin^2\theta\cos(\omega_2 t \pm 2\lambda + 2\times 180°),
\end{aligned}\right\} \qquad (7.4-9)
$$

其中 $\omega_2=2\omega_1$。设各类平衡潮和相应的潮波可取为如下形式

$$
\left.\begin{aligned}
&\overline{\xi}_n\\
&\xi_n\\
&u_n\\
&v_n
\end{aligned}\right\} \sim \qquad e^{i(\omega_n t + n\lambda + \alpha_n)}, \qquad (7.4-10)
$$

这里 $n=0,1,2$，分别对应于长周期类，全日周期类和半日周期类。将(7.4—10)式代入基本方程(7.4—2)—(7.4—4)，得

$$\left.\begin{aligned} i\omega_n u_n - 2\omega v_n \cos\theta &= -\frac{ing}{a\sin\theta}(\zeta_n - \bar{\zeta}_n), \\ i\omega_n v_n + 2\omega u_n \cos\theta &= \frac{g}{a}\frac{\partial}{\partial\theta}(\zeta_n - \bar{\zeta}_n), \end{aligned}\right\} \quad (7.4-11)$$

$$i\omega_n \zeta_n = \frac{1}{a\sin\theta}\left[\frac{d}{d\theta}(hv_n \sin\theta) - inhu_n\right], \quad (7.4-12)$$

引进符号

$$\left.\begin{aligned} \zeta'_n &= \zeta_n - \bar{\zeta}_n, \\ \bar{\omega}_n &= \omega_n/(2\omega), \\ m_n &= \frac{4\omega_n^2 a}{g}, \end{aligned}\right\} \quad (7.4-13)$$

由(7.4—11)式得

$$\left.\begin{aligned} u_n &= \frac{-\omega_n}{m_n(\bar{\omega}_n - \cos^2\theta)}\left(\frac{\cos\theta}{\bar{\omega}_n}\frac{d\zeta'_n}{d\theta} + n\zeta'_n \operatorname{cosec}\theta\right), \\ v_n &= \frac{-i\omega_n}{m_n(\bar{\omega}_n - \cos^2\theta)}\left(\frac{d\zeta'_n}{d\theta} + \frac{n}{\bar{\omega}_n}\zeta'_n \cot\theta\right), \end{aligned}\right\}$$

$$(7.4-14)$$

将(7.4—14)式代入(7.4—12)式，得

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left[\frac{h\sin\theta}{\bar{\omega}_n - \cos^2\theta}\left(\frac{d\zeta'_n}{d\theta} + \frac{n}{\bar{\omega}_n}\zeta'_n\cot\theta\right)\right] - \frac{h}{\bar{\omega}_n - \cos^2\theta}\times$$
$$\left(\frac{n}{\bar{\omega}_n}\cot\theta\frac{d\zeta'_n}{d\theta} + n^2\zeta'_n\operatorname{cosec}\theta\right) + m_n a\zeta'_n = -m_n a\bar{\zeta}_n。$$

$$(7.4-15)$$

(7.4—15)式是 Laplace 首次导出的，称之为 Laplace 潮汐方程，下面由此方程出发，分别讨论 $n=0,1,2$ 的情形。

$n=0$ 的情形。假定水深 h 为常数，则(7.4—15)式简化为

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\bar{\omega}_0 - \cos^2\theta}\frac{d\zeta'_0}{d\theta}\right) + \frac{m_0 a}{h}\zeta'_0 = -\frac{m_0 a}{h}\bar{\zeta}_0,$$

令

$$\varepsilon = \frac{m_0 a}{h}, \ \mu = \cos\theta \qquad (7.4-16)$$

上面方程变为

$$\frac{d}{d\mu}\left(\frac{1-\mu^2}{\overline{\omega}_0-\mu^2}\frac{d\zeta'_0}{d\mu}\right) + \varepsilon\zeta'_0 = -\varepsilon\overline{\zeta}_0, \qquad (7.4-17)$$

根据(7.4—9)式的第一式,$\overline{\zeta}_0 = H_0(\frac{1}{3}-\mu^2)$,再若取 $\varepsilon=40$(对应地 $h=2210\text{m}$),近似取 $\overline{\omega}_0=0$,可得解

$$\zeta_0 = \zeta'_0 + \overline{\zeta}_0 = H_0(0.1515-1.000\mu^2 + 1.5153\mu^4 - 1.2120\mu^6 + 0.6063\mu^8 - 0.2076\mu^{10} + \cdots), \qquad (7.4-18)$$

在极地($\varphi=\pm 90°$)和赤道($\varphi=0$),相应的 $\mu=\pm 1$ 和 $\mu=0$,由(7.4—18)式计算结果为

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0(\mu=\pm 1) &= -\frac{2}{3}H_0\cdot 0.154, \\ \zeta_0(\mu=0) &= \frac{1}{3}H_0\cdot 0.455。 \end{aligned}\right\} \qquad (7.4-19)$$

而平衡潮的对应值

$$\left.\begin{aligned} \overline{\zeta}_0(\mu=\pm 1) &= -\frac{2}{3}H_0, \\ \overline{\zeta}_0(\mu=0) &= \frac{1}{3}H_0。 \end{aligned}\right\} \qquad (7.4-20)$$

可见长周期的动力潮小于长周期的平衡潮。

$n=1$ 的情形。讨论全日潮时,深度取为

$$h = h_0(1-q\cos^2\theta), \quad q < 1 \qquad (7.4-21)$$

并且为了简化讨论,取 $\omega_1=\omega$,即 $\overline{\omega}_1=1/2$。由(7.4—9)的第二式可给出

$$\overline{\zeta}_1 = H_1\sin\theta\cos\theta e^{i(\omega_1 t+\lambda+\alpha_1)}, \qquad (7.4-22)$$

由于是强迫潮波,可令

$$\zeta'_1 = C_1\sin\theta\cos\theta e^{i(\omega_1 t+\lambda+\alpha_1)}。 \qquad (7.4-23)$$

将(7.4—23)式代入(7.4—14)式，得

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{4\omega_1 C_1}{m_1}\cos\theta e^{i(\omega_1 t+\lambda+\alpha_1)}, \\ v_1 &= \frac{i4\omega_1}{m_1}C_1 e^{i(\omega_1 t+\lambda+\alpha_1)}。\end{aligned}\right\} \qquad (7.4-24)$$

利用上式，由(7.4—12)式得

$$\zeta_1 = \frac{4C_1}{m_1 a}\frac{dh}{d\theta}e^{i(\omega_1 t+\lambda+\alpha_1)},$$

水深 h 的表达式(7.4—21)代入上式，有

$$\zeta_1 = \frac{8qh_0 C_1}{m_1 a}\sin\theta\cos\theta e^{i(\omega_1 t+\lambda+\alpha_1)}。\qquad (7.4-25)$$

由 $\zeta_1 = \zeta'_1 + \bar{\zeta}_1$，可求得常数

$$C_1 = \frac{-H_1}{1-8qh_0/m_1 a},$$

于是，全日潮波可表为

$$u_1 = \frac{4a\omega_1\cos\theta}{8qh_0 - m_1 a}H_1 e^{i(\omega_1 t+\lambda+\alpha_1)},$$

$$v_1 = \frac{i4a\omega_1}{8qh_0 - m_1 a}H\ e^{i(\omega_1 t+\lambda+\alpha_1)},$$

$$\zeta_1 = \frac{8qh_0\sin\theta\cos\theta}{8qh_0 - m_1 a}H_1 e^{i(\omega_1 t+\lambda+\alpha_1)},$$

将 $m_1 = \frac{4\omega_1^2 a}{g}$ 代入以上三式后，再取实部，得

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= \frac{\omega_1 ga\cos\theta H_1}{2c^2(q-p_0^2)}\cos(\omega_1 t+\lambda+\alpha_1), \\ v_1 &= \frac{\omega_1 gaH_1}{2c^2(q-p_0^2)}\sin(\omega_1 t+\lambda+\alpha_1), \\ \zeta_1 &= \frac{q\sin\theta\cos\theta H_1}{q-p_0^2}\cos(\omega_1 t+\lambda+\alpha_1), \end{aligned}\right\} \qquad (7.4-26)$$

其中

$$c^2 = gh_0,$$

$$p_0^2 = \frac{\omega_1^2 a^2}{2c^2}。$$

由(7.4—26)式可见，当 $q=0$ 时，即水深为常数时，$\zeta_1=0$，即动力潮的全日部分为零，对非等深的海洋，$\zeta_1\neq 0$。当 $q>p_0^2$ 时，动力潮与平衡潮同位相，而当 $q<p_0^2$ 时，两者位相相反，例如 $h_0=4000\text{m}$，$p_0^2>1$，如果平衡潮为高潮，则动力潮为低潮。当 $q=p_0^2$ 时发生日潮共振。

$n=2$ 的情形。取海洋深度分布为

$$h = h_0\sin^2\theta, \qquad (7.4-27)$$

并假定 $\omega_2=2\omega$，即 $\bar{\omega}_2=1$。平衡潮的半日潮由(7.4—9)的第三式给出

$$\bar{\zeta}_2 = H_2\sin^2\theta e^{i(\omega_2 t+2\lambda+\alpha_2)}, \qquad (7.4-28)$$

令

$$\zeta'_2 = C_2\sin^2\theta e^{i(\omega_2 t+2\lambda+\alpha_2)}, \qquad (7.4-29)$$

依讨论全日潮波的同样步骤，确定出常数

$$C_2 = \frac{-H_2}{1-8h_0/m_2a}, \qquad (7.4-30)$$

最后得半日潮波表达式

$$\left.\begin{aligned}
u_2 &= \frac{-\omega_2 gaH_2(1+\cos^2\theta)}{4c^2(1-p_0^2)\sin\theta}\cos(\omega_2 t+2\lambda+\alpha_2),\\
v_2 &= \frac{-\omega_2 gaH_2\cos\theta}{2c^2(1-p_0^2)\sin\theta}\sin(\omega_2 t+2\lambda+\alpha_2),\\
\zeta_2 &= \frac{H_2\sin^2\theta}{1-p_0^2}\cos(\omega_2 t+2\lambda+\alpha_2)。
\end{aligned}\right\} \qquad (7.4-31)$$

当 $p_0^2>1$ 时(例如 $h_0=4000\text{m}$)，动力潮与平衡潮反位相；当 h_0 接近 11000m 时，$p_0^2\to 1$，发生共振，半日潮振幅将很大。

从以上讨论的 Laplace 理论可以看出，尽管海洋还是理想的，但反映了水深分布对海洋潮汐的影响很大。

在 Laplace 的理论之后大约过 120 年，Hough（1897）发展了 Laplace 理论。他成功地用球函数求解，既考虑了强迫振动，又考虑了自由振动；另外也讨论了海水质点相互吸引的作用对潮汐的影响。Hough 的主要结论是（1）对均匀水深大洋中的长周期潮波来说，应考虑水质点相互吸引的有关量，随着水深增加，动力潮接近平衡潮，这与 Laplace 理论中的长周期类的结论基本一致，但因考虑水质点相互吸引，潮高减小了。Hough 还研究了水深分布为 $h=k+l(1-\cos^2\theta)$ 时的长周期潮波的解。（2）Hough 讨论了均匀水深情况下 $\omega_1/\omega=0.92700$（ω_1 相当于 O_1 分潮的频率）时的全日周期潮波，一般说来潮高不大，但随着水深增加潮高也增大，相位大致与平衡潮相反，当水深非常大（例如达到 17700m 时），潮高变得比平衡潮还大。而 Laplace 理论中，在均匀水深情况下，$\omega_1/\omega=1$ 时的全日潮潮高为零。（3）在赤道区域，当深度为 8850m 时，S_2 分潮变得非常大，其振幅大约为平衡分潮的 250 倍，这是因为 8850m 水深时，海区的自由振动周期为 12 小时零 1 分，与 S_2 的周期很接近。

7.4.2　有界水域中的潮波

实际海洋存在着陆地，必须考虑边界对潮波运动的影响。

Airy（1842）首次研究了狭长沟渠中的强迫潮波。设沟渠沿纬圈环绕地球，其宽度 b 和深度 h 均为常量。若沟渠狭窄，忽略地转影响，因此运动方程和连续方程可取为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=-\frac{g}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\lambda}(\zeta-\bar{\zeta}),\\ \frac{\partial\zeta}{\partial t}&=-\frac{h}{a\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\lambda}。\end{aligned}\right\}\qquad(7.4-32)$$

设水质点任意时刻的位置 $\lambda=\lambda_0+\xi$，其中 λ_0 为水质点平衡位置的地理经度，ξ 为水质点偏离平衡位置的距离，于是有 $u=\frac{\partial\lambda}{\partial t}=\frac{\partial\xi}{\partial t}$。利用此关系，（7.4－32）式中的连续方程可写成

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{h}{a\sin\theta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}\right),$$

对 t 积分，得

$$\zeta = -\frac{h}{a\sin\theta}\frac{\partial \xi}{\partial \lambda}。 \qquad (7.4-33)$$

将(7.4—33)式代入运动方程，结果有

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{gh}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \lambda^2} + \frac{g}{a\sin\theta}\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial \lambda}。 \qquad (7.4-34)$$

如果考虑月球引潮力的作用，则上式中的平衡潮 $\bar{\xi}$ 用月球平衡潮 $\bar{\xi}_M$ 代替。由(7.4—9)式，月球平衡潮可表为

$$\bar{\xi}_M = H_0\left(\frac{1}{3} - \cos^2\theta\right) + H_1\sin\theta\cos\theta\cos(\omega_1 t + \lambda + \alpha_1)$$
$$+ H_2\sin^2\theta\cos(\omega_2 t + 2\lambda + \alpha_2),$$

则

$$\frac{g}{a\sin\theta}\frac{\partial \bar{\xi}_M}{\partial \lambda} = -\frac{g}{a}H_1\cos\theta\sin(\omega_1 t + \lambda + \alpha_1)$$
$$- \frac{2}{a}gH_2\sin\theta\sin(\omega_2 t + 2\lambda + \alpha_2),$$

于是方程(7.4—34)变成

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{gh}{a^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \xi}{\partial \lambda^2} - \frac{g}{a}H_1\cos\theta\sin(\omega_1 t + \lambda + \alpha_1)$$
$$- \frac{2}{a}gH_2\sin\theta\sin(\omega_2 t + 2\lambda + \alpha_2)。 \qquad (7.4-35)$$

由于研究强迫运动，故可取试解

$$\xi = R_1\sin(\omega_1 t + \lambda + \alpha_1) + R_2\sin(\omega_2 t + 2\lambda + \alpha_2), \qquad (7.4-36)$$

将其代入(7.4—35)式，得

$$\left.\begin{aligned} R_1 &= \frac{gH_1\cos\theta}{(\omega_1^2 - \frac{gh}{a^2\sin^2\theta})a}, \\ R_2 &= \frac{2gH_2\sin\theta}{(\omega_2^2 - \frac{4gh}{a^2\sin^2\theta})a}。\end{aligned}\right\} \tag{7.4—37}$$

再利用(7.4—33)式的关系，最后求得 ζ 的表达式

$$\begin{aligned} \zeta = &\frac{gh}{gh - \omega_1^2 a^2\sin^2\theta} H_1\sin\theta\cos\theta\cos(\omega_1 t + \lambda + \alpha_1) \\ &+ \frac{4gh}{4gh - \omega_2^2 a^2\sin\theta} H_2\sin^2\theta\cos(\omega_2 t + 2\lambda + \alpha_2)。\end{aligned} \tag{7.4—38}$$

此结果表明：动力潮与平衡潮成比例；动力潮与平衡潮是同位相还是反位相，取决于差值 $gh - \omega_1^2 a^2\sin^2\theta$ 是正还是负；此差值不仅与水深有关，而且与地理纬度有关，例如假设水深 $h = 4000\text{m}$，在赤道处 $\theta = 90°$，可求得 $\sqrt{gh} \simeq 200\text{m/s}$，$\omega_1 a \simeq 440\text{m/s}$，因此 $gh - \omega_1^2 a^2 < 0$，即赤道处动力潮与平衡潮反位相。另外，根据(7.4—5)式，$H_1 = 2G(\frac{\overline{D}}{D})^3\sin 2\delta$，$H_2 = G(\frac{\overline{D}}{D})^3\cos^2\delta$，其中 $G = \frac{3}{4}\frac{M}{E}(\frac{a}{\overline{D}})^3 a$，由此可知：月球赤纬 $\delta = 0$ 时，全日潮为零，只有半日潮存在；随着月球赤纬的增加，全日潮逐渐增大，而半日潮则不断地减小。

表 7—9 以纬度 60°为界的极地海区的 $\zeta/\bar{\zeta}$ 之值

(Goldsbrough,1913)

深 度 h/m	极 地	纬度 60°处		
	长周期	长周期	全日周期	半日周期
2210	0.100	—0.216	—2.86	1.070
4420	0.133	—0.247	—1.16	1.030
8850	0.158	—0.269	—0.194	1.014
17700	0.176	—0.276	0.386	1.00

Goldsbrough(1913,1914)研究了以一条纬圈为界的极地海区。他给出了以纬度 $\varphi=60°$为界的极地海区三类潮汐与平衡潮三类潮汐的比值(表 7—9)。由表可见,极地全日潮和半日潮为零,长周期潮很小;在纬度 60°处,全日潮随深度增大很快减小,而半日潮振幅接近平衡潮的振幅。这些结论说明大洋边界的存在对全日潮的存在有决定作用,而水深的深浅对全日潮的大小有重要影响。Goldsbrough 还计算了 30°N 和 14°30′N 之间以及 30°N 和 14°31′S 之间两条带状海区内的潮汐,这里的全日潮和半日潮的情况与在极地海区一样,根据海洋大小和水深不同,所得之结果相差很大。

Goldsbrough,colborne,Proudman,Doodson 都研究过两条子午线所围成的纺锤形海区的潮汐。在考虑地转自转的情况下,Goldsbrough(1927)对相距 60°的两条子午线间、水深比例于纬度余弦平方的海区计算了 K_2 分潮。Goldsbrough 和 Colborne(1929)讨论了相距 60°的两条子午线间、水深为 3950m 的海区中的 M_2 分潮,得到的 M_2 分潮的振幅为平衡潮的 37.6 倍,这种情况大致相当于大西洋的 M_2 分潮;后来,Colborne(1931)以同样的方法处理了该海区的 K_1 分潮,结果表明 K_1 分潮非常小;Goldsbrough(1943)再次研究了纺锤形海区中的潮汐,发现相距 60°的两条子午线间的海区中 K_2 分潮的共振深度约为 5000m。Proudman(1936)和 Doodson

(1936,1939)得出的一般公式计算了相距180°两子午线间的海区中的 K_1 和 K_2 分潮,特别是对不同深度情况下的 K_2 分潮进行过计算,结果发现,由于深度不同,旋转潮波系统出现的形式也不同。

§7.5 等深广阔水域中的潮波

大陆架海底变化的总趋势是平缓的。若将大陆架水域抽象成等深水域,从数学的角度来看,无疑会简化问题的求解,从实际情况来看,等深水域中的波动能够反映出实际大陆架上潮波运动的若干特征。本节讨论三种有名的波动:Kelvin 波,Sverdrup 波和 Poincare′波。Kelvin 波是 Kelvin(Thomson,1879)在一个无限长的海峡中导出的,Sverdrup 波是 Sverdrup(1927)研究西伯利亚大陆架潮汐时提出的,Poincare′波为 Poincare′(1910)的研究结果。

这些波动被认为是自由波动,并且由于运动的大尺度,摩擦项和非线性平流项相对于地转偏向力可以忽略不计,因此描述这些波动的基本方程可由方程组(4.5—36)简化得到

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \qquad (7.5-1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-g\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \qquad (7.5-2)$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \qquad (7.5-3)$$

其中 u,v 为铅直向平均流速,并利用了假定 $h+\zeta\simeq h$。对于波动,其解可表为

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= Z(x,y)e^{-i\sigma t},\\ u &= U(x,y)e^{-i\sigma t},\\ v &= V(x,y)e^{-i\sigma t}。\end{aligned}\right\} \qquad (7.5-4)$$

将上式代入运动方程(7.5—1)和(7.5—2),再消去因子 $e^{-i\omega t}$,得

$$-i\omega U - fV = -g\frac{\partial Z}{\partial x},$$

$$-i\omega V + fU = -g\frac{\partial Z}{\partial y},$$

由此解得

$$U = \frac{g}{\omega^2 - f^2}\left(-i\omega\frac{\partial Z}{\partial x} + f\frac{\partial Z}{\partial y}\right), \qquad (7.5-5)$$

$$V = \frac{g}{\omega^2 - f^2}\left(-i\omega\frac{\partial Z}{\partial y} - f\frac{\partial Z}{\partial x}\right)。 \qquad (7.5-6)$$

以上两式称为极化方程。将它们代入连续方程(7.5—3),并假定 f 为常数,则得

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\omega^2 - f^2}{gh}Z = 0, \qquad (7.5-7)$$

称为 Helmholtz 方程。

采用分离变量法求解方程(7.5—7)。令

$$Z(x,y) = X(x)Y(y), \qquad (7.5-8)$$

此处 $X(x)$是 x 的任意函数,$Y(y)$是 y 的任意函数。将(7.5—8)式代入方程(7.5—7),得

$$\frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} + \frac{\omega^2 - f^2}{gh} = 0,$$

因此有

$$\frac{X''}{X} + \frac{\omega^2 - f^2}{gh} = -\frac{Y''}{Y} = 常数, \qquad (7.5-9)$$

其中常数可分为三种情形

$$常数 = \begin{cases} 0 & \\ l^2 & (正数) \\ -l^2 & (负数)。\end{cases} \qquad (7.5-10)$$

下面分别进行讨论(余宙文等,1985)。

7.5.1 平面 Sverdrup 波

这种波动对应于常数$=l^2$的情形。此时(7.5—9)式变成

$$\frac{X''}{X}+\frac{\omega^2-f^2}{gh}=l^2$$

和

$$\frac{Y''}{Y}=-l^2。$$

令

$$k^2=\frac{\omega^2-f^2}{gh}-l^2, \tag{7.5-11}$$

得

$$\left.\begin{aligned}X''+k^2X=0,\\ Y''+l^2Y=0。\end{aligned}\right\} \tag{7.5-12}$$

上面二阶常微分方程有解

$$\left.\begin{aligned}X=A_1e^{-ikx}+B_1e^{ikx},\\ Y=A_2e^{-ily}+B_2e^{ily},\end{aligned}\right\} \tag{7.5-13}$$

将此二解代入(7.5－8)式，得满足 Helmholtz 方程的解

$$Z=C_1e^{i(kx+ly)}+C_2e^{i(kx-ly)}+C_3e^{-i(kx+ly)}+C_4e^{-i(kx-ly)}。 \tag{7.5-14}$$

(7.5－14)式表示平面上四个沿不同方向传播的同一性质的波动之叠加。以下仅讨论其中之一，例如

$$Z=Ae^{i(kx+ly)}, \tag{7.5-15}$$

A 为振幅。将其代入极化方程，可得

$$\left.\begin{aligned}U=\frac{Ag}{\omega^2-f^2}(\omega k+ifl)e^{i(kx+ly)},\\ V=\frac{Ag}{\omega^2-f^2}(\omega l-ifk)e^{i(kx+ly)}。\end{aligned}\right\} \tag{7.5-16}$$

又由(7.5－11)式可得波动的频散关系

$$\omega^2 = f^2 + (k^2 + l^2)gh, \qquad (7.5-17)$$

将此关系代入(7.5—16)式得

$$\left.\begin{aligned} U &= A_u e^{i(kx+ly)}, \\ V &= A_v e^{i(kx+ly)}, \end{aligned}\right\} \qquad (7.5-18)$$

其中

$$A_u = \frac{A}{h}\frac{\omega k + ifl}{k^2 + l^2}, \qquad (7.5-19)$$

$$A_v = \frac{A}{h}\frac{\omega l - ifk}{k^2 + l^2}。 \qquad (7.5-20)$$

于是,完整形式的波动解可写成

$$\zeta = Ae^{i(kx+ly-\omega t)}, \qquad (7.5-21)$$

$$u = A_u e^{i(kx+ly-\omega t)}, \qquad (7.5-22)$$

$$v = A_u e^{i(kx+ly-\omega t)}, \qquad (7.5-23)$$

此解所代表的波动称为 Sverdrup 波。

下面讨论 Sverdrup 波的一些性质。由频率关系(7.5—17)可知,当 $\omega = f$ 时,必有 $k^2 + l^2 = 0$,于是波动消失;当波动存在时,$k^2 + l^2 > 0$,因此必定 $\omega^2 > f^2$,这是 Sverdrup 波的存在条件。若令 $m^2 = k^2 + l^2$,由(7.5—17)式可得波速和群速表达式

$$c = \frac{\omega}{m} = \sqrt{\frac{f^2}{m^2} + gh},$$

$$c_g = \frac{d\omega}{dm} = \frac{m}{\omega}gh。$$

再次利用频散关系 $m^2 gh = \omega^2 - f^2$,则有

$$c = \sqrt{gh}\sqrt{\frac{1}{1-(f/\omega)^2}}, \qquad (7.5-24)$$

$$c_g = \sqrt{gh}\sqrt{1-(f/\omega)^2}。\qquad (7.5-25)$$

表明 Sverdrup 波的波形传播速度大于 $f=0$ 时的长波波形传播速度$\sqrt{gh}$，而其群速则小于 $f=0$ 时的长波群速。若取 x 轴沿波动传播方向，并取(7.5—21)—(7.5—23)式的实部，由于此时 $l=0$，于是有

$$\zeta = A\cos(kx-\omega t), \qquad (7.5-26)$$

$$u = \frac{\omega}{kh}A\cos(kx-\omega t), \qquad (7.5-27)$$

$$v = \frac{f}{kh}A\sin(kx-\omega t), \qquad (7.5-28)$$

相应地频散关系变为

$$\omega^2 = f^2 + ghk^2。\qquad (7.5-29)$$

由(7.5—27)式和(7.5—28)式可得

$$\frac{u^2}{\left(\frac{\omega A}{kh}\right)^2} + \frac{v^2}{\left(\frac{fA}{kh}\right)^2} = 1, \qquad (7.5-30)$$

可见，流速矢端的轨迹为一椭圆，其长轴沿波动传播方向。如果令 θ 为流矢量与 x 轴的夹角，则

$$\theta = \arctan\frac{v}{u},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{u\frac{dv}{dt}-v\frac{du}{dt}}{u^2+v^2} = \frac{-\omega^2A^2f}{k^2h^2(u^2+v^2)}。\qquad (7.5-31)$$

上式表明，在北半球，$\frac{d\theta}{dt}<0$，流矢量随时间作顺时针方向变化，在南半球，情况相反。这个结论说明在开阔海洋里，前进潮波中的旋转潮流是由于地转偏向力作用的结果。

取铅直水柱，高为 $h+\zeta$，宽为 1，沿波传播方向的长度为 dr，并取 $z=-h$（海底）为势能参照面，则所取水柱的势能为

$$dE_{p_1} = \frac{1}{2}\rho g(h+\zeta)^2 dr,$$

于一个波长范围内单位表面面积下的水柱所具有的平均势能为

$$\overline{E}_{p_1} = \frac{\rho g}{2\lambda}\int^{+\lambda}(h+\zeta)^2 dr$$

其中 λ 为波长。当不存在波动时，单位表面面积下的水柱所具有的平均势能为

$$\overline{E}_{p_2} = \frac{\rho g}{2\lambda}\int^{+\lambda} h^2 dr$$

因此，由于波动引起的平均势能应为

$$\overline{E}_p = \overline{E}_{p_1} - \overline{E}_{p_2} = \frac{\rho g}{2\lambda}\int^{+\lambda}(2h\zeta+\zeta^2)dr。\quad (7.5-32)$$

从海底到海面的表面面积为 $1\cdot dr$ 的水柱的动能为

$$\int_{-h}^{\zeta} dE_k = \frac{1}{2}\rho dr\int_{-h}^{\zeta}(u^2+v^2)dz$$

$$\simeq \frac{1}{2}\rho dr\int_{-h}^{0}(u^2+v^2)dz,$$

于一个波长范围内单位表面面积水柱的平均动能为

$$\overline{E}_k = \frac{\rho}{2\lambda}\int^{+\lambda}\int_{-h}^{0}(u^2+v^2)dzdr。\quad (7.5-33)$$

在任意深度处，存在波动时的压强与无波动时的压强之差为 $\rho g\zeta$。于流体中取一与 x 轴垂直的面元，高为 dz，宽为 1，则此面积上压强差所做之功为

$$dP_x = \rho g\zeta u dz$$

将上式沿 z 方向从 $z=-h$ 到 $z=0$ 积分，再于一个周期内进行积分求平均，得

$$\overline{P}_x = \frac{\rho g}{T}\int^{+T}\int_{-h}^{0}\zeta u dz dt,\quad (7.5-34)$$

这是与 x 轴垂直的单位宽度断面上的平均能通量，同理可得与 y 轴垂直的单位宽度断面上的平均能通量

$$\overline{P}_y = \frac{\rho g}{T}\int^{+T}\int_{h}^{0}\zeta v dz dt。\qquad (7.5-35)$$

将(7.5—26)—(7.5—28)式的解代入(7.5—32)—(7.5—35)式，求得 Sverdrup 波的平均势能、平均动能、平均能通量

$$\left.\begin{aligned}
\overline{E}_p &= \frac{1}{4}\rho g A^2,\\
\overline{E}_k &= \frac{1}{4}\rho g A^2\left(\frac{\omega^2+f^2}{\omega^2-f^2}\right),\\
\overline{P}_x &= \frac{1}{2}\rho g A^2\ \frac{\omega}{k},\\
\overline{P}_y &= 0。
\end{aligned}\right\}\qquad (7.5-36)$$

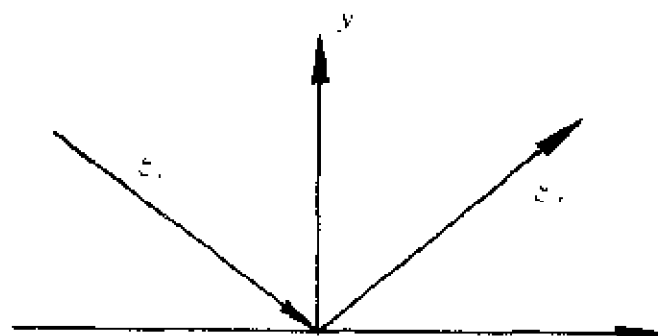


图 7--16　入射和反射的 Sverdrup 波

这些结果表明：由于地转效应，Sverdrup 波的平均动能大于平均势能；尽管地转偏向力产生了与波传播方向垂直的横向流速 v，但是波动的平均能量只沿着波的传播方向转移。

7.5.2　Poincare′ 波

当 Sverdrup 波遇到直线海岸时将发生反射，入射波与反射波的叠加形成另一种波动——Poincare′ 波。

如果取 x 轴与平直海岸线重合，y 轴与海岸线垂直指向外海，

如图 7－16 所示，入射波与反射波可表为[参照(7.5－19)式—(7.5－23)式]

$$\zeta_i = \frac{1}{2} A e^{i(kx-ly-\omega t)}, \qquad (7.5-37)$$

$$u_i = \frac{1}{2} A_u^* e^{i(kx-ly-\omega t)}, \qquad (7.5-38)$$

$$v_i = -\frac{1}{2} A_v^* e^{i(kx-ly-\omega t)}, \qquad (7.5-39)$$

$$\zeta_r = \frac{1}{2} R A e^{i(kx+ly-\omega t)}, \qquad (7.5-40)$$

$$u_r = \frac{1}{2} R A_u e^{i(kx+ly-\omega t)}, \qquad (7.5-41)$$

$$v_r = \frac{1}{2} R A_v e^{i(kx+ly-\omega t)}, \qquad (7.5-42)$$

其中 R 为反射系数，

$$\left.\begin{aligned} A_u^* &= \frac{A}{h} \frac{\omega k - ifl}{k^2 + l^2}, \\ A_v^* &= \frac{A}{h} \frac{\omega l + ifk}{k^2 + l^2}。 \end{aligned}\right\} \qquad (7.5-43)$$

对于全反射，应有 $|R| = 1$。假定海岸为刚性海岸，于 $y=0$ 处应满足法向流速为零，即

$$(v_i + v_r)|_{y=0} = 0,$$

将(7.5－39)式和(7.5－42)式代入后可得

$$R = A_v^* / A_v, \qquad (7.5-44)$$

进一步，由 A_v^* 和 A_v 的表达式，上式可改写为

$$R = e^{-i2\varphi_v}, \tag{7.5-45}$$

式中

$$\varphi_v = \arctan(-\frac{fk}{\omega l})。 \tag{7.5-46}$$

由以上可知，由于地转效应，反射波的位相较不考虑地转影响的反射波增加了$-2\arctan(-\frac{fk}{\omega l})$。

合成波动可表为

$$\zeta = \zeta_i + \zeta_r$$

$$= \frac{1}{2}A[e^{i(kx-ly-\omega t)} + e^{i(kx+ly-\omega t-2\varphi_v)}]$$

作坐标变换 $x' = x - \varphi_v/k$，于是上式变为

$$\zeta = \frac{1}{2}A[e^{i(kx'-ly+\varphi_v-\omega t)} + e^{i(kx'+ly-\varphi_v-\omega t)}],$$

取实部，并略去撇号，得

$$\zeta = A\cos(ly-\varphi_v)\cos(kx-\omega t)。 \tag{7.5-47}$$

类似地可得

$$u = |A_u|\cos(ly-\varphi_v+\varphi_u)\cos(kx-\omega t), \tag{7.5-48}$$

$$v = -|A_v|\sin ly\sin(kx-\omega t), \tag{7.5-49}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} |A_u| &= [\sqrt{(fl)^2+(\omega k)^2}/(k^2+l^2)]\frac{A}{h}, \\ |A_v| &= [\sqrt{(fk)^2+(\omega l)^2}/(k^2+l^2)]\frac{A}{h}, \\ \varphi_u &= \arctan\frac{fl}{\omega k}。 \end{aligned}\right\} \tag{7.5-50}$$

(7.5—47)—(7.5—49)式所代表的波动为 Poincare′波，它是沿 x 方向传播的前进波，因为岸界在其传播方向的右方，故又称为右界 Poincare′波。由(7.5—47)式知，波振幅沿 y 方向呈余弦变化，等振

幅线为与岸线平行的直线，节线的位置应满足

$$ly-\varphi_v=\frac{2n-1}{2}\pi,\quad n=1,2,3\cdots$$

得节线与岸线的距离为

$$y_{右}=\frac{1}{l}\left[\frac{2n-1}{2}\pi+\varphi_v\right]。\qquad (7.5-51)$$

如果仍考虑上半平面，入射波与反射波分别取为

$$\zeta_i=\frac{1}{2}Ae^{i(kx+ly-\omega t)}$$

$$\zeta_r=\frac{1}{2}RAe^{i(kx-ly-\omega t)},$$

结果可得沿负 x 方向传播的合成波动，为左界 Poincare′ 波

$$\zeta=A\cos(ly+\varphi_v)\cos(kx+\omega t),\qquad (7.5-52)$$

$$u=-|A_u|\cos(ly+\varphi_v-\varphi_u)\cos(kx+\omega t),\ (7.5-53)$$

$$v=|A_v|\sin ly\sin(kx+\omega t)。\qquad (7.5-54)$$

同样可得左界 Poincare′ 波的节线位置

$$y_{左}=\frac{1}{l}\left[\frac{2n-1}{2}\pi-\varphi_v\right]。\qquad (7.5-55)$$

比较(7.5—49)式和(7.5—53)式，取 n=1(第一条节线)，可得

$$\left.\begin{aligned}y_{右}&=\frac{1}{l}\left[\frac{\pi}{2}+\arctan\left(-\frac{fk}{\omega l}\right)\right]<\frac{\pi}{2l},\\ y_{左}&=\frac{1}{l}\left[\frac{\pi}{2}-\arctan\left(-\frac{fk}{\omega l}\right)\right]>\frac{\pi}{2l}\end{aligned}\right\}$$

所以左界波的第一条节线到岸边的距离大于右界波的第一条节线到岸边的距离。

入射角是任意的，当垂直入射时，$k=0$，由 φ_v 和 φ_u 的表达式知，此时有 $\varphi_v=0$，$\varphi_u=\frac{\pi}{2}$，从而 Poincare′ 波的表达式(7.5—47)—

(7.5—49)式变成

$$\left.\begin{aligned}\xi &= A\cos ly\cos\omega t,\\ u &= -\frac{f}{lh}A\sin ly\cos\omega t,\\ v &= \frac{\omega}{lh}A\sin ly\sin\omega t,\end{aligned}\right\}\qquad(7.5-57)$$

是驻立 Sverdrup 波。

7.5.3 Kelvin 波

如果(7.5—10)式中的常数取为$-l^2$(负数),则由(7.5—9)式得

$$\frac{X''}{X}+\frac{\omega^2-f^2}{gh}=-l^2,$$

$$\frac{Y''}{Y}=l^2。$$

令

$$k^2=\frac{\omega^2-f^2}{gh}+l^2,\qquad(7.5-58)$$

得

$$X''+k^2X=0,\qquad(7.5-59)$$

$$Y''-l^2Y=0。\qquad(7.5-60)$$

此二阶常微分方程之解为

$$\left.\begin{aligned}X &= A_1e^{ikx}+B_1e^{-ikx},\\ Y &= A_2e^{ly}+B_2e^{-ly},\end{aligned}\right\}\qquad(7.5-61)$$

于是

$$Z=XY=C_1e^{ly+ikx}+C_2e^{ly-ikx}+C_3e^{-ly+ikx}+C_4e^{-ly-ikx},$$

它代表一种振幅随 y 呈指数形式变化、沿 x 方向传播的波动。考虑

到解的有界性，上述解只能存在于半平面内。例如，若考虑上半平面，则上述解中必须令 $C_1=C_2=0$，因此满足 Helmholtz 方程的有界解为

$$Z = C_3 e^{-ly+ikx} + C_4 e^{-ly-ikx}。\qquad (7.5-62)$$

利用极化方程可得相应的流速

$$U = \frac{g}{\omega^2-f^2}[(\omega k-fl)C_3 e^{-ly+ikx} + (-\omega k-fl)C_4 e^{-ly-ikx}], \qquad (7.5-63)$$

$$V = \frac{ig}{\omega^2-f^2}[(\omega l-fk)C_3 e^{-ly+ikx} + (\omega l+fk)C_4 e^{-ly-ikx}]。\qquad (7.5-64)$$

在固体边界处要求

$$V|_{y=0} = 0,$$

为了满足此条件，在北半球($f>0$)，(7.5—64)式中必须满足

$$C_4 = 0, \quad \omega l - fk = 0, \qquad (7.5-65)$$

由此可得

$$l = \frac{fk}{\omega} = \frac{f}{c}。\qquad (7.5-66)$$

若 C_3 改用 A 表示，将(7.5—65)和(7.5—66)式代入(7.5—62)—(7.5—64)式，并考虑时间因子，得

$$\zeta = Ae^{-\frac{f}{c}y+i(kx-\omega t)},$$

$$u = \frac{g}{c}Ae^{-\frac{f}{c}y+i(kx-\omega t)},$$

$$v = 0。\qquad (7.5-67)$$

这组解表示的波动称为Kelvin 波，其存在域为上半平面。由极化方程知 $\omega\neq f$，因此(7.5—67)的 Kelvin 波要求 $\omega>f$ 或 $\omega<f$。对于下半平面或左半平面或右半平面都可获得类似的解。总得说来，Kelvin 波的特点是其传播方向的右边必须有边界，所以 Kelvin 波

是右界波；另外，波动振幅是沿传播方向的左边衰减，所以 Kelvin 波又是左减波。Kelvin 波不存在横向流速($v=0$)。再由(7.5—58)式和(7.5—66)式得

$$k^2=\frac{\omega^2-f^2}{gh}+(\frac{f}{c})^2,$$

改写成

$$\frac{\omega^2k^2}{\omega^2}=\frac{\omega^2-f^2}{gh}+\frac{f^2}{c^2},$$

或

$$\frac{\omega^2}{c^2}=\frac{\omega^2-f^2}{gh}+\frac{f^2}{c^2},$$

由此得到 Kelvin 波的波速

$$c=\sqrt{gh} \qquad (7.5-68)$$

此式与普通重力长波的波速公式相同。

§7.6 海峡和矩形海湾中的潮波

7.6.1 海峡中的 Kelvin 波和旋转潮波系统

由于 Kelvin 波的横向流速 $v=0$，因此在等宽等深的海峡中，Kelvin 波是可能存在的。例如台湾海峡，是一个两岸基本相互平行，水深分布比较均匀，因而具有 Kelvin 波存在条件的区域。其中的 K_1 潮波具有明显的 Kelvin 波特征（叶安乐，1986，1990），如图 7—17 所示，K_1 潮波由台湾海峡北端向南端传播，在传播方向的右边的振幅大于左边的振幅，等振幅线大致与岸线平行，波峰线大致与岸边垂直。

如果在无限长的等深海峡中存在着沿相反方向传播的两个 Kelvin 波，设 x 轴取在海峡的中轴线上，则它们叠加之后可表为

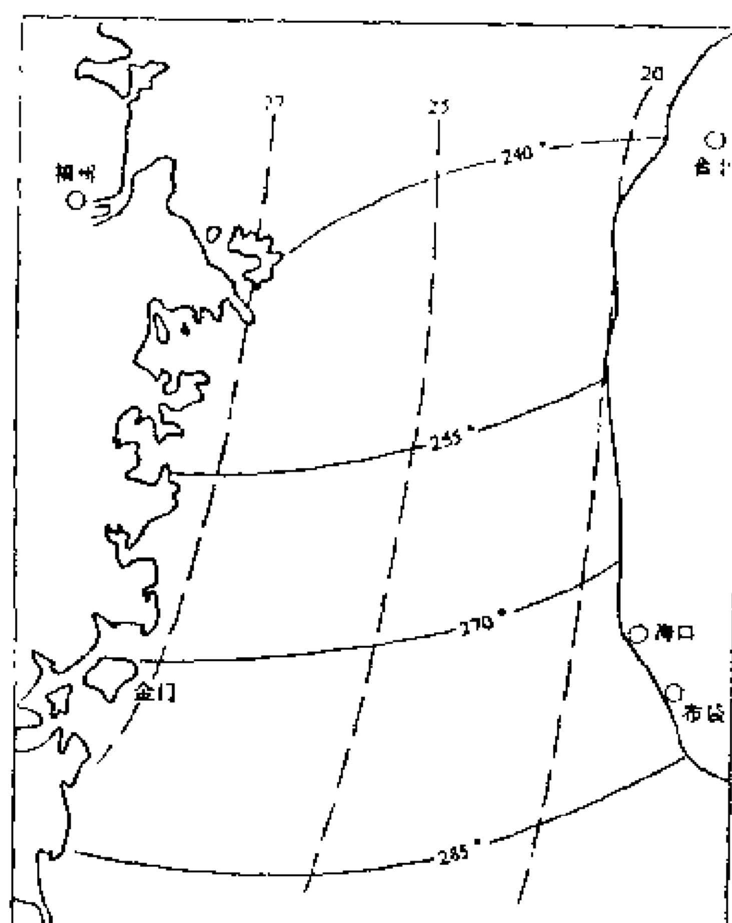


图 7—17　台湾海峡的 K_1Kelvin 波

（实线为同位相线(°)，虚线为等振幅线(cm)）

$$\zeta = \zeta_+ + \zeta_-$$

$$= Ae^{-\frac{f}{c}y}e^{i(kx-\omega t)} + Ae^{\frac{f}{c}y}e^{i(-kx-\omega t)}$$

其中 ζ_+ 代表沿正 x 方向传播的 Kelvin 波，ζ_- 代表沿负 x 方向传播的 Kelvin 波。由于 x 轴取在中轴线上，因此两个 Kelvin 波的振幅 $Ae^{-\frac{f}{c}y}$ 和 $Ae^{\frac{f}{c}y}$ 是关于 x 轴对称的。取上式的实部并展开

$$\zeta = Ae^{-\frac{f}{c}y}\cos(kx-\omega t) + Ae^{\frac{f}{c}y}\cos(kx+\omega t)$$
$$= 2A\left[\mathrm{ch}\frac{f}{c}y\cos\frac{\omega}{c}x\cos\omega t - \mathrm{sh}\frac{f}{c}y\sin\frac{\omega}{c}x\sin\omega t\right], \tag{7.6-1}$$

令

$$\left.\begin{aligned} \zeta_1 &= 2A\mathrm{ch}\frac{f}{c}y\cos\frac{\omega}{c}x, \\ \zeta_2 &= -2A\mathrm{sh}\frac{f}{c}y\sin\frac{\omega}{c}x, \end{aligned}\right\} \tag{7.6-2}$$

则(7.6—1)式变成

$$\zeta = \zeta_1\cos\omega t + \zeta_2\sin\omega t。 \tag{7.6-3}$$

由上式可知，ζ_1 代表 $t=0$ 时刻的 ζ 值，ζ_2 代表 $t=\frac{T}{4}$ 时刻的 ζ 值。再令

$$\zeta_1 = R\cos\theta, \quad \zeta_2 = R\sin\theta, \tag{7.6-4}$$

于是有

$$R = \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2}, \tag{7.6-5}$$

$$\theta = \arctan\frac{\zeta_2}{\zeta_1}, \tag{7.6-6}$$

$$\zeta = R\cos(\omega t - \theta)。 \tag{7.6-7}$$

利用 $R=$常数，可以确定等振幅线，利用 $\omega t-\theta=0$，可以确定同潮时线。于是等振幅线的方程可表为

$$\mathrm{ch}^2\frac{f}{c}y\cos^2\frac{\omega}{c}x + \mathrm{sh}^2\frac{f}{c}y\sin^2\frac{\omega}{c}x = \text{常数}。 \tag{7.6-8}$$

如果取常数$=0$，则可确定振幅为零的点(x_0, y_0)，由(7.6—8)可以看出，欲使 $R=0$，必须满足

$$\frac{f}{c}y_0 = 0,$$

$$\frac{\omega}{c}x_0 = \frac{2n-1}{2}\pi,$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots)$$

由此得

$$\left.\begin{aligned} & x_0 = \frac{2n-1}{2}\pi\frac{c}{\omega}, (n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots) \\ & y_0 = 0. \end{aligned}\right\} \quad (7.6-9)$$

上式表明,振幅为零的点位于海峡的中轴线上,相邻的两个振幅为零的点之间的距离为 $\pi\frac{c}{\omega}=\frac{\lambda}{2}$(半波长)。这些振幅为零的点称之为无潮点。如果常数不为零,此时将(7.6—8)式改写成

$$\text{ch}^2\frac{f}{c}y(1-\sin^2\frac{\omega}{c}x) + \text{sh}^2\frac{f}{c}y\sin^2\frac{\omega}{c}x$$

$$= \text{ch}^2\frac{f}{c}y - \sin^2\frac{\omega}{c}x = 常数,$$

再将坐标原点移至无潮点上,例如移至 $n=1$ 所对应的的无潮点上,并且新坐标以 x' 和 y' 表示,于是有

$$\frac{f}{c}y = \frac{f}{c}y', \quad \frac{\omega}{c}x = \frac{\omega}{c}x' + \frac{\pi}{2},$$

相应地,等振幅线方程变为

$$\text{ch}^2\frac{f}{c}y' - \cos^2\frac{\omega}{c}x' = 常数。 \qquad (7.6-10)$$

如果讨论无潮点附近的等振幅线分布,由于 x' 和 y' 很小,从而 $\text{ch}^2\frac{f}{c}y' \simeq 1+(\frac{f}{c}y')^2$, $\cos^2\frac{\omega}{c}x' \simeq 1-(\frac{\omega}{c}x')^2$,因此,在新坐标原点附近的等振幅线方程可表为

$$\frac{(x')^2}{(f/c)^2} + \frac{(y')^2}{(\omega/c)^2} = 常数, \qquad (7.6-11)$$

显然,无潮点附近的等振幅线为一椭圆族,并且当 $f>\omega$ 时,椭圆长轴位于 x 轴上,而当 $f<\omega$ 时,椭圆长轴位于 y 轴上。

设 t_c 为发生高潮时刻,由 $\omega t_c-\theta=0$ 得

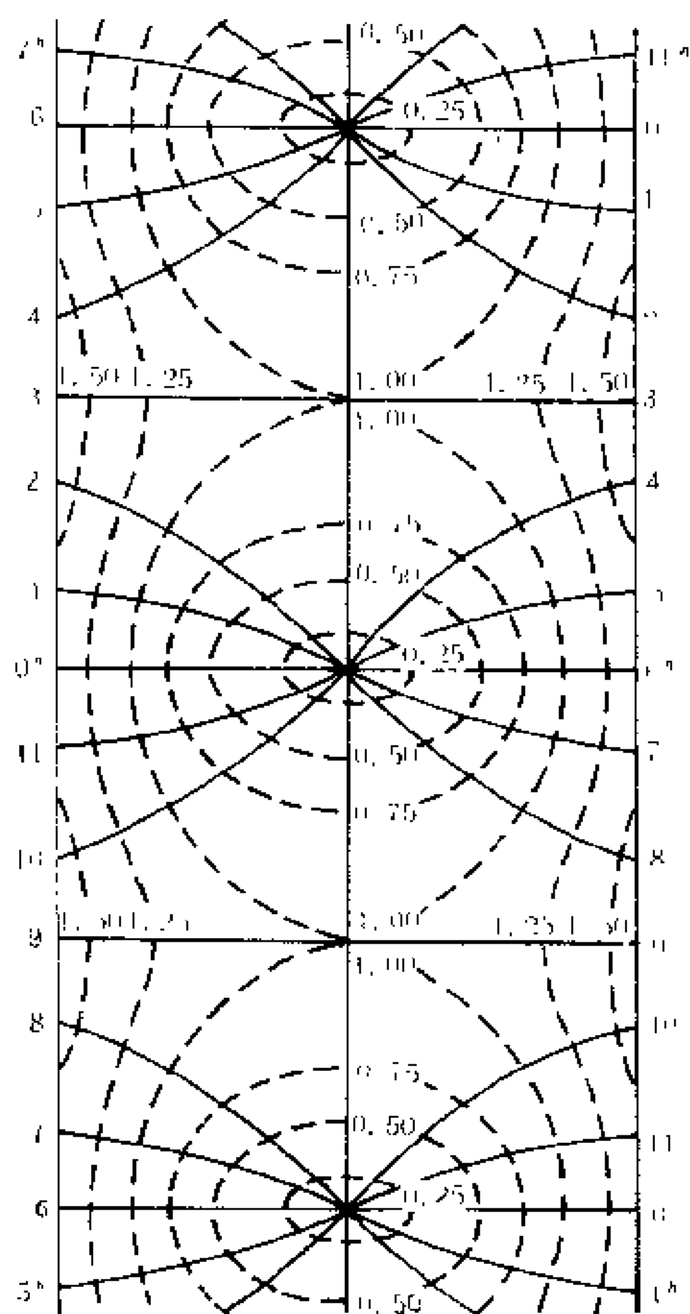


图 7—18　海峡中两个相反方向传播的 Kelvin 波的叠加
($f<0$)，(实线为同潮时线，虚线为等振幅线)(据陈宗镛潮汐学，1982)

$$t_c=\frac{\theta}{\omega}=\frac{1}{\omega}\arctan\left(-\text{th}\,\frac{f}{c}y\cdot\tan\frac{\omega}{c}x\right),$$

由 t_c＝常数所确定的空间曲线即为同潮时线。在新坐标系中，同潮

时线由下式确定

$$t_c = \frac{1}{\omega}\arctan[-\text{th}\frac{f}{c}y'\tan(\frac{\omega}{c}x' + \frac{\pi}{2})] = \text{常数},$$

或

$$t_c = \frac{1}{\omega}\arctan[\text{th}\frac{f}{c}y'/\tan\frac{\omega'}{c}x] = \text{常数}。$$

若在新原点附近($n=1$ 所对应的无潮点附近),上式可近似表为

$$t_c = \frac{1}{\omega}\arctan(\frac{f}{c}y'/\frac{\omega}{c}x') = \text{常数}$$

由此可得方程

$$y' = [\frac{\omega}{f}\tan\omega t_c]x'。 \quad (7.6-12)$$

这表明,在无潮点附近的同潮时线是一些直线。其中 t_c 为一任意给定的值,随着 t_c 的增大,在北半球 $f>0$,直线以无潮点为中心作逆时针方向的旋转,在南半球 $f<0$,直线作顺时针方向旋转。

在离开无潮点较远的地方,等振幅线的形状不再是椭圆,离开得越远偏差越大,同样离开无潮点较远处,同潮时线不再是直线。

图 7—18 是南半球($f<0$)海峡中两个相反方向传播的 Kelvin 波叠加的结果,可以看出存在一系列无潮点位于海峡中轴线上的旋转潮波系统,这些系统是关于中轴线对称的。

7.6.2 考虑摩擦的 Kelvin 波和旋转潮波系统

前面没有考虑摩擦的影响,意即海峡相当宽,水深相当深。这一小节仍然假定海峡很宽,但水深较浅。再假定海面无风,因此需要考虑的只有海底切应力。据此,铅直向平均基本方程为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t}-f\langle v\rangle=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\frac{A_z}{h}\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=-h},\\
&\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t}+f\langle u\rangle=-g\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\frac{A_z}{h}\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=-h},\\
&\frac{\partial\zeta}{\partial t}+h(\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x}+\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y}=0,
\end{aligned}\right\}\quad(7.6-13)$$

其中$\langle u\rangle$，$\langle v\rangle$为铅直向平均速度，$\rho A_z\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=-h}$，$\rho A_z\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=-h}$为海底切应力(摩擦力)，记为

$$\tau_{xb}=\rho A_z\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=-h},\quad\tau_{yb}=\rho A_z\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=-h},\quad(7.6-14)$$

它们通常以一种比较切合实际的形式给出

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xb}&=\rho k''u_b|u_b|,\\
\tau_{yb}&=\rho k''v_b|v_b|,
\end{aligned}\right\}\quad(7.6-15)$$

下标 b 指示海底附近的量，k''为一比例常数。虽然这种表达形式比较近于实际，但在求解方程时比较困难，因此人为地引进一种与速度一次方成比例的表达式

$$\left.\begin{aligned}
\tau_{xb}&=\rho k'u_b,\\
\tau_{xb}&=\rho k'v_b。
\end{aligned}\right\}\quad(7.6-16)$$

这样必然带来误差，为了减少误差，可采用使(7.6—15)式和(7.6—16)式所表达的两种形式的摩擦力在一定期间内做功相等，来建立 k' 和 k''之间的关系。对于谐波，使两种形式的摩擦力在四分之一周期内做功相等，可得关系

$$k'=\frac{8}{3\pi}Uk'',\quad(7.6-17)$$

其中 U 为谐波的流速振幅。Taylor(1919)研究爱尔兰海潮汐时，利用两个断面之间海底摩擦消耗的潮汐能量计算得到 $k''=0.0026$，于是有

$$k'=0.0022U。\quad(7.6-18)$$

令

$$k = \frac{k'}{h} = 0.0022\,\frac{U}{h}, \qquad (7.6-19)$$

因此,基本方程的摩擦项可表为

$$\left.\begin{aligned} \frac{A_z \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=-h}}{h} &\simeq \frac{k'}{h} u_b = k u_b \simeq k\langle u\rangle, \\ \frac{A_z \left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=-h}}{h} &\simeq \frac{k'}{h} v_b = k u_b \simeq k\langle v\rangle。 \end{aligned}\right\} \qquad (7.6-20)$$

将以上两式代入基本方程(7.6—13),并略去铅直向平均符号〈 〉,得

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial t} - fv = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} - ku, \\ &\frac{\partial v}{\partial t} + fu = -g\frac{\partial \zeta}{\partial y} - kv, \\ &\frac{\partial \zeta}{\partial t} + h\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) = 0。 \end{aligned}\right\} \qquad (7.6-21)$$

为了便于求解,下面讨论中取 k 为某一确定值。类似于以前的讨论,方程的解取为如下形式

$$\zeta = Z(x,y)e^{-i\omega t},$$
$$u = U(x,y)e^{-i\omega t},$$
$$v = V(x,y)e^{-i\omega t},$$

代入(7.6—21)式中的运动方程,得

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{g}{\omega^2(1+i\mu)^2 - f^2}\left[-i\omega(1+i\mu)\frac{\partial Z}{\partial x} + f\frac{\partial Z}{\partial y}\right], \\ V &= \frac{g}{\omega^2(1+i\mu)^2 - f^2}\left[-i\omega(1+i\mu)\frac{\partial Z}{\partial y} - f\frac{\partial Z}{\partial x}\right], \end{aligned}\right\}$$

(7.6—22)

其中 $\mu = k/\omega$。将上式代入(7.6—21)式中的连续方程,得

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} + \frac{\omega^2(1+i\mu)^2 - f^2}{gh(1+i\mu)} Z = 0。 \qquad (7.6-23)$$

由(7.6—23)式和(7.6—22)式，按无摩擦情况下的 Kelvin 波的讨论过程，最后可得满足边界条件的解的实部

$$\left.\begin{aligned}\zeta &= Ae^{-(\alpha_1 y+\beta_1 x)}\cos(\alpha_2 y+\beta_2 x-\omega t),\\ u &= \frac{g}{\sqrt{gh}}\frac{1}{\sqrt[4]{1+\mu^2}}Ae^{-(\alpha_1 y+\beta_1 x)}\\ &\quad\times\cos(\alpha_2 y+\beta_2 x-\omega t+r),\\ v &= 0,\end{aligned}\right\}\quad(7.6-24)$$

其中

$$r=\arctan\sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{\sqrt{1+\mu^2}+1}},\qquad(7.6-25)$$

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{f}{\sqrt{gh}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}+1}{2(1+\mu^2)}},\\ \alpha_2 &= \frac{f}{\sqrt{gh}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{2(1+\mu^2)}},\\ \beta_1 &= \frac{\omega}{\sqrt{gh}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{2}},\\ \beta_2 &= \frac{\omega}{\sqrt{gh}}\sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}+1}{2}}。\end{aligned}\right\}\quad(7.6-26)$$

将不考虑摩擦的 Kelvin 波表达式(7.5—67)和考虑摩擦的 Kelvin 波表达式(7.6—24)进行比较可以看出：考虑摩擦的 Kelvin 波的振幅包含因子 $e^{-\beta_1 x}$，故随着波动传播距离的增加，振幅逐渐衰减；由于考虑摩擦的 Kelvin 波中，只有流速振幅包含因子 $\frac{1}{\sqrt[4]{1+\mu^2}}$，因此，它的流速振幅与潮位振幅之比值小于不考虑摩擦的 Kelvin 波的相应比值；摩擦的影响使得流速与潮位的位相相差 r，因而沿

波动传播方向的最大流速发生时刻比最高潮位发生时刻提前 τ/ω；存在摩擦时，波数 $m=\sqrt{\alpha_2^2+\beta_2^2}$，波速 $c^2=\omega^2/m^2=gh\omega^2/[f^2\times\frac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{2(1+\mu^2)}+\omega^2\frac{\sqrt{1+\mu^2}+1}{2}]<gh$，因此摩擦使得波速减小，从而波长也减小。

设等宽等深海峡中存在沿相反方向传播的两个受摩擦影响的 Kelvin 波，叠加的结果可表为

$$\begin{aligned}\zeta &= \zeta_+ + \zeta_- \\ &= Ae^{-(\alpha_1 y+\beta_1 x)}\cos(\alpha_2 y + \beta_2 x - \omega t) \\ &\quad + Ae^{\alpha_1 y+\beta_1 x}\cos(\alpha_2 y + \beta_2 x + \omega t) \\ &= 2A[\mathrm{ch}(\alpha_1 y + \beta_1 x)\cos(\alpha_2 y + \beta_2 x)\cos\omega t \\ &\quad - \mathrm{sh}(\alpha_1 y + \beta_1 x)\sin(\alpha_2 y + \beta_2 x)\sin\omega t],\end{aligned} \tag{7.6-27}$$

令

$$\theta_1 = \alpha_1 y + \beta_1 x,\quad \theta_2 = \alpha_2 y + \beta_2 x,$$

$$\zeta_1 = 2A\mathrm{ch}\theta_1\cos\theta_2,\quad \zeta_2 = -2A\mathrm{sh}\theta_1\sin\theta_2,$$

于是，(7.6—27)式可记为

$$\zeta = \zeta_1\cos\omega t + \zeta_2\sin\omega t。\tag{7.6-28}$$

由上式可得合成波动的振幅 R 的表达式

$$R^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2 = 4A^2(\mathrm{ch}^2\theta_1\cos^2\theta_2 + \mathrm{sh}^2\theta_1\sin^2\theta_2)。$$

振幅为零的点(x_0, y_0)由下式确定

$$\mathrm{ch}^2\theta_1\cos^2\theta_2 + \mathrm{sh}^2\theta_1\sin^2\theta_2 = 0,$$

显然，应满足

$$\theta_1 = \alpha_1 y_0 + \beta_1 x_0 = 0,$$

$$\theta_2 = \alpha_2 y_0 + \beta_2 x_0 = \frac{2n-1}{2}\pi,\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

由此得到无潮点的坐标

$$
\left.\begin{aligned}
x_0 &= \frac{2n-1}{2}\pi\frac{\sqrt{gh}}{\omega}\sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}+1}{2}},\\
y_0 &= -\frac{2n-1}{2}\pi\frac{\sqrt{gh}}{f}\sqrt{\frac{\sqrt{1+\mu^2}-1}{2}}\sqrt{1+\mu^2}。
\end{aligned}\right\}
$$

(7.6 — 29)

从(7.6—29)式可以看出，当 $x_0>0$(对应于 n 取正值)时，$y_0<0$，当 $x_0<0$(对应于 n 取零或负值)时，$y_0>0$，即如果 x 轴取在海峡的中轴线上，则无潮点不再位于中轴线上，而是向强度较强的 Kelvin 波的传播方向的左方偏移：在 $x<0$ 的海峡部分，沿正 x 方向传播的波动强度比沿负 x 方向传播的波动强度要强，因此无潮点向正 y 方向偏移，在 $x>0$ 的海峡部分，情形相反，因此无潮点向负 y 方向偏移。

由于摩擦的影响，除了引起无潮点的偏移而外，旋转潮波系统也变得比较不太规则了；无潮点附近的等振幅线的形状不再是椭圆曲线，同潮时线也不再是直线。

7.6.3 海峡中的 Poincare′波

现在考虑等深等宽的无限长海峡。设宽度为 b，深度为 h。通常取 x 轴与海峡的中轴线重合，为此作坐标变换 $y=y'+\frac{b}{2}$，于是右界 Poincare′波的表达式(7.5—47)—(7.5—49)变成

$$
\zeta = A\cos(ly'+\frac{lb}{2}-\varphi_\zeta)\cos(kx-\omega t), \quad (7.6-30)
$$

$$
u = |A_u|\cos(ly'+\frac{lb}{2}-\varphi_\zeta+\varphi_u)\cos(kx-\omega t),
$$

(7.6 — 31)

$$v = -|A_v|\sin(ly' + \frac{lb}{2})\sin(kx-\omega t)。 \quad (7.6-32)$$

在海峡中要求满足边界条件 $v|_{-\frac{b}{2}}=0$ 和 $v|_{\frac{b}{2}}=0$。第一个边界条件无疑是满足的；第二个边界条件则需要 $lb=n\pi(n=1,2,3,\cdots\cdots)$，即横向波数应满足

$$l = \frac{n\pi}{b}。 \quad (7.6-33)$$

将(7.6—33)式代入(7.6—30)—(7.6—32)式后可展成

$$\zeta = A[\cos(\frac{n\pi}{b}y'-\varphi_v)\cos\frac{n\pi}{2}-$$

$$\sin(\frac{n\pi}{b}y'-\varphi_v)\sin\frac{n\pi}{2}]\cos(kx-\omega t), \quad (7.6-34)$$

$$u = |A_u|[\cos(\frac{n\pi}{b}y'-\varphi_v+\varphi_u)\cos\frac{n\pi}{2}-$$

$$\sin(\frac{n\pi}{b}y'-\varphi_v+\varphi_u)\sin\frac{n\pi}{2}]\cos(kx-\omega t), \quad (7.6-35)$$

$$v = -|A_v|[\sin\frac{n\pi}{b}y'\cos\frac{n\pi}{2}+$$

$$\cos\frac{n\pi}{b}y'\sin\frac{n\pi}{2}]\sin(kx-\omega t), \quad (7.6-36)$$

其中，$|A_u|$，$|A_v|$，φ_u 和 φ_v 中的 l 已用 $\frac{n\pi}{b}$ 代替。显然，海峡中的Poincare'波动表达式(7.6—34)—(7.6—36)可按 n 为奇数和 n 为偶数分别表为

$$\zeta = (-1)^{(n+1)/2}A\sin(\frac{n\pi}{b}y'-\varphi_v)\cos(kx-\omega t),$$

$$(7.6-37a)$$

$$u = (-1)^{(n+1)/2}|A_u|\sin(\frac{n\pi}{b}y'-\varphi_v+\varphi_u)\cos(kx-\omega t),$$
$$(7.6-38a)$$

$$v = (-1)^{(n+1)/2}|A_v|\cos\frac{n\pi}{b}y'\sin(kx-\omega t)。\quad(7.6-39a)$$

其中 $n=1,3,5,\cdots\cdots$ 和

$$\zeta = (-1)^{n/2}A\cos(\frac{n\pi}{b}y'-\varphi_v)\cos(kx-\omega t),\quad(7.6-37b)$$

$$u = (-1)^{n/2}|A_u|\cos(\frac{n\pi}{b}y'-\varphi_v+\varphi_u)\cos(kx-\omega t),$$
$$(7.6-38b)$$

$$v = -(-1)^{n/2}|A_v|\sin\frac{n\pi}{b}y'\sin(kx-\omega t)。\quad(7.6-39b)$$

其中 $n=2,4,6,\cdots\cdots$。海峡中的 Poincare'波的频散关系由(7.5—17)和(7.6—33)式得到

$$k^2+(\frac{n\pi}{b})^2=\frac{\omega^2-f^2}{gh}。\quad(7.6-40)$$

当 n=1 时,两岸波动为

$$y=\frac{b}{2}\text{处},\zeta=-A\cos\varphi_v\cos(kx-\omega t)$$
$$u=-|A_u|\cos(\varphi_v-\varphi_u)\cos(kx-\omega t),$$
$$v=0$$
$$y=-\frac{b}{2}\text{处},\zeta=A\cos\varphi v\cos(kx-\omega t),$$
$$u=|A_u|\cos(\varphi_v-\varphi_u)\cos(kx-\omega t),$$
$$v=0。$$

当 $n=2$ 时,两岸波动为

$$y = \frac{b}{2} \text{ 处}, \zeta = A\cos\varphi_e \cos(kx - \omega t),$$

$$u = |A_u| \cos(\varphi_e - \varphi_u) \cos(kx - \omega t),$$

$$v = 0。$$

$$y = -\frac{b}{2} \text{ 处}, \zeta = A\cos\varphi_e \cos(kx - \omega t),$$

$$u = |A_u| \cos(\varphi_e - \varphi_u) \cos(kx - \omega t),$$

$$v = 0。$$

一般地说，当 n 取为奇数时，海峡中的 Poincare′ 波在两岸表现为位相相反，当 n 取为偶数时，则其在两岸表现为位相相同。

7.6.4 矩形海湾中的潮波

首先考虑一个宽度较窄的矩形海湾。设其深度 h 为常数，长度为 L。取 x 轴与海湾中轴线重合，x 指向湾口为正，坐标原点位于湾顶。由于海湾较窄，其中的横向运动可以忽略，因此运动可近似认为是一维的。再若暂不计摩擦，则铅直向平均的一维线性方程组可表为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + g\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + h\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (7.6-41)$$

边界条件为

$$u|_{x=0} = 0。 \qquad (7.6-42)$$

若研究一个主要分潮波，则它可取如下形式

$$\left.\begin{aligned} \zeta = Z(x)e^{i\omega t}, \\ u = U(x)e^{i\omega t}。 \end{aligned}\right\} \qquad (7.6-43)$$

现在由方程组交叉微分消去 u，得到仅含 ζ 的微分方程

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - gh\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = 0。 \qquad (7.6-44)$$

将(7.6－43)式中的 ζ 表达式代入上式并略去因子 $e^{i\omega t}$，结果有

$$\frac{d^2Z}{dx^2}+\frac{\omega^2}{gh}Z=0, \qquad (7.6-45)$$

其解为

$$Z=A_1e^{ikx}+A_2e^{ikx}, \qquad (7.6-46)$$

其中

$$k=\frac{\omega}{\sqrt{gh}}。 \qquad (7.6-47)$$

由运动方程和表达式(7.6－43)可得

$$U=-\frac{g}{i\omega}\frac{dZ}{dx},$$

然后将(7.6－46)代入上式，结果有

$$U=-\frac{gk}{\omega}(A_1e^{ikx}-A_2e^{-ikx})。 \qquad (7.6-48)$$

利用边界条件(7.6－42)式，由 $U|_{x=0}=0$ 可确定

$$A_1=A_2=R/2, \qquad (7.6-49)$$

最后，用关系式(7.6－49)，再加上时间因子，便到方程的解，

$$\zeta=R\cos kxe^{i\omega t}$$

$$u=-i\frac{gk}{\omega}R\sin kxe^{i\omega t},$$

取其实部

$$\zeta=R\cos kx\cos\omega t, \qquad (7.6-50)$$

$$u=\frac{g}{c}R\sin kx\sin\omega t, \qquad (7.6-51)$$

其中

$$c=\frac{\omega}{k}=\sqrt{gh}。 \qquad (7.6-52)$$

(7.6－50)和(7.6－51)代表驻立波动。如果在湾口的潮位以 ζ_B 表

示，则

$$\zeta_B = R\cos kL\cos\omega t = R_B\cos\omega t, \qquad (7.6-53)$$

其中

$$R_B = R\cos kL,$$

因而(7.6—50)式可表示成

$$\zeta = R_B \frac{\cos kx}{\cos kL}\cos\omega t。 \qquad (7.6-54)$$

利用关系式 $k=\frac{2\pi}{\lambda}$，于是

$$\zeta = R_B \frac{\cos\frac{2\pi}{\lambda}x}{\cos\frac{2\pi}{\lambda}L}\cos\omega t。 \qquad (7.6-55)$$

显然，如果海湾长度 $L>\frac{\lambda}{4}$，则在海湾内存在潮位为零的节线，而当

$$L = \frac{\lambda}{4} = \frac{1}{4}cT = \frac{1}{4}T\sqrt{gh}, \qquad (7.6-56)$$

此时潮波发生共振。

芬地湾的 M_2 分潮是海湾潮汐接近共振的一个例子。芬地湾的平均水深为 $h=75\text{m}$，M_2 分潮的周期 $T=12.4\text{hr}$，由公式(7.6—56)求得波长

$$\lambda = T\sqrt{gh} = 1200\text{km},$$

而芬地湾的长度 L＝270km，因此 $L<\frac{\lambda}{4}$，即整个湾内的潮位同时升或降。计算得

$$\cos\frac{2\pi L}{\lambda} = \cos\frac{270}{600}\pi = \cos 81° = 0.156,$$

由此求得湾顶处的潮位

$$\zeta|_{x=0} = \frac{R_B}{0.156}\cos\omega t = 6.4R_B\cos\omega t。 \qquad (7.6-57)$$

可见湾顶的潮位高度为湾口的 6.4 倍。芬地湾湾顶的潮汐是世界最大的，潮差可达 14m。

其次考虑具有较大宽度的矩形海湾。这种海湾中的潮波运动，地转对它有重要的影响。由于地转效应，很多海湾(如渤海的辽东湾，北部湾，泰国湾等等)中的潮波运动表现为旋转潮波系统，而不是简单的驻立波动。我们知道，简单的驻立波是沿相反方向传播的两个简单谐波相加的结果，那么，这种海湾中的旋转潮波系统可否表示成沿相反方向传播的两个 Kelvin 波的叠加？答案是否定的。如果不考虑摩擦的影响，Kelvin 波的振幅比例于 $e^{\pm\frac{f}{c}y}$，因此在海顶处流速为零的边界条件得不到满足。这表明矩形海湾中的旋转潮波系统不仅仅包含沿正负方向传播的 Kelvin 波，而且还包含着其它一些波动。最早获得半无限长矩形海湾中满足边界条件的潮波运动解的是 Taylor(1921)。他规定湾顶位于 $x=x_1$ 处，设满足边界条件的完整解由两部分构成，第一部是沿正负 x 方向传播的 Kelvin 波，第二部分又分两种情况，一种是一系列 Poincaré 波之和，另一种是沿 x 方向(从湾顶向湾口)以指数形式衰减的波动之和。然后利用法向流速为零的边界条件，确定第二部分解。Taylor 进行了具体计算，由计算结果绘制了两张图，一是同潮图(图 7—19)，一是潮流椭圆图(图 7—20)。由此可以看出，同潮图与两个相反方向的 Kelvin 波在无限长海峡中的叠加结果相似，但潮流不再是往复流，而是在湾顶附近表现为旋转流。这种结果与实际海湾中的潮流运动比较相近。

实际海湾的水深往往比较浅，海底摩擦的影响不应忽略。陈宗镛(1965)，方国洪(1966)改进了 Taylor 的研究，在基本方程中加上了线性摩擦项。图 7—21 是陈的计算结果。由图可见，由于摩擦的影响，无潮点不再位于辽东湾的中轴线上，而是向而向湾顶方向的左方偏移，这与实际情况相似。无潮点的这种偏移是在摩擦影响下，反射波较弱而入射波较强的结果，这可以近似地以无限长海峡

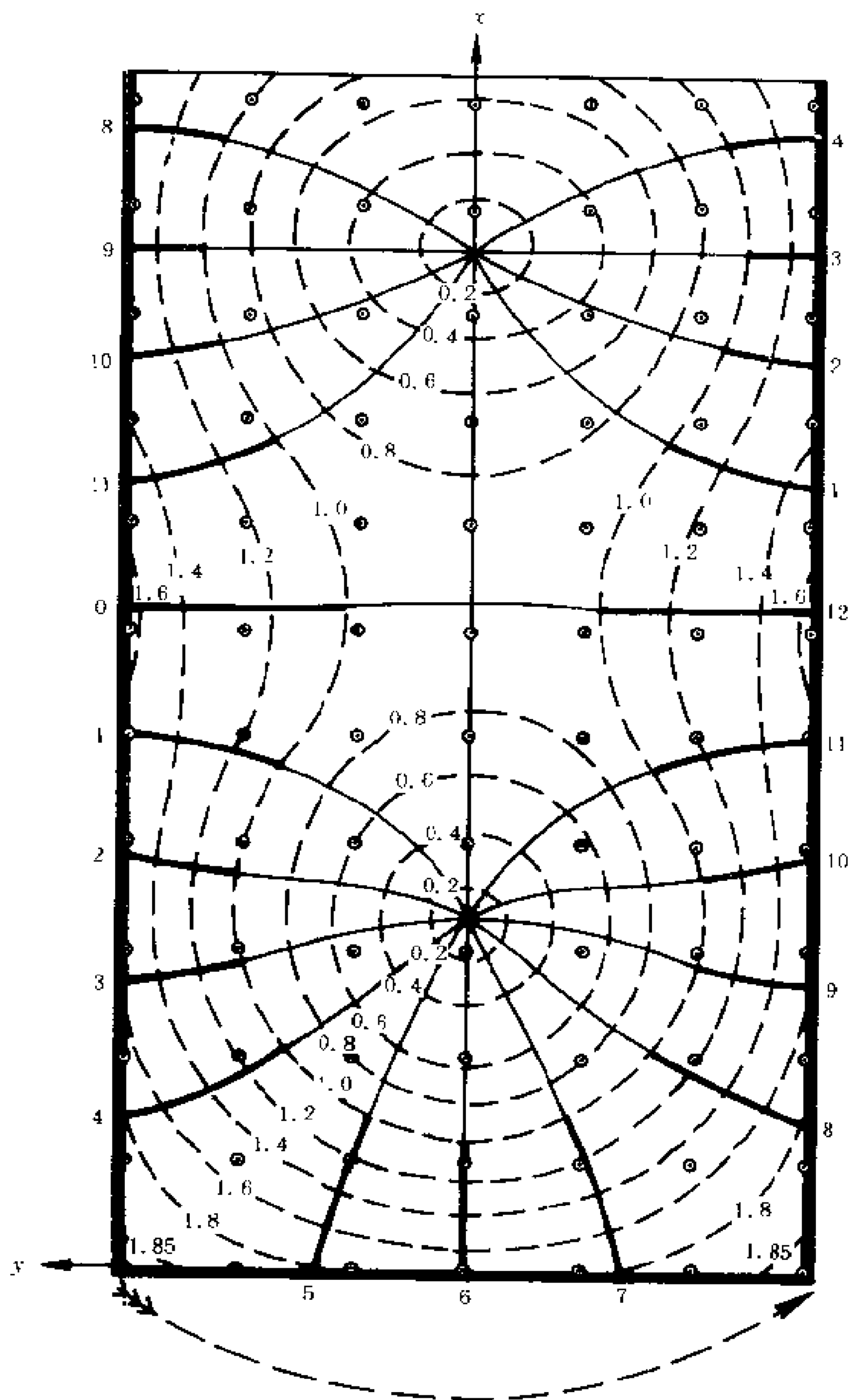


图 7—19　半无限长矩形海湾中的同潮图

(Taylor, 1921)

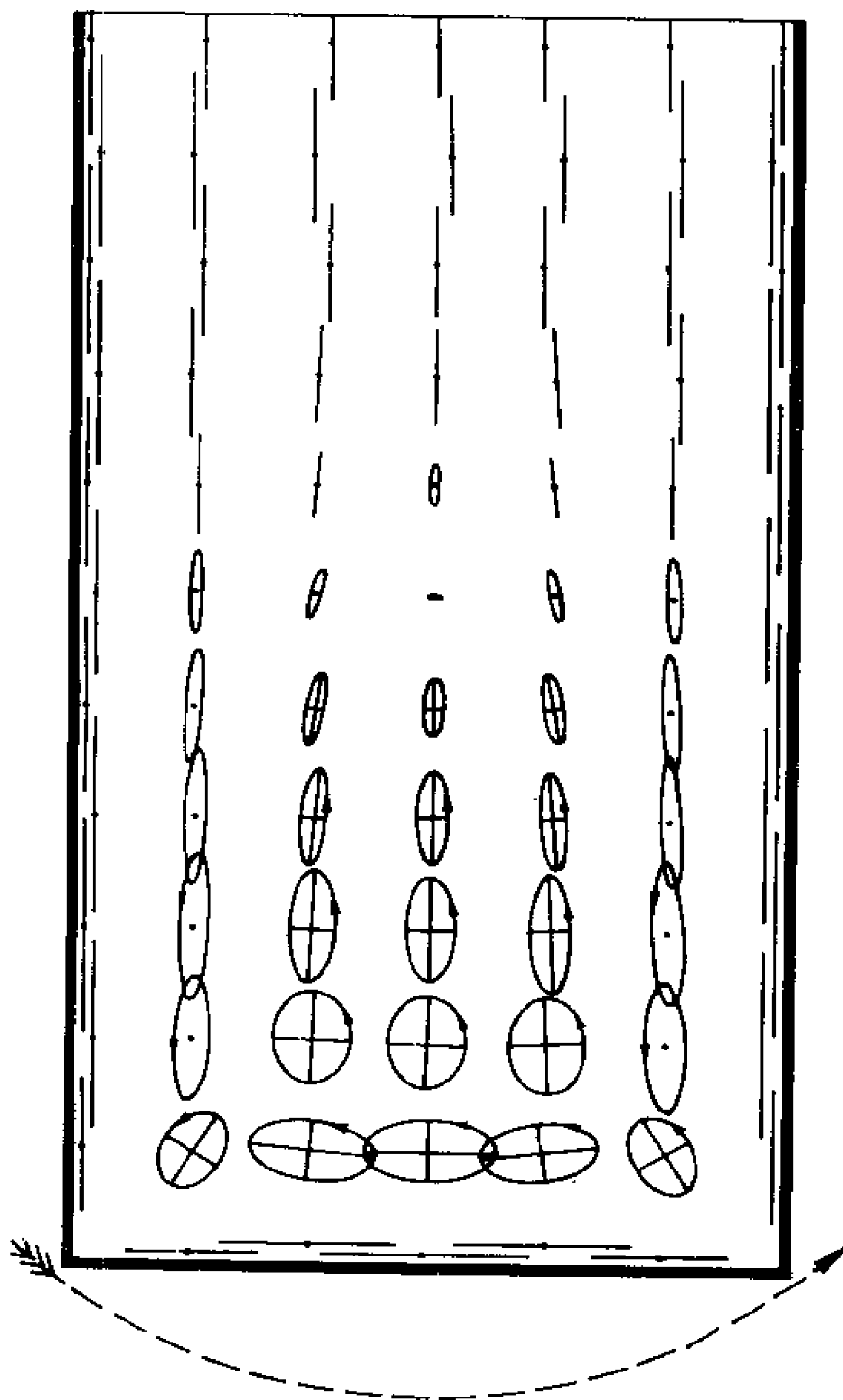


图 7—20 半无限长矩形海湾中的潮流椭圆

(Taylor, 1921)

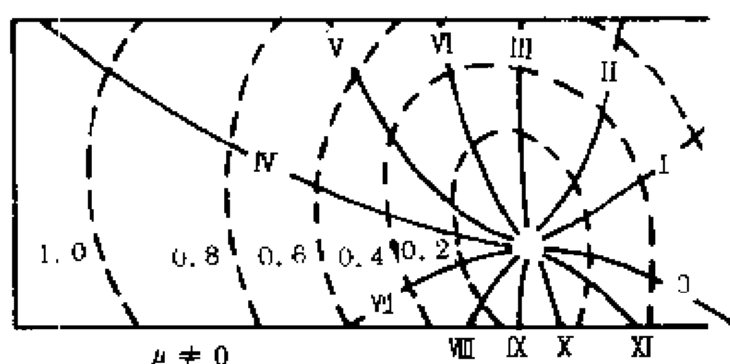


图 7—21　辽东湾半日分潮的同潮图
（陈宗镛，1965）

中考虑摩擦的两个Kelvin 波来说明。海湾中旋转潮波系统的无潮点的偏移不仅仅与海底摩擦有关。Kang(1984)将南黄海抽象成水深 50m 的等深矩形海盆，其南部为开边界，北部有一

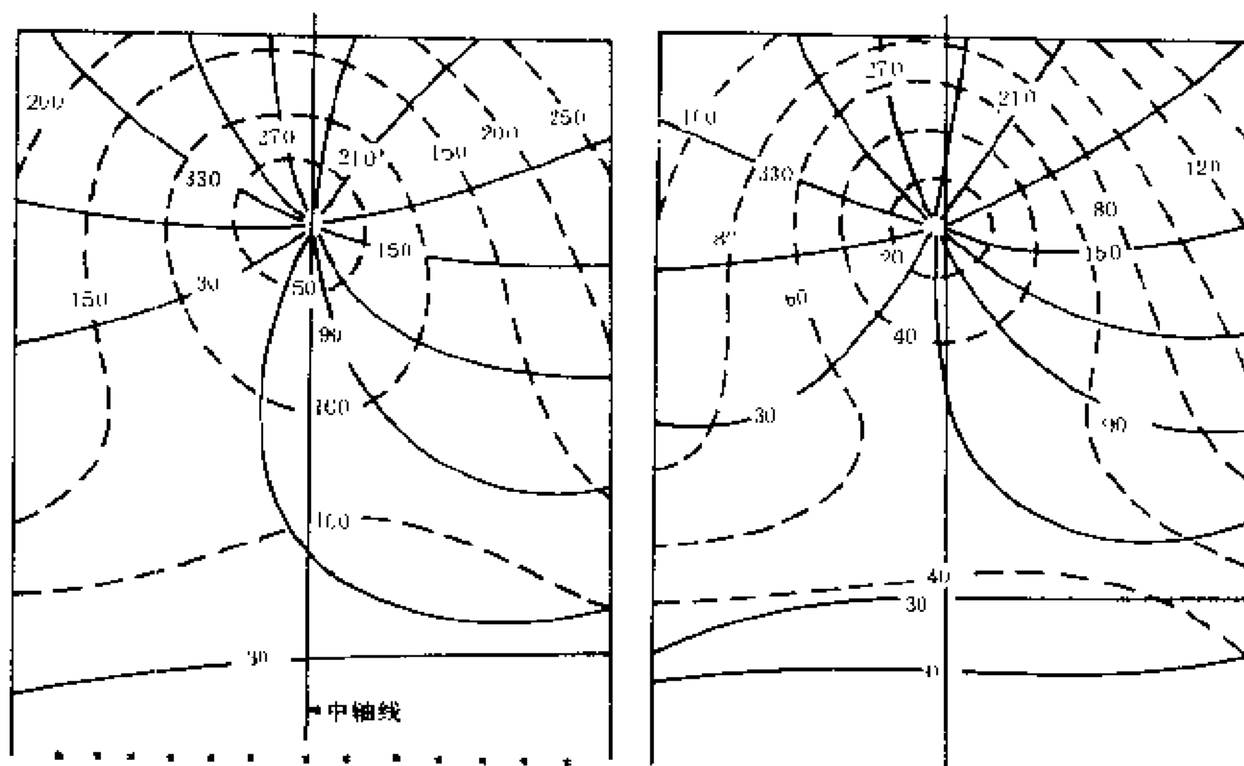


图 7—22　水深为 50m 等深半封闭海区中的同潮图
(a)f≠0，k=0，　(b)f≠0，k≠0（南边为开边界）

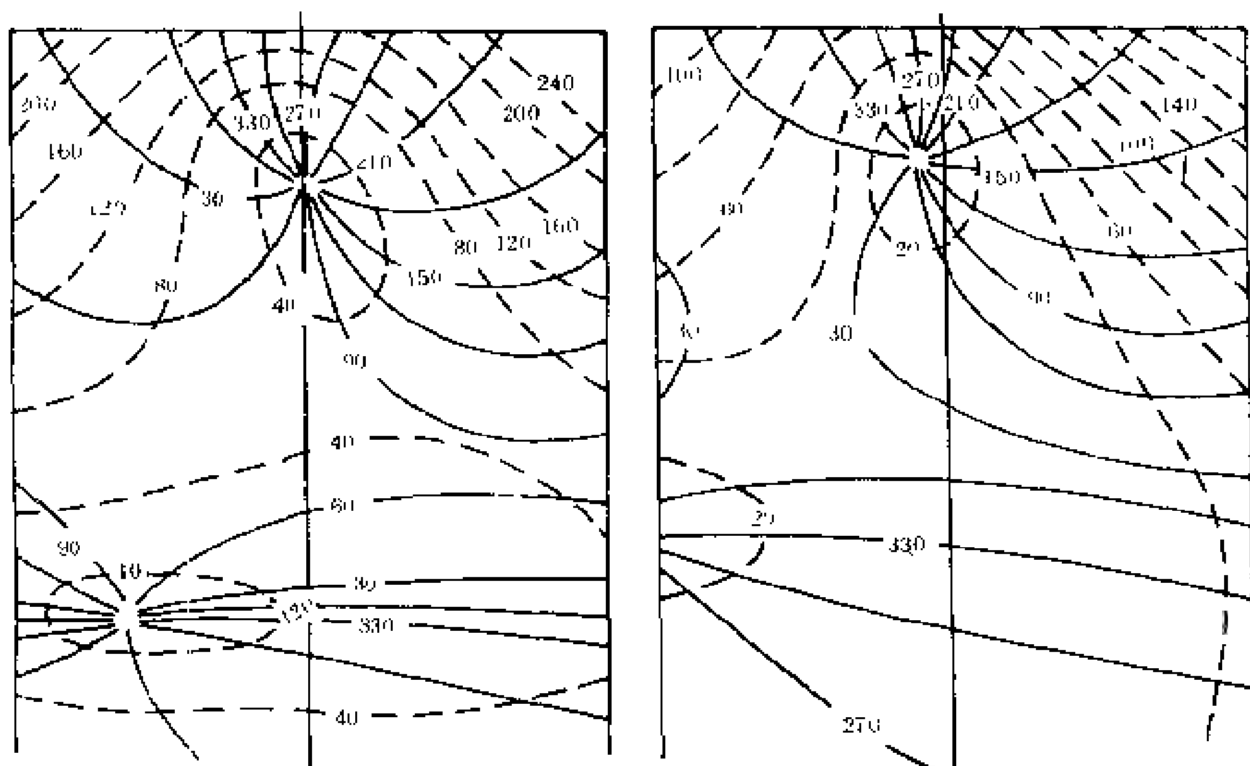


图 7－23　水深沿东西向是均匀的，但由南向北逐渐变浅的半封闭海区中的同潮图(a)$f\neq0,k=0$，(b)$f\neq0,k\neq0$

段开边界，运用忽略摩擦项的线性化方程，研究了南黄海无潮点偏移的情况。结果发现：潮波能量由北部一段开边界流出导致了南黄海无潮点向中国沿岸偏移。但是上述的研究都没有涉及海底地形对旋转潮波系统的影响，实际上，对一些海底倾斜、平均水深又比较深的半封闭海域来说，海底地形的影响可能比摩擦效应更为显著。叶安乐和陈宗镛(1987)对长度为 725km 的半封闭矩形海区中的 M_2 旋转潮波系统进行了数值试验。试验分四种不同海底地形：水深为 50m 等深的情况；水深沿东西向是均匀的，但由南向北逐渐变浅的情形；水深沿南北向是均匀的，但由西向东逐渐增大；水深沿南北方是均匀的，但由西向东逐渐变浅。试验结果如图 7－22—图 7－25 所示。可以看出：在等深情况下，由于水深较深，考虑摩

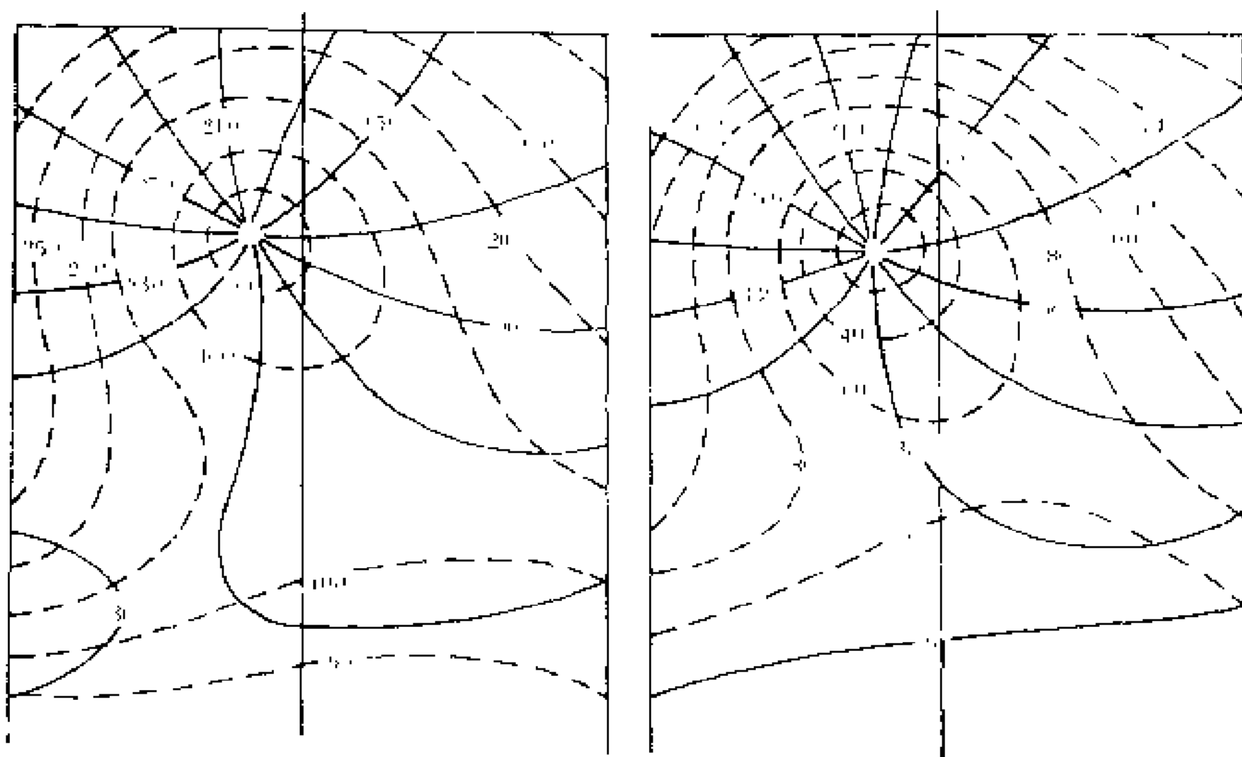


图7-24 水深沿南北向是均匀的，但由西向东逐渐变深的半封闭海区中的同潮图

(a)$f\neq0,k=0$, (b)$f\neq0,k\neq0$

擦情形下的无潮点偏离中轴线不远，与不考虑摩擦情形下的无潮点相距很近；对水深由南向北逐渐变浅的情形，由于摩擦效应相应地逐渐增大，致使湾顶处的无潮点有明显的向左偏移；对于由西向东逐步变深的水深分布，发现无潮点向左偏移，并且这种偏移主要是海底地形效应，而海底摩擦的影响不大；水深由西向东逐渐变浅时，致使无潮点向右偏移，这种偏移显然是海底地形效应引起的。

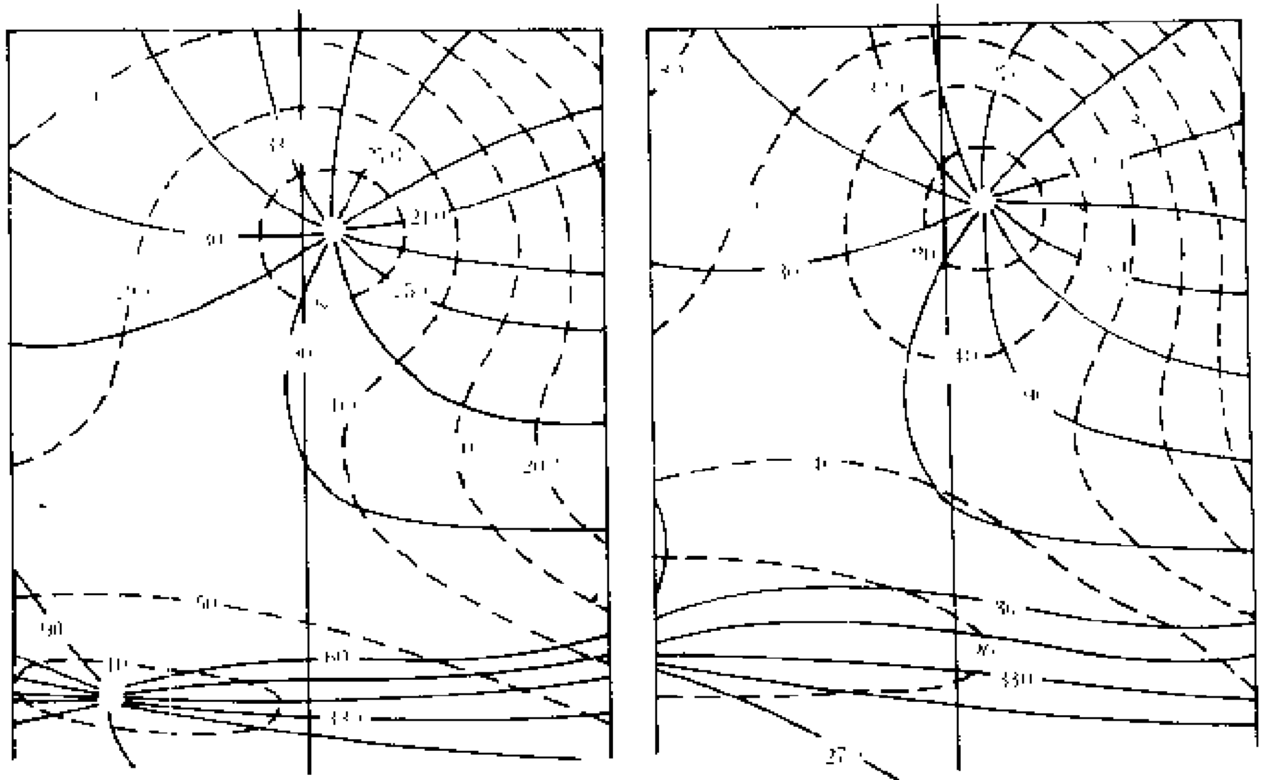


图 7－25　水深沿南北向是均匀的，但由西向东逐渐变浅的半封闭海区中的同潮图(a)$f\neq 0, k=0$，(b)$f\neq 0, k\neq 0$

§7.7　变截面海湾和河口中的潮波

由于变截面海湾和河口的截面随地点而变，因此其中的潮波运动发生相应的变化。如果它们的宽度相对地较窄，则其中的潮波运动主要地表现在沿主轴方向，而横向运动相对地变化较小。作为一种近似，通常研究变截面海湾和河口中的一维化潮波运动，即研究 ξ 和铅直向平均流 $\langle u\rangle$、$\langle v\rangle$ 的横向平均值，并略去经过横向平均之后的横向流速。

为了得到描述这种铅直向横向平均运动的基本方程，我们从铅直向平均运动基本方程(4.5—35)出发，并且其中的摩擦项只考

虑以(7.6—20)式表示的底摩擦力，于是有

$$\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial t}+\langle u\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial x}+\langle v\rangle\frac{\partial\langle u\rangle}{\partial y}-f\langle v\rangle=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}-k\langle u\rangle,$$

$$\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial t}+\langle u\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial x}+\langle v\rangle\frac{\partial\langle v\rangle}{\partial y}+f\langle u\rangle=-g\frac{\partial\zeta}{\partial y}-k\langle v\rangle,$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial(h\langle u\rangle)}{\partial x}+\frac{\partial(h\langle v\rangle)}{\partial y}=0。$$

设 x 轴与海湾和河口的主轴一致，对以上方程作横向平均，然后略去横向运动，结果有

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}-ku, \tag{7.7-1}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\frac{1}{b}\frac{\partial(hbu)}{\partial x}, \tag{7.7-2}$$

其中 $b=b(x)$ 为海湾或河口的宽度，$h=h(x)$ 为其截面水深的横向平均，$\zeta=\zeta(x)$ 为潮位的横向平均，$u=u(x)$ 为潮流的铅直向横向平均。(7.7—1)式和(7.7—2)式是研究变截面海湾和河口中一维潮波运动的基本方程。

7.7.1 变截面海湾中的潮波

如果不考虑摩擦和非线性平流项，于是基本方程(7.7—1)和(7.7—2)简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x} \tag{7.7-3}$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}=-\frac{1}{b}\frac{\partial(hbu)}{\partial x}, \tag{7.7-4}$$

设坐标原点位于海湾湾顶，x 轴指向湾口为正。由(7.7—3)和(7.7—4)式交叉微分消去 u，得到仅含潮位的微分方程

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \frac{g}{b} \frac{\partial}{\partial x}\left(hb \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right), \qquad (7.7-5)$$

取潮位表达式为

$$\zeta = R(x)\cos\frac{2\pi}{T}t,$$

由于

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\cos\frac{2\pi}{T}t = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \zeta,$$

于是(7.7—5)式可写成

$$\frac{g}{b} \frac{\partial}{\partial x}\left(hb \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \zeta = 0。 \qquad (7.7-6)$$

依该方程讨论两种变截面海湾中的潮位变化情况。

首先，设海湾水深 h=常数，宽度 $b=b_0\frac{x}{a}$，其中 b_0 为湾口的宽度，a 为海湾长度。将这种水深和宽度分布形式代入(7.7—6)式，可以得到

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{1}{x}\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \zeta = 0, \qquad (7.7-7)$$

其中 $\lambda=\sqrt{gh}T$。作变量置换

$$Z = \frac{2\pi}{\lambda}x, \qquad (7.7-8)$$

于是(7.7—7)式转变成

$$Z^2\frac{\partial^2 \zeta}{\partial Z^2} + Z\frac{\partial \zeta}{\partial Z} + Z^2\zeta = 0, \qquad (7.7-9)$$

这是零阶贝塞尔方程，其解为

$$\zeta = NJ_0(Z) = NJ_0\left(\frac{2\pi}{\lambda}x\right)。$$

由湾口 $x=a$ 处的潮位 $\zeta=R(a)\cos\frac{2\pi}{T}t$，可以确定

$$N = \frac{R(a)\cos\frac{2\pi}{T}t}{J_0(\frac{2\pi}{\lambda}a)},$$

于是得到满足湾口边界条件的潮位表达式

$$\zeta = \frac{R(a)J_0(\frac{2\pi}{\lambda}x)}{J_0(\frac{2\pi}{\lambda}a)}\cos\frac{2\pi}{T}t。\qquad (7.7-10)$$

如果取 $R(a)=1$，$\frac{\lambda}{a}=2\pi$，经计算可得 $x=0.2a,0.4a,0.6a,0.8a,a$ 处的潮位振幅，其结果列于表 7—10 中。由此可见，潮位振幅由湾口向内逐渐变大，这是宽度由湾口向内变窄的缘故。

表 7-10

距离(x)	0.2a	0.4a	0.6a	0.8a	a
振幅	1.294	1.255	1.192	1.106	1.000

其次，设海湾的水深为 $h=h_0\frac{x}{a}$，宽度 $b=b_0\frac{x}{a}$，其中 h_0 为湾口处的水深。这种水深和宽度形式代入潮位方程(7.7—6)后，有

$$x^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2} + 2x\frac{\partial\zeta}{\partial x} + ax(\frac{2\pi}{\lambda_0})^2\zeta = 0,\qquad (7.7-11)$$

其中 $\lambda_0=\sqrt{gh_0}T$。令

$$Z = \frac{4\pi}{\lambda_0}\sqrt{ax},\qquad (7.7-12)$$

由以上两式可得

$$Z^2\frac{\partial^2\zeta}{\partial Z^2} + 3Z\frac{\partial\zeta}{\partial Z} + Z^2\zeta = 0。\qquad (7.7-13)$$

再作置换

$$\bar{\zeta} = \zeta Z,\qquad (7.7-14)$$

于是由(7.7—13)式导出

$$\frac{\partial^2 \bar{\xi}}{\partial Z^2} + \frac{1}{Z}\frac{\partial \bar{\xi}}{\partial Z} + (1 - \frac{1}{Z^2})\bar{\xi} = 0, \qquad (7.7-15)$$

它是一阶贝塞尔方程，其解为

$$\bar{\xi} = N_1 J_1(Z)。$$

将关系式(7.7—12)和(7.7—14)代入上式后变成

$$\zeta = \frac{N_1 J_1(\frac{4\pi}{\lambda_0}\sqrt{ax})}{\frac{4\pi}{\lambda_0}\sqrt{ax}}。 \qquad (7.7-16)$$

由边界条件 $x=a$ 处，$\zeta = R(a)\cos\frac{2\pi}{T}t$，于是可确定出

$$N_1 = \frac{R(a)\frac{4\pi a}{\lambda_0}}{J_1(\frac{4\pi a}{\lambda_0})}\cos\frac{2\pi}{T}t,$$

由此得潮位表达式

$$\zeta = \sqrt{\frac{a}{x}}\frac{J_1(\frac{4\pi}{\lambda_0}\sqrt{ax})}{J_1(\frac{4\pi a}{\lambda_0})}R(a)\cos\frac{2\pi}{T}t。 \qquad (7.7-17)$$

如果仍取 $R(a)=1$，$\frac{\lambda}{a}=2\pi$，按(7.7—17)式的振幅计算出与 $x=0.2a$，$0.4a$，$0.6a$，$0.8a$ 和 a 相应的数值，其结果列于表 7—11 中。可以发现，这种深度和和宽度均由湾口向内逐渐变小的海湾里，潮位振幅增大的情况比前一种海湾里的增大情况要快，湾顶比湾口增大了半倍以上。

表 7—11

距离(x)	$0.2a$	$0.4a$	$0.6a$	$0.8a$	a
振幅	1.560	1.406	1.263	[illegible]	1.000

以上两种简单几何形状海湾中的潮位表达式及其具体计算结

果，有助于说明海湾中的某些实际潮汐现象。

7.7.2 河口中的潮波

变截面河口中的潮波运动，可以用考虑摩擦的一维线性运动方程和连续方程来描述

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{p}{h}u, \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\frac{1}{b}\frac{\partial}{\partial x}(hbu),\end{aligned}\right\} \tag{7.7-18}$$

其中 $p=k'=\frac{8k''}{3\pi}\widehat{U}$。如果我们考虑一个分潮，则潮位与潮流可表为

$$\zeta = H(x)\cos(\omega t - g(x)),$$

$$u = U(x)\cos(\omega t - \xi(x)),$$

或者可以表为如下形式

$$\left.\begin{aligned}\zeta &= Re[Y(x)e^{i\omega t}], \\ u &= Re[V(x)e^{i\omega t},\end{aligned}\right\} \tag{7.7-19}$$

其中 $Y(x)=H\cos g - iH\sin g$，$V(x)=U\cos\xi - iU\sin\xi$。利用(7.7－19)式，从运动方程和连续方程中消去 ζ 后，得到

$$gbh\frac{d^2V(x)}{dx^2} + g\left(2\frac{d(bh)}{dx} - h\frac{db}{dx}\right)\frac{dV(x)}{dx}$$
$$+ \left(\omega^2 b - \frac{g}{b}\frac{db}{dx}\frac{d(bh)}{dx} + g\frac{d^2(bh)}{dx^2} - i\frac{\omega pb}{h}\right)V(x) = 0。 \tag{7.7-20}$$

现在取坐标原点位于河口出口处，x 轴指向上游为正，来讨论断面深度 h= 常数、断面宽度为 $b=b_0\ e^{-cx}$ 的河口中的潮波（叶安乐，1983a）。其中 b_0 为河口出口处的断面宽度，$c>0$。将深度和宽度的表达式代入方程(7.7－20)，得到下列常数微分方程

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} - c\frac{dV(x)}{dx} + (m - in)V(x) = 0,$$

其中 $m=\frac{\omega^2}{gh}$，$n=\frac{\omega p}{gh^2}$。该方程之解为

$$V(x) = A_1e^{k_1x} + A_2e^{k_2x}, \tag{7.7-21}$$

式中

$$k_{1,2} = \frac{c \pm \sqrt{c^2 - 4(m - in)}}{2}, \tag{7.7-22}$$

A_1 和 A_2 为两个复常数。将(7.7－21)式代入连续方程后，得到

$$Y(x) = B_1e^{k_1x} + B_2e^{k_2x}, \tag{7.7-23}$$

其中两个复常数

$$B_1 = i(k_1 - c)hA_1/\omega, \tag{7.7-24a}$$

$$B_2 = i(k_2 - c)hA_2/\omega。 \tag{7.7-24b}$$

如果将(7.7－22)式写成下列形式

$$k_{1,2} = \frac{c \pm R^{1/2}e^{i\varphi/2}}{2}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} R &= \sqrt{\left(c^2 - \frac{4\omega^2}{gh}\right)^2 + 16\left(\frac{\omega p}{gh^2}\right)^2}, \\ \varphi &= \arctan\left[4\,\frac{\omega p}{gh^2}\Big/\left(c^2 - \frac{4\omega^2}{gh}\right)\right], \end{aligned}\right\} \tag{7.7-25}$$

则，由(7.7－23)式和(7.7－21)式并加进时间因子后，得到

$$\begin{aligned} \zeta &= B_1e^{\left[\left(\frac{c}{2} + \frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)x + i\left(\omega t + \left(\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)x\right)\right]} \\ &\quad + B_2e^{\left[\left(\frac{c}{2} - \frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)x + i\left(\omega t - \left(\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)x\right)\right]}, \end{aligned} \tag{7.7-26}$$

$$\begin{aligned} u &= A_1e^{\left[\left(\frac{c}{2} + \frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)x + i\left(\omega t + \left(\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)x\right)\right]} \\ &\quad + A_2e^{\left[\left(\frac{c}{2} - \frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)x + i\left(\omega t - \left(\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)x\right)\right]}。 \end{aligned} \tag{7.7-27}$$

考虑到河口的断面宽度随 x 的变化是逐渐的，加上摩擦的影响，许

多河口中的潮波主要呈现前进波动性质，例如，杭州湾的潮波就是这样一种情形。因此，可以近似地取 $B_1=0$，$A_1=0$，得到

$$\zeta = B_2 e^{\left[\left(\frac{c}{2}-\frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)x+i\left(\omega t-\left(\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)x\right)\right]} \tag{7.7-28}$$

$$u = A_2 e^{\left[\left(\frac{c}{2}-\frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)x+i\left(\omega t-\left(\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)x\right)\right]}。 \tag{7.7-29}$$

它们的振幅可表为

$$H(x) = |B_2| e^{sx}, \tag{7.7-30a}$$

$$U(x) = |A_2| e^{sx}, \tag{7.7-30b}$$

其中

$$s = \frac{c}{2} - \frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}。 \tag{7.7-31}$$

当 $x=0$，由(7.7－28)和(7.7－29)式以及(7.7－19)式可得

$$\left.\begin{aligned} B_2 &= Y(0) = H_{m0}\cos g_{m0} - iH_{m0}\sin g_{m0}, \\ A_2 &= V(0) = U_{m0}\cos\xi_{m0} - iU_{m0}\sin\xi_{m0}\ 。\end{aligned}\right\} \tag{7.7-32}$$

因此，复常数 B_2 和 A_2 可由 $x=0$ 处的潮位和潮流调和常数来确定。但是，实际上只需给出潮位边界条件，以此确定复数常数 B_2，然后利用关系式(7.7－24b)来确定复常数 A_2。设 B_{21}和 B_{22}是 B_2 的实部和虚部，A_{21}和 A_{22}是 A_2 的实部和虚部，于是由(7.7－24b)式可得如下关系

$$A_{21} = \frac{\left(\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)B_{21} + \left(\frac{c}{2}+\frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)B_{22}}{\left(\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}+\frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}\cdot\frac{\omega}{h},$$

$$A_{22} = \frac{\left(\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)B_{22} - \left(\frac{c}{2}+\frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)B_{21}}{\left(\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}+\frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}\cdot\frac{\omega}{h},$$

将(7.7－32)式的第一式代入后，得到以河口口门处潮位边界条件

表示的 A_{21}和 A_{22}

$$\left.\begin{aligned}A_{21}&=H_{m0}\frac{\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\cos g_{m0}+\left(\frac{c}{2}-\frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin g_{m0}}{\left(\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}+\frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}\cdot\frac{\omega}{h},\\A_{22}&=H_{m0}\frac{\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\sin g_{m0}-\left(\frac{c}{2}+\frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos g_{m0}}{\left(\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2+\left(\frac{c}{2}+\frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}\cdot\frac{\omega}{h}。\end{aligned}\right\}$$

(7.7-33)

由(7.7—25)式知，当 c 和 h 一定时，R 和 φ 是线性摩擦系量 p 的函数，而 $p=\frac{8k''}{3\pi}\tilde{U}$，其中$\tilde{U}$ 是河口中的特征流振幅，因此，只有当 $\tilde{U}$已知时，A_{21}和 A_{22}才能根据(7.7 —33)式最后确定。另一方面，线性摩擦系量意味着整个河口中的流振幅接近均匀一致，然而，一般河口的流振幅分布不是这样，在整个河口中采用一个线性摩擦系量是不合适的。但是可将河口分成若干段，使得每一段的流速振幅接近均匀一致，从而每一段的线性摩擦系量所对应的特征流振幅可选用该段中点的流振幅。这样一来，河口的每一段都有一个边界条件的问题和确定特征流振幅的问题。

现将具有 $c=c_1$，$h=h_1$ 的河口分成 $2N+1$ 段，每段长度为 $2L$，每段中的流振幅分布被认为是接近均匀一致的。已知第一段河口口门处的潮位调和常数 $H=H_{m1}$，$g=g_{m1}$。引入一个假想的河口，其深度仍为 $h=h_1$，但 $c=c_0$，并且满足

$$c_0^2-\frac{4\omega^2}{gh_1}=0, \qquad (7.7\text{-}34)$$

由此可确定比值

$$r=c/c_0。 \qquad (7.7\text{-}35)$$

再假定线性摩擦系量在此假想河口中正好等于 $2\omega h_1$，并以 p_0 表示，即

$$p_0 = 2\omega h_1, \tag{7.7-36}$$

与此相对应的特征流振幅可用下式求得

$$\tilde{U}_0 = \frac{3\pi}{8k''}p_0 = \frac{3\pi}{4k''}\omega h_1。 \tag{7.7-37}$$

如果实际河口口门处的潮流调和常数以 U_{m1}，ξ_{m1} 表示，并且此处的潮流调和常数振幅可表为

$$U_{m1} = \alpha_1\tilde{U}_0, \tag{7.7-38}$$

其中 α_1 为待定常系数。于是河口第一段的特征流振幅可写成

$$\tilde{U}_1 = U_{m1}e^{s_1L} = \alpha_1\tilde{U}_0e^{s_1L}, \tag{7.7-39}$$

相应地得第一段的线性摩擦系量

$$p_1 = \alpha_1 p_0 e^{s_1L}, \tag{7.7-40}$$

其中

$$s_1 = \frac{rc_0}{2} - \frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}, \left(\begin{aligned} R &= \sqrt{(r^2-1)^2 + (2\alpha_1e^{s_1L})^2}\,c_0^2 \\ \varphi &= \arctan[2\alpha_1e^{s_1L}/(r^2-1)] \end{aligned}\right) \tag{7.7-41}$$

因为 $|A_2| = \alpha_1\tilde{U}_0$，故由(7.7－33)式可得

$$\alpha_1 = \frac{\omega H_{m1}}{\tilde{U}_0h_1\sqrt{\left(\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2 + \left(\frac{rc_0}{2} + \frac{R^{1/2}}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)^2}}。 \tag{7.7-42}$$

于是可以首先用(7.7－41)式和(7.7－42)式以逐步近似的方法求出 α_1 和 s_1，然后由(7.7－39)式和(7.7－33)式求得第一段的特征流振幅 $\tilde{U}_1$ 和河口口门处的潮流振幅 U_{m1} 及潮流位相 ξ_{m1}。

第二段的特征流速振幅 $\tilde{U}_2$ 和边界条件 H_{m2}，g_{m2}，U_{m2} 和 ξ_{m2} 的确定比较简单：由(7.7－28)式和(7.7－29)式可以直接计算得到

$$\left.\begin{aligned} H_{m2} &= H_{m1}e^{p_1\cdot 2L}, \\ g_{m2} &= g_{m1} + q_1\cdot 2L, \\ U_{m2} &= U_{m1}e^{p_1\cdot 2L}, \\ \xi_{m2} &= \xi_{m1} + q_1\cdot 2L, \end{aligned}\right\} \tag{7.7-43}$$

其中 $q_1=\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$，$R$ 和 φ 由 α_1 和 s_1 依(7.7—41)式计算。因为 U_{m2} 已知，类似地令

$$U_{m2} = \alpha_2\widetilde{U}_0, \tag{7.7-44}$$

这里 α_2 为确定量。若取 $x=2L$ 为该段的新坐标原点，将(7.7—41)式中的 α_1 由 α_2 代替，然后用逐步近似法求出 s_2 之值，于是，第二段的特征流速振幅为

$$\widetilde{U}_2 = U_{m2}e^{p_2 L}。 \tag{7.7-45}$$

其余各段的边界条件和特征流振幅可用类似于第二段的手续求得。一般地，第 n 段的为

$$\begin{aligned} H_{mn} &= H_{mn-1}e^{p_{n-1}\cdot 2L}, \\ g_{mn} &= g_{mn-1} + q_{n-1}\cdot 2L, \\ U_{mn} &= U_{mn-1}e^{p_{n-1}\cdot 2L}, \\ \xi_{mn} &= \xi_{mn-1} + q_{n-1}\cdot 2L, \\ \widetilde{U}_n &= U_{mn}e^{p_n L}, \end{aligned}$$

其中 $q_{n-1}=\frac{R^{1/2}}{2}\sin\frac{\varphi}{2}$，$R$ 和 φ 用 α_{n-1}，s_{n-1} 根据(7.7—41)式计算。

当各段的边界条件以及 s_n 和 q_n 确定之后，由(7.7—28)式和(7.7—29)式计算每一段中任意一点处的与时间因子无关部分的潮位和潮流，即

$$\begin{aligned} Y(x) &= (H_{mn}\cos g_{mn} - iH_{mn}\sin g_{mn})e^{p_n x - iq_n x} \\ &= H_{mn}e^{p_n x}[\cos(q_n x + g_{mn}) - i\sin(q_n x + g_{mn})], \end{aligned}$$

$$U(x) = (U_{mn}\cos\xi_{mn} - iU_{mn}\sin\xi_{mn})e^{p_n x - iq_n x}$$

$$= U_{ms}e^{r_s x}\left[\cos(q_s x + \xi_{ms}) - i\sin(q_s x + \xi_{ms})\right],$$

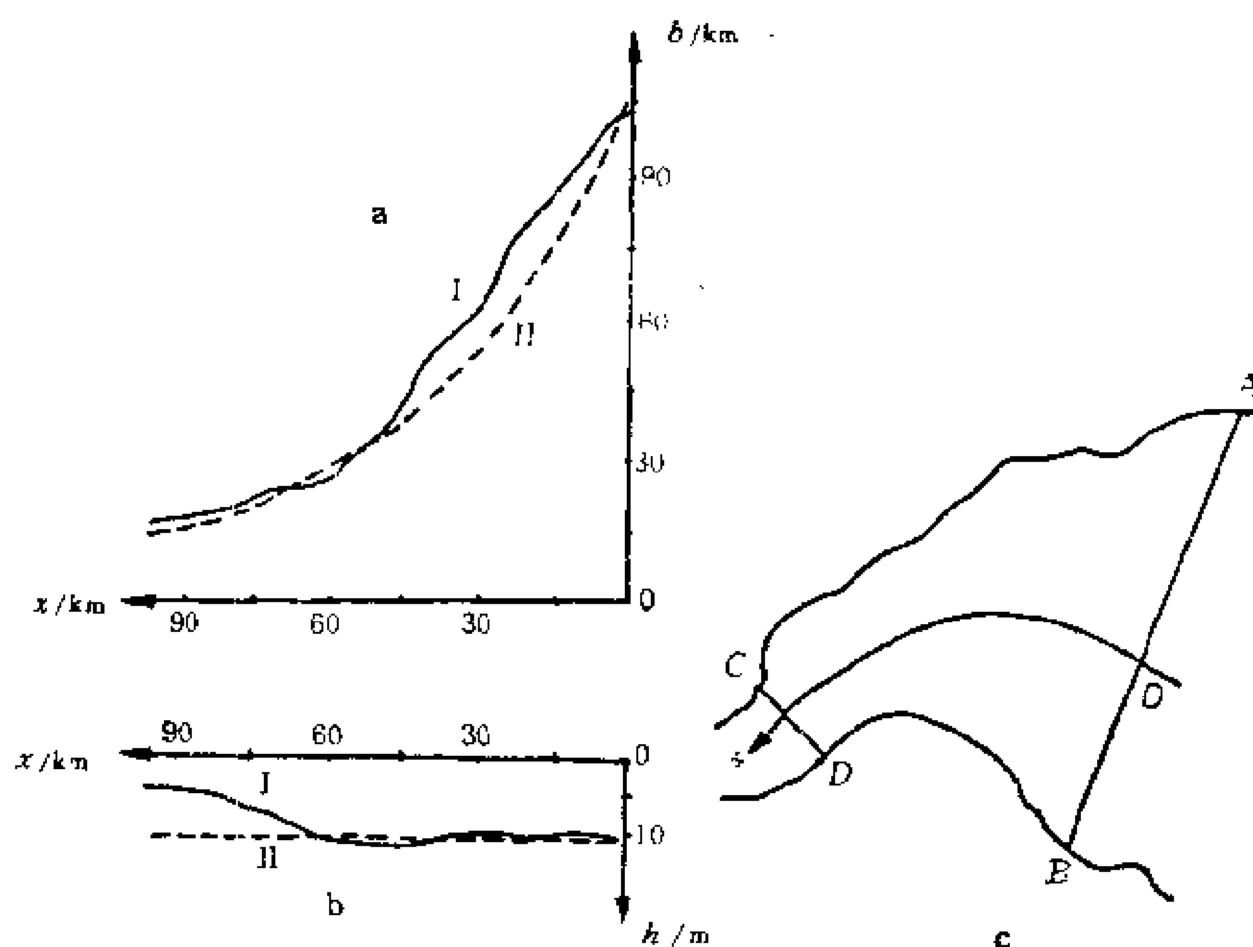


图 7—26　杭州湾的几何形状

(a)断面宽度随距湾口距离的变化(Ⅰ)和以 b_0e^{-ax} 形式拟合的曲线(Ⅱ)；(b)断面平均深度随距湾口距离的变化(Ⅰ)和 $h=10.5m$ 的常深度(Ⅱ)；(c)平面图，AB 为湾口断面，CD 表示澉浦附近的断面，O_s 为自然坐标轴

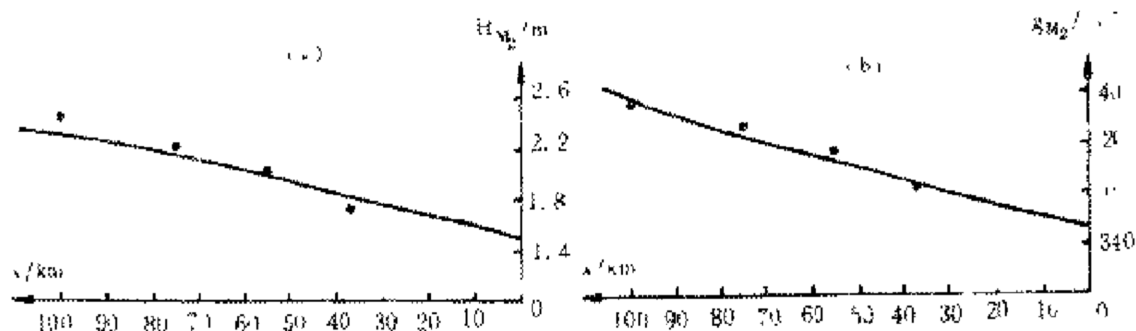


图 7—27 M_2 潮位调和常数沿杭州湾的变化

(a)调和常数振幅,(b)调和常数位相

(实线为计算结果,小圈点为实测结果)

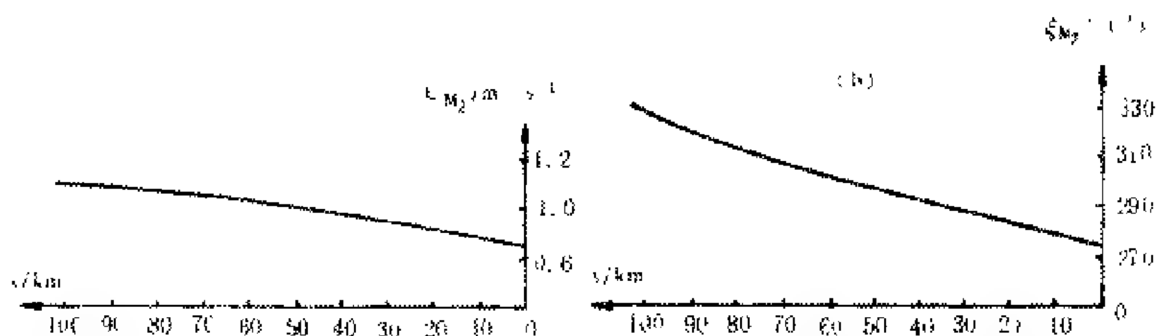


图 7—28 M_2 潮流调和常数沿杭州湾的变化

(a)调和常数振幅,(b)调和常数位相

从而可得分潮调和常数

$$\left.\begin{aligned} H_n(x) &= H_{mn}e^{k_n x}, \\ g_n(x) &= g_{mn} + q_n x; \\ U_n(x) &= U_{mn}e^{k_n x}, \\ \xi_n(x) &= \xi_{mn} + q_n x. \end{aligned}\right\} \quad (7.7\text{-}46)$$

式中 x 在第 n 段内取值范围为 $0-2L$。

作为实际例子,计算杭州湾的 M_2 分潮波 如图7—26所示。

杭洲湾的几何形状可表为$h=10.5\text{m}$，$b=b_0e^{-cx}$，$b_0=105000\text{m}$，$c=2.50\times10^{-5}\text{m}^{-1}$。杭州湾湾口的$M_2$分潮位边界条件给定为$H_{m1}=1.5\text{m}$，$g_{m1}=345^\circ.5$。然后根据(7.7—46)式计算求得杭州湾$M_2$分潮的潮位和潮流的分布，其中取$2L=10\text{km}$。图7—27和图7—28是依计算结果绘制的$M_2$潮位和潮流调和常数的沿程度变化曲线，实线为计算结果，小圆点为实测资料分析结果. 由计算结果与实测资料基本一致来看，说明杭州湾的潮波基本上属前进波动，而其反射波可以忽略不计。

由于河口截面的变化和摩擦的影响，对于潮波能量的劈分和能量的传输情况，不象等深等宽的沟渠中那样简单（叶安乐，1989）：在杭州湾中M_2分潮的平均动能与平均势能之比为0.5，而K_1分潮的相应比值仅为0.1；能量的消耗在湾口最大，越向里越小。另外，杜勇等(1989)的研究表明，在考虑摩擦的变截面河口中，通常采用的前进波和驻波的判据不再适用：对于变截面河口中的前进波来说，其潮位与潮流的位相差也可能接近$\frac{\pi}{2}$。

7.7.3 涌潮

当潮波在浅水中传播时，波剖面将逐渐发生变形。当这种变形的潮波到达某一地点并满足一定的条件时，波峰前面形成陡峭的水墙，产生不连续面。以不连续面的形式继续向前传播的现象叫做涌潮。我国杭州湾的潮波进入钱塘江之后便产生这种现象，这就是闻名于世的钱塘潮。

如图7—29所示，设涌潮以波速c在海底平坦的浅水中向前传播，不连续面后面的水深为h_1，流速为u_1。前面的水深为h_2，流速为u_2。取以速度c运动的坐标系，其原点位于海底，x轴指向波动传播方向为正，z轴指向上为正。观测者在运动坐标系中观测到的流速为

$$u' = u - c, \quad (7.7\text{-}46)$$

单位时间内流过不连续面前后两个单位宽度断面的水体体积应相等

$$h_1 u'_1 = h_2 u'_2 = q = \text{常数}。 \quad (7.7\text{-}47)$$

定常运动的基本方程为

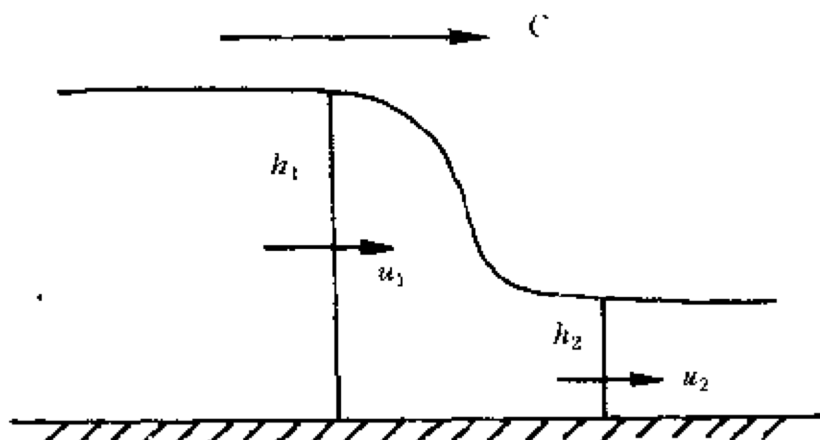


图 7－29 涌潮

$$\left.\begin{aligned} u'\frac{\partial u'}{\partial x} + w\frac{\partial u'}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \\ u'\frac{\partial w}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} - g \end{aligned}\right\} \quad (7.7\text{-}48)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0。 \quad (7.7\text{-}49)$$

将(7.7－49)式乘以 u'，然后与(7.7－48)式的第一式　相加，结果得

$$\frac{\partial u'^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \quad (7.7\text{-}50)$$

式中已略去与 w 有关的项，因为对于大尺度潮波来讲 w 可予以忽略。设两个断面之间的距离为$\triangle x$，于是(7.7－50)式可近似表为

$$u'^2_1 + \frac{1}{\rho}p_1 = u'^2_2 + \frac{1}{\rho}p_2。$$

上式对 z 从 0 到 h_1 积分，

$$\int_0^{h_1}(u'^2_1+\frac{1}{\rho}p_1)dz=\int_0^{h_2}(u'^2_2+\frac{1}{\rho}p_2)dz,$$

设密度 ρ 为常量，又 $u'=u'(x)$，再利用静压近似结果可得

$$h_1u'^2_1+\frac{1}{2}gh_1^2=h_2u'^2_2+\frac{1}{2}gh_2^2。$$

利用关系式(7.7—46)，上式变成

$$h_1(u_1-c)^2-h_2(u_2-c)^2=\frac{1}{2}g(h_2^2-h_1^2), \qquad (7.7\text{-}51)$$

再利用(7.7—47)式，消去(7.7—51)中的 u_1，然后解出

$$c=u_2+\sqrt{\frac{1}{2}gh_1(h_1+h_2)/h_2}。 \qquad (7.7\text{-}52)$$

涌潮的峰前流速方向与波速相反，可令

$$u_2=-U,$$

相应地，(7.7—52)式可写成

$$c=\sqrt{\frac{1}{2}gh_1(h_1+h_2)/h_2}-U, \qquad (7.7\text{-}53)$$

由此可得

$$h_1=-\frac{h_2}{2}+\sqrt{\frac{h_2^2}{4}+\frac{2h_2(c+U)^2}{g}}。 \qquad (7.7\text{-}54)$$

以 $H=h_1-h_2$ 表示涌潮高度，上式两边同减以 h_2，结果得

$$H=-\frac{3}{2}h_2+\sqrt{\frac{h_2^2}{4}+\frac{2h_2(c+U)^2}{g}}。 \qquad (7.7\text{-}55)$$

由此可知，当 $c=c'=\sqrt{gh_2}-U$ 时，$H=0$，即此时不发生涌潮，只有当 $c>c'=\sqrt{gh_2}-U$ 时才能出现涌潮，而且差值 $c-c'$ 越大，H 越高。

§7.8 浅水潮波

如果考虑均质海水，在近岸浅水区域中的潮波运动可用铅直向

平均的基本方程(4.5—37)来描述。在前几节的讨论中，曾假定水深很深，因此 $h+\zeta \simeq h$，并且假定 Rossby 数 $R_0 \ll 1$，平流项相对于地转偏向力可以忽略，或者人为地忽略平流项，作为问题的零级近似。现在讨论浅水中的潮波，正如讨论涌潮时所指出的那样，潮波在浅水中的传播不断地发生变形，使波峰的前部变陡，这是方程中非线性项影响的结果。

如果讨论一维的非线性基本方程，并取摩擦项为线性形式，于是(4.5－37)式简化为

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x}-ku,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial[(h+\zeta)u]}{\partial x}=0,$$

其中 u 代表铅直向平均值。以上方程进一步可展为(设水深 h 为常量)

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x}-ku, \tag{7.8-1}$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+h\frac{\partial u}{\partial x}+\zeta\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}=0。 \tag{7.8-2}$$

7.8.1 忽略摩擦的浅水潮波

当忽略摩擦时，(7.8—1)和(7.8—2)可写成

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}&=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x},\\ \frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}&=-(h+\zeta)\frac{\partial u}{\partial x}。\end{aligned}\right\} \tag{7.8-3}$$

用逐步近似方法求解上述方程。首先略去非线性项，得

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = -h\frac{\partial u}{\partial x}。$$

显然满足该线性方程的解可取为

$$\left.\begin{aligned} \zeta_0 &= R_0\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right), \\ u_0 &= \frac{g}{c}R_0\sin\omega\left(t - \frac{x}{c}\right), \end{aligned}\right\} \tag{7.8-4}$$

这是零级近似。设(7.8—3)式的一级近似解为

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 + \zeta_1, \\ u &= u_0 - u_1。 \end{aligned}\right\} \tag{7.8-5}$$

一般说来，ζ_1 和 u_1 比 ζ_0 和 u_0 要小。将(7.8—5)式代入(7.8—3)式，并略去 ζ_1，u_1 相乘积的有关项，得

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -g\frac{\partial\zeta_1}{\partial x} - u_0\frac{\partial u_0}{\partial x},$$

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} = -h\frac{\partial u_1}{\partial x} - \zeta_0\frac{\partial u_0}{\partial x} - u_0\frac{\partial\zeta_0}{\partial x}。$$

将(7.8—4)式代入以上两方程后，变为

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = -g\frac{\partial\zeta_1}{\partial x} + \frac{g^2R_0^2\omega}{2c^3}\sin 2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{7.8-6}$$

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial t} = -h\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{gR_0^2\omega}{c^3}\sin 2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)。 \tag{7.8-7}$$

从以上两式中消去 u_1，得 ζ_1 的微分方程

$$\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial x^2} = \frac{3gR_0^2\omega^2}{c^2}\cos 2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

其解为

$$\zeta_1 = \frac{3}{4}\frac{gR_0^2\omega}{c^3}x\sin 2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)。 \tag{7.8-8}$$

将 ζ_1 代入(7.8—6)式后，得

$$u_1 = \frac{1}{8}\frac{g^2R_0^2}{c^3}\cos 2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \frac{3}{4}\frac{g^2R_0^2\omega}{c^4}x\sin 2\omega\left(t - \frac{x}{c}\right), \tag{7.8—9}$$

由(7.8—5)式可得方程(7.8—3)的一级近似解

$$\left.\begin{aligned}\zeta &= R_0\sin\omega(t-\frac{x}{c}) + \frac{3}{4}\frac{gR_0^2\omega}{c^3}x\sin2\omega(t-\frac{x}{c}),\\ u &= \frac{g}{c}R_0\sin\omega(t-\frac{x}{c}) + \frac{1}{8}\frac{g^2R_0^2}{c^3}\cos2\omega(t-\frac{x}{c})\\ &\quad + \frac{3}{4}\frac{g^2R_0^2\omega}{c^4}x\sin2\omega(t-\frac{x}{c})。\end{aligned}\right\}\quad(7.8\text{-}10)$$

由上式可以看出,一个线性潮波在浅水中传播时,产生了角频率为原线性潮波的两倍的浅水潮波,称之为倍潮波。倍潮波的振幅与其在浅水中传播的距离 x 成正比,越是深入浅海内部浅水分潮越大;浅水中倍潮波的振幅还与水深有关,水深越浅,其振幅越大。以此解来看,倍潮波将随 x 无限地增大,这显然不符合事实,其原因是没有考虑摩擦效应。

以上讨论是取满足线性基本方程的解为一个原线性潮波,其实所有原线性潮波之和也满足线性基本方程。为了简单起见,取线性基本方程的解为两个原线性潮波

$$\left.\begin{aligned}\zeta_0 &= R_1\sin\omega_1(t-\frac{x}{c}) + R_2\sin\omega_2(t-\frac{x}{c}),\\ u_0 &= \frac{gR_1}{c}\sin\omega_1(t-\frac{x}{c}) + \frac{gR_2}{c}\sin\omega_2(t-\frac{x}{c})。\end{aligned}\right\}\quad(7.8\text{-}11)$$

类似地,设非线性方程的一级近似为

$$\zeta = \zeta_0 + \zeta_1$$
$$u = u_0 + u_1$$

将其代入非线性方程(7.8—3)后,略去小量,再将(7.8—11)式代入,结果得

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} + g\frac{\partial\zeta_1}{\partial x} = \frac{g^2R_1^2\omega_1}{2c^3}\sin2\omega_1(t-\frac{x}{c}) + \frac{g^2R_2^2\omega_2}{2c^3}\sin2\omega_2(t-\frac{x}{c})$$
$$+ \frac{g^2R_1R_2\omega_1}{2c^3}[\sin(\omega_1+\omega_2)(t-\frac{x}{c}) + \sin(\omega_1-\omega_2)(t-\frac{x}{c})]$$

$$+\frac{g^2R_1R_2\omega_2}{2c^3}\left[\sin(\omega_1+\omega_2)\left(t-\frac{x}{c}\right)+\sin(\omega_1-\omega_2)\left(t-\frac{x}{c}\right)\right],$$

(7.8-12)

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}+h\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{gR_1^2\omega_1}{2c^3}\sin 2\omega_1\left(t-\frac{x}{c}\right)+\frac{gR_2^2\omega_2}{c^2}\sin 2\omega_2\left(t-\frac{x}{c}\right)$$

$$+\frac{gR_1R_2\omega_1}{c^2}\left[\sin(\omega_1+\omega_2)\left(t-\frac{x}{c}\right)+\sin(\omega_1-\omega_2)\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]$$

$$+\frac{gR_1R_2\omega_2}{c^2}\left[\sin(\omega_1+\omega_2)\left(t-\frac{x}{c}\right)+\sin(\omega_1-\omega_2)\left(t-\frac{x}{c}\right)\right]。$$

(7.8-13)

由以上两方程求得 ζ_1 和 u_1，最后可求得 ζ 和 u，但这里不列出它们的具体形式。其实从(7.8－12)和(7.8－13)式已经可以看出，当两个原线性潮波进入浅水之后，除了产生角速率为原线性潮波的两倍的倍潮波之外，还产生角速率为原线性潮波角速率之和或之差的浅水潮波，称之为复合潮波。对于半日潮海区，主要分潮波有 M_2 和 S_2，当它们由深水传播到浅水区时，由于非线性效应，可形成倍潮波 M_4，S_4 和复合潮波 MS_4（其角速率为 M_2 和 S_2 的角速率之和），M_{sf}（其角速率为 S_2 和 M_2 的角速率之差）。这些浅水分潮是半日潮海区的主要浅水分潮。

7.8.2 考虑摩擦的浅水潮波

在浅水中，摩擦是不可忽略的。因此讨论要从一维非线性方程(7.8－1)和(7.8－2)出发。同样地，用逐步近法求解该方程。第一步仍略去非线性项，(7.8－1)和(7.8－2)式简化为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}-ku,\\ \frac{\partial\zeta}{\partial t}&=-h\frac{\partial u}{\partial x}。\end{aligned}\right\}\qquad(7.8\text{-}14)$$

从上面方程消去 u，得

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + k \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0。 \tag{7.8-15}$$

参照无摩时的原潮波表达式(7.8－4)，如果取摩擦为线性规律，于是考虑摩擦的原潮波可取为如下形式

$$\zeta_0 = R_0 e^{-mx} \sin\omega(t - \frac{xn}{c})， \tag{7.8-16}$$

其中 m，n 为待定量。若将(7.8－16)式代入方程(7.8－15)，然后比较正弦和余弦的系数，可得

$$-\omega^2 - m^2 c^2 + \omega^2 n^2 = 0,$$

$$-2\omega mnc - \omega k = 0。$$

由以上两式解出

$$m = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1}{2}(p-1)}$$

$$n = \sqrt{\frac{1}{2}(p+1)}$$

其中

$$p = \sqrt{1 + \frac{k^2}{\omega}}$$

再令

$$q = \sqrt{\frac{1}{2}(p-1)}, \quad c_1 = \frac{c}{n},$$

于是(7.8－16)式可表为

$$\zeta_0 = R_0 e^{-\frac{\omega}{c} qx} \sin\omega(t - \frac{x}{c_1})。 \tag{7.8-17}$$

利用(7.8－14)式中的连续方程，可求得

$$u_0 = \frac{gR_0 e^{-\frac{\omega}{c} qx}}{cp} [n\sin\omega(t - \frac{x}{c_1}) + q\cos\omega(t - \frac{x}{c_1})]。 \tag{7.8-18}$$

用类似于无摩擦情况下的过程，设一级近似表为 $\zeta=\zeta_0+\zeta_1$，$u=u_0+u_1$，将其代入非线性方程(7.8－1)和(7.8－2)，略去 ζ_1，u_1 的相互乘积项，然后再将(7.8－17)式和(7.8－18)式代入，结果有

$$\frac{\partial u_1}{\partial t}+g\frac{\partial \zeta_1}{\partial x}+ku_1=\frac{\pi g R_0^2}{ph\lambda}e^{-2mx}\Big[n\sin 2\omega\Big(t-\frac{nx}{c}\Big)$$

$$+q\cos 2\omega\Big(t-\frac{nx}{c}\Big)+q\Big], \tag{7.8-19}$$

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}+h\frac{\partial u_1}{\partial x}=\frac{2\pi g R_0^2}{c\lambda}e^{-2mx}\sin 2\omega\Big(t-\frac{nx}{c}\Big)$$

$$+\frac{1}{2}\frac{gR_0^2}{c^2p}ke^{-2mx}, \tag{7.8-20}$$

由以上两微分方程消去 u_1，得仅含 ζ_1 的方程

$$\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 \zeta_1}{\partial x^2}+k\frac{\partial \zeta_1}{\partial t}=gR_0^2e^{-mx}\Big[\frac{12\pi^2}{\lambda^2}\cos 2\omega\Big(t-\frac{nx}{c}\Big)$$

$$+\frac{2\pi k}{c\lambda}\sin 2\omega\Big(t-\frac{nx}{c}\Big)+\frac{1}{2}\frac{k^2(1+0.5p)}{c^2n^2p}\Big], \tag{7.8-21}$$

对上式积分，并用边界条件：在 $x=0$ 处，$\zeta=R_0\sin\omega t$，从而求得 ζ_1，进而求得 ζ

$$\zeta=R_0e^{-mx}\sin\omega\Big(t-\frac{xn}{c}\Big)+\frac{3\pi R_0^2}{hTk}\Big[e^{-p'x}\sin 2\omega\Big(t-\frac{q'x}{c}\Big)$$

$$-e^{-2mx}\sin 2\omega\Big(t-\frac{nx}{c}\Big)\Big]-\frac{1}{2}\frac{R_0^2}{h}\Big[e^{-p'x}\cos 2\omega\Big(t-\frac{q'x}{c}\Big)$$

$$-e^{-2mx}\cos 2\omega\Big(t-\frac{nx}{c}\Big)\Big]+\frac{1}{2}\frac{R_0^2}{h}\frac{(1+0.5p)}{p}(1-e^{-2mx}),$$

$$\tag{7.8-22}$$

其中

$$p'=\frac{2\omega}{c}\sqrt{\frac{1}{2}(l-1)},\qquad q'=\sqrt{\frac{1}{2}(l+1)},$$

$$l = \sqrt{1 + (\frac{k}{2\omega})^2}。$$

将(7.8--22)式代入(7.8-20)式,得

$$
\begin{aligned}
u = & \frac{gR_0 e^{-mx}}{cp}[n\sin\omega(t - \frac{nx}{c}) + q\cos\omega(t - \frac{nx}{c})] \\
& + \frac{\pi g R_0^2}{ckhT}[\frac{q'(1+2l)}{l}e^{-r'x}\sin 2\omega(t - \frac{q'x}{c}) - \\
& \frac{n(1+2p)}{p}e^{-2mx}\sin 2\omega(t - \frac{nx}{c})] \\
& + \frac{1}{2}\frac{gR_0^2}{ch}[\frac{p-0.5}{np}e^{-2mx}\cos 2\omega(t - \frac{nx}{c}) - \\
& \frac{0.5(l-0.5)}{lq'}e^{-r'x}\cos 2\omega(t - \frac{q'x}{c})] \\
& - \frac{1}{2}\frac{gR_0^2 n}{chp}e^{-2mx}。
\end{aligned}
\tag{7.8-23}
$$

由(7.8-22)和(7.8-23)式所表示的考虑摩擦的非线性波动可以看出,除了包含浅水潮波而外,还包含了非周期性的项,它们反映了平均海面的变化(余水位)和平均余流的变化(潮汐余流)。

§7.9 三维潮波

在前几节讨论中,均从铅直向平均基本方程出发,获得了不同情况下的潮位和铅直向平均潮流之解。实际观测表明,潮流的大小和方向随深度增加而不断地变化。在深水区域,上层的潮流矢量随深度变化不大,但近海底的潮流矢量随深度变化很明显;在浅水区域,整个水层中的潮流矢量随深度变化都很显著。由于铅直向平均流不能反映潮流场的铅直变化,因此从三维基本方程出发,研究三维潮波是必要的。Sverdrup(1926)最先利用三维基本方程,研究了北西伯利亚大陆架上的 M_2 潮波,得到了有名的结论:最大流速随

深度增加而逐渐减小；最大流速方向随深度增加而逐渐右偏；最大流速发生时刻随深度增加而逐渐提前。他的结论说明了一些实际海洋的潮流现象。Сгибнева(1965)从三维线性基本方程出发，导出了描述有界海区潮位分布的微分方程以及计算潮流随铅直坐标变化的公式。沈育疆、叶安乐(1984)，叶安乐、陈宗镛等(1985)，根据 Сгибнева 的结果，计算了东中国海和台湾海峡一带的潮位和三维潮流场。对于半日潮(相应于 $\omega>f$)，得出了在海洋上层最大流速方向随深度增加逐渐右偏、在近底层最大流速方向随深度增加逐渐左偏的结论。方国洪(1983)，叶安乐(1984a，1984b)研究了均质海洋中的潮流铅直结构，后者导出了分潮流最大流速方向和最大流速发生时刻随深度的变化率，这些变化率与潮位分布无关。上述的这些研究，使人们对三维潮流有了一定的认识。

本节主要介绍 Сгибнева 的研究工作，并且利用实际计算所得到的结果说明潮流铅直结构的主要特征。

选用坐标原点位于静止海面、z 轴指向下为正的左手直角坐标系。忽略非线性平流项，只考虑铅直湍流摩擦，于是三维线性基本方程可表为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}-fv&=g\frac{\partial\zeta}{\partial x}+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},\\ \frac{\partial v}{\partial t}+fu&=g\frac{\partial\zeta}{\partial y}+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2},\end{aligned}\right\}\qquad(7.9\text{-}1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\qquad(7.9\text{-}2)$$

其中 $A_z=A_z(x,y)$，取为不随 z 而变。边界条件为海面无风，海底流速为零，即

$$\left.\begin{aligned}&A_z\frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=0}=A_z\frac{\partial v}{\partial z}\Big|_{z=0}=0,\\ &u|_{z=h}=v|_{z=h}=w|_{z=h}=0。\end{aligned}\right\}\qquad(7.9\text{-}3)$$

而海岸法向流速为零，即

$$(u\cos\alpha+v\cos\beta)_L=0,\tag{7.9-4}$$

其中 $\cos\alpha$ 和 $\cos\beta$ 为海岸法线的方向余弦。水界处的边界条件是法向流速为给定函数，或水位为给定函数，即

$$(u\cos\alpha+v\cos\beta)_{L1}=f_0(L_1),\tag{7.9-5}$$

或

$$(\zeta)_{L1}=F(L_1)。\tag{7.9-6}$$

将连续方程沿 z 方向从 0 到 h 积分，运用海底运动学边界条件，变成

$$\frac{\partial S_x}{\partial x}+\frac{\partial S_y}{\partial y}=\frac{\partial\zeta}{\partial t},\tag{7.9-7}$$

其中

$$S_x=\int_0^h u dz,\qquad S_y=\int_0^h v dz。\tag{7.9-8}$$

相应地，边界条件(7.9－4)和(7.9－5)变成

$$(S_x\cos\alpha+S_y\cos\beta)_L=0,\tag{7.9-9}$$

$$(S_x\cos\alpha+S_y\cos\beta)_{L1}=f(L_1)。\tag{7.9-10}$$

因为方程(7.9－1)和(7.9－7)为线性的，可以对每一个分潮进行讨论。任一分潮波可形式上表为

$$\zeta=R(x,y)\cos[\omega t-\varphi(x,y)],$$

$$u=U(x,y,z)\cos[\omega t-\varphi_u(x,y,z)],$$

$$v=V(x,y,z)\cos[\omega t-\varphi_v(x,y,z)],$$

或者表为

$$\left.\begin{aligned}\zeta &= \zeta_1\cos\omega t + \zeta_2\sin\omega t = Re[\bar{\zeta}e^{-i\omega t}],\\ u &= u_1\cos\omega t + u_2\sin\omega t = Re[\bar{u}e^{-i\omega t}],\\ v &= v_1\cos\omega t + v_2\sin\omega t = Re[\bar{v}e^{-i\omega t}],\end{aligned}\right\} \tag{7.9-11}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\zeta_1 &= R\cos\varphi, & \zeta_2 &= R\sin\varphi,\\ u_1 &= U\cos\varphi_u, & u_2 &= U\sin\varphi_u,\\ v_1 &= V\cos\varphi_v, & v_2 &= V\sin\varphi_v,\end{aligned}\right\} \tag{7.9-12}$$

$$\left.\begin{aligned}\bar{\zeta} &= \zeta_1 + i\zeta_2,\\ \bar{u} &= u_1 + iu_2,\\ \bar{v} &= v_1 + iv_2。\end{aligned}\right\} \tag{7.9-13}$$

将(7.9—11)式代入运动方程(7.9—1)和连续方程(7.9—7)，得

$$i\omega\bar{u} + A_z\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial z^2} + f\bar{v} + g\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} = 0, \tag{7.9-14}$$

$$i\omega\bar{v} + A_z\frac{\partial^2\bar{v}}{\partial z^2} - f\bar{u} + g\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y} = 0, \tag{7.9-15}$$

$$\frac{\partial\bar{S}_x}{\partial x} + \frac{\partial\bar{S}_y}{\partial y} + i\omega\bar{\zeta} = 0, \tag{7.9-16}$$

其中

$$S_x = \int_0^h\bar{u}dz, \quad S_y = \int_0^h\bar{v}dz。 \tag{7.9-17}$$

由(7.9－14)±(7.9－15)×i，分别得到

$$A_z\frac{\partial^2(\bar{u}+i\bar{v})}{\partial z^2} - i(f-\omega)(\bar{u}+i\bar{v}) = -g\left(\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} + i\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y}\right),$$

$$A_z\frac{\partial^2(\bar{u}-i\bar{v})}{\partial z^2} + i(f+\omega)(\bar{u}-i\bar{v}) = -g\left(\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} - i\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y}\right)。$$

令

$$\left.\begin{aligned} n &= u - iv, \\ m &= \bar{u} - i\bar{v}, \end{aligned}\right\} \tag{7.9-18}$$

$$\left.\begin{aligned} P &= -\frac{g}{A_z}\left(\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} + i\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y}\right), \\ Q &= -\frac{g}{A_z}\left(\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial x} - i\frac{\partial\bar{\zeta}}{\partial y}\right), \end{aligned}\right\} \tag{7.9-19}$$

于是有

$$\frac{\partial^2 n}{\partial z^2} - i\frac{f-\omega}{A_z}n = P, \tag{7.9-20}$$

$$\frac{\partial^2 m}{\partial z^2} + i\frac{f+\omega}{A_z}m = Q。 \tag{7.9-21}$$

由边界条件(7.9—3)可得求解方程(7.9—20)和(7.9—21)的边界条件

$$\left.\begin{aligned} &A_z\frac{\partial n}{\partial z} = A_z\frac{\partial m}{\partial z} = 0, \qquad &\text{在海面} \\ &n = m = 0, \qquad &\text{在海底} \end{aligned}\right\} \tag{7.9-22}$$

对方程(7.9—20)和(7.9—21)积分，并运用边界条件(7.9—22)，得

$$n = \frac{P}{j^2}\left[\frac{\operatorname{ch} jz}{\operatorname{ch} jh} - 1\right], \tag{7.9-23}$$

$$m = \frac{Q}{q^2}\left[\frac{\operatorname{ch} qz}{\operatorname{ch} qh} - 1\right], \tag{7.9-24}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} j^2 &= i(f-\omega)/A_z, \\ q^2 &= -i(f+\omega)/A_z。 \end{aligned}\right\} \tag{7.9-25}$$

利用关系式(7.9—18)，可得

$$\left.\begin{aligned}\bar{u}&=u_1+iu_2=\frac{P}{j^2}\left[\frac{\operatorname{ch}jz}{\operatorname{ch}jh}-1\right]+\frac{Q}{q}\left[\frac{\operatorname{ch}qz}{\operatorname{ch}qh}-1\right],\\ \bar{v}&=v_1+iv_2=\frac{P}{j^2}\left[\frac{\operatorname{ch}jz}{\operatorname{ch}jh}-1\right]-\frac{Q}{q^2}\left[\frac{\operatorname{ch}qz}{\operatorname{ch}qh}-1\right]。\end{aligned}\right\}\quad(7.9\text{-}26)$$

对表达式(7.9—26)沿 z 自未扰动海面 $z=0$ 至海底 $z=h$ 进行积分，得

$$\bar{S}_x=rP+sQ,\quad \bar{S}_y=\frac{1}{i}(rP-sQ),\qquad(7.9\text{-}27)$$

式中

$$\left.\begin{aligned}r&=\frac{\operatorname{th}jh}{2j^3}-\frac{h}{2j^2},\\ s&=\frac{\operatorname{th}qh}{2q^3}-\frac{h}{2q^2}。\end{aligned}\right\}\qquad(7.9\text{-}28)$$

将(7.9—27)式代入(7.9—16)式，获到仅含 $\bar{\zeta}$ 的微分方程

$$\frac{\partial}{\partial x}(rP+sQ)+\frac{1}{i}\frac{\partial y}{\partial x}(rP-sQ)+i\omega\bar{\zeta}=0。\qquad(7.9\text{-}29)$$

把(7.9—27)式代入(7.9—9)式可得方程(7.9—29)之解在岸边应满足的边界条件

$$\left[(rP+sQ)\cos\alpha+\frac{1}{i}(rP-sQ)\cos\beta\right]_L=0,\qquad(7.9\text{-}30)$$

而水界处的边界条件由(7.9—6)式可转换成

$$(\bar{\zeta})_{L1}=\bar{F}(L_1)。\qquad(7.9\text{-}31)$$

这样，已经得到问题的原则解：利用边界条件(7.9—30)和(7.9—31)，可求得方程(7.9—29)之解 $\bar{\zeta}$，进而求得 ζ；由(7.9—26)式可求得任意深度处的 $\bar{u}$ 和 $\bar{v}$，进而求得 u 和 v。

作为实际例子，下面给出台湾海峡及其附近海域的三维半日潮波。图 7—30 和图 7—31 是 M_2 同潮图和 S_2 同潮图。图 7—32 是台湾海峡中的一个断面上的 M_2 潮流铅直结构。由铅直结构图可以看出 M_2 潮流的主要特征：在水深较浅的地方，最大流速由表面

向海底逐渐减小，而且越向下减小得越快；在水深较大的地方，整个上层最大流速随深度变化不大，而下层则迅速减小。上层的最大流速方向随深度的增加而向右偏，下层的则随深度的增加而向左偏；在水深较浅的地方，上层的右偏层较薄。最大流速发生时刻随深度的增加而提前，越是向下提前得越快。

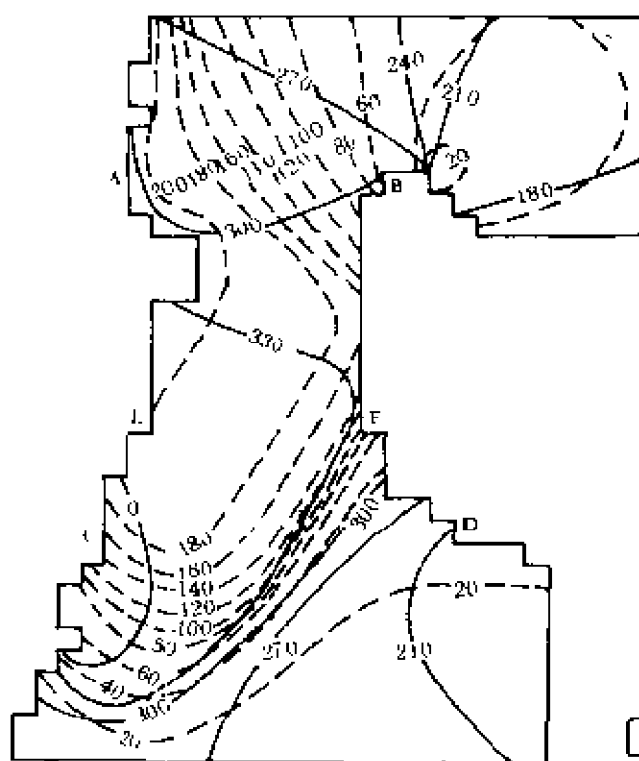


图 7—30　M_2 同潮图

虚线为等振幅线(cm)，实线为同位相线(°)

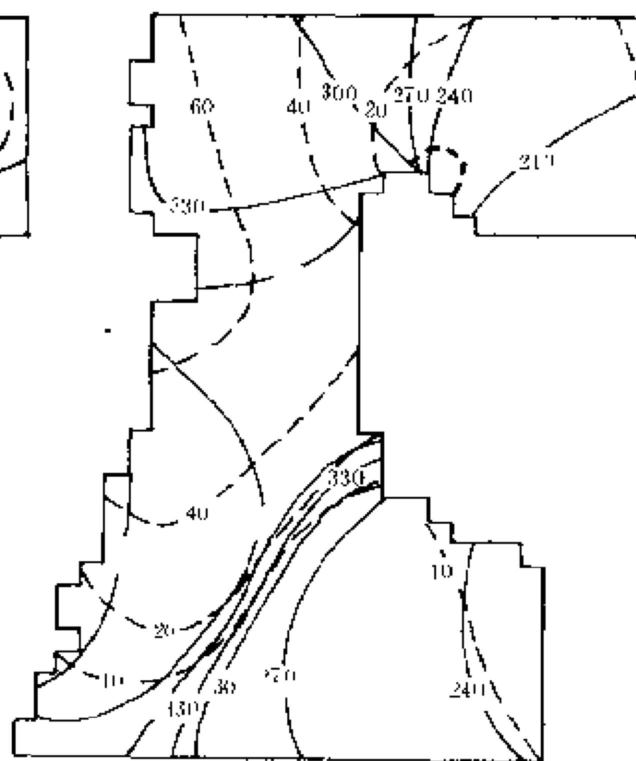


图 7—31　S_2 同潮图

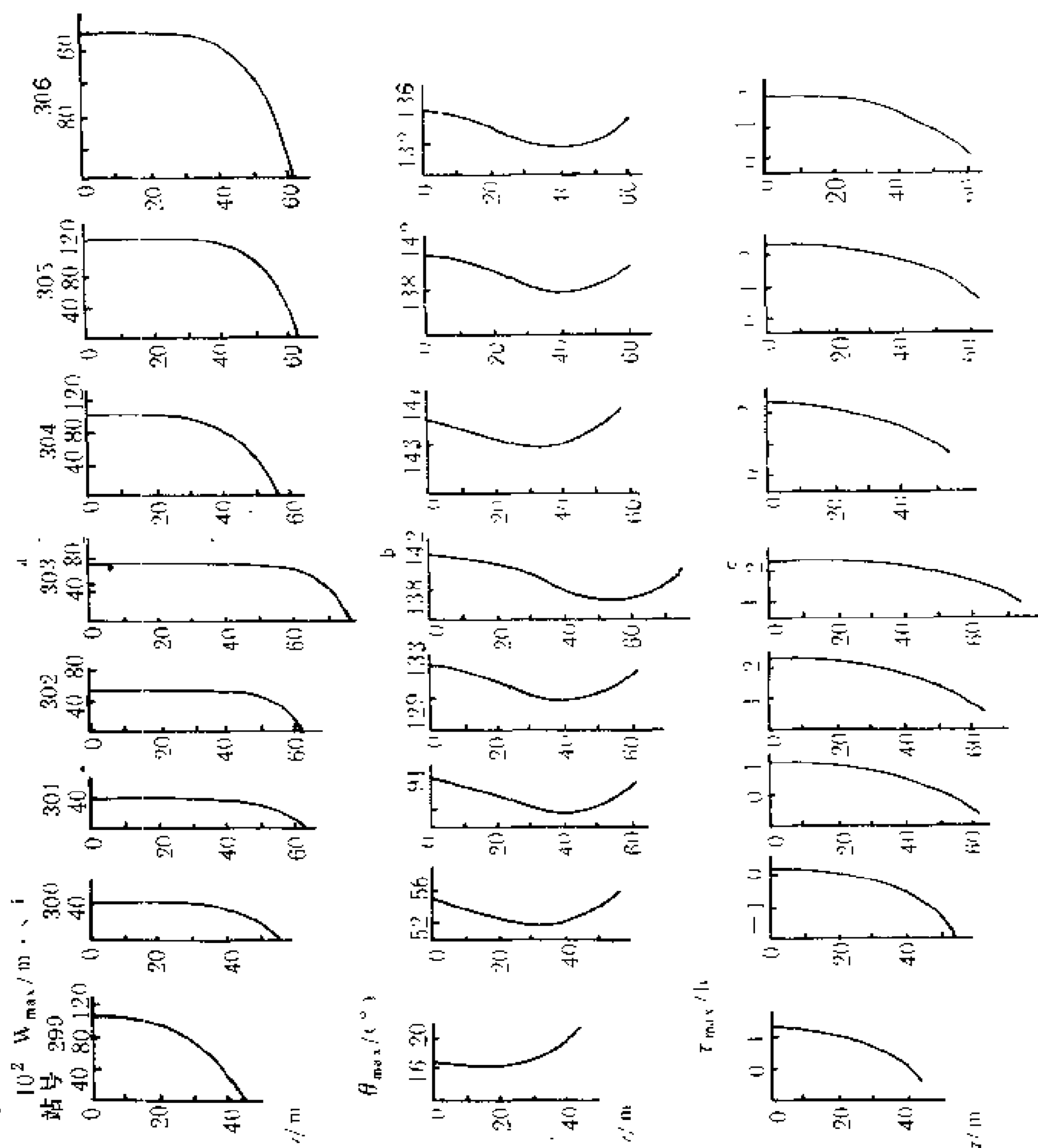


图 7-32 断面 FF 上的 M_2 潮流铅直结构

a. 最大流速铅直分布，b. 最大流速方向的铅直变化，

c. 最大流速发生时刻的铅直变化

第八章　内波

前两章讨论了海浪和潮波，它们是一种发生在自由海面上的显著波动，称之为表面波。如以振幅大小来表征，表面波的振幅在表面最大，随着离开海面向下逐渐衰减。而内波则是发生在密度稳定层化了的海洋内部的波动，其最大振幅出现在海洋内部，对自由海面没有多大影响。一般地说，稳定的密度分布是连续分层的。可是它一旦受到扰动，比如海洋上层的铅直混合，便会形成比较明显的跃层。最早的内波研究便是从跃层内波的发现开始的。如果跃层很强，其厚度便很薄，跃层便趋向于一个界面，跃层内波便趋向于界面波。其实，界面波与表面波并无本质的差别，表面波也是一种界面波，是发生在密度很小的空气与密度很大的海水之间界面上的波动，也是一种内波，只不过在研究表面波时，往往忽略了空气密度的影响。另一方面，自由海面的海水上升需要克服重力，因此大幅度的升高受到限制，但是海洋内部的海水上升时，本身的重量大部分被浮力所抵消，于是升高就比较容易。如果以相同的能量产生内波和表面波，则内波的最大振幅要比表面波的大得多。

§8.1　小振幅内波的一般特性

小振幅内波可利用线性理论来研究。如果考虑二维问题，并引进 Boussinesq 近似，于是运动方程和连续方程可表为

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial x},\qquad (8.1-1a)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p}{\partial z}-\frac{\rho_0+\rho'}{\rho_0}g,\qquad (8.1—1b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0。\qquad (8.1-2)$$

其中 $\rho_0=\rho_0(z)$，为无内波时的稳定密度分布，假定它只随深度而变；坐标原点位于静止海面，z 轴指向上为正。设静止时的压强以 $p_0=p_0(z)$ 表示，则压强可记为

$$p=p_0+p',\qquad (8.1-3)$$

将(8.1—3)式代入运动方程(8.1—1)，结果得

$$\rho_0\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{\partial p'}{\partial x},\quad \rho_0\frac{\partial w}{\partial t}=-\frac{\partial p'}{\partial z}-p'g。\qquad (8.1-4)$$

已假定海水是不可压缩的，故有

$$\frac{d\rho}{dt}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\rho}{\partial x}+w\frac{\partial\rho}{\partial z}\simeq\frac{\partial\rho'}{\partial t}+u\frac{\partial\rho_0}{\partial x}+w\frac{\partial\rho_0}{\partial z}=0,$$

$$(8.1-5)$$

由于 $\frac{\partial\rho_0}{\partial x}=0$，于是

$$\frac{\partial\rho'}{\partial t}+w\frac{\partial\rho_0}{\partial z}=0。\qquad (8.1-6)$$

下面从(8.1—2)式，(8.1—4)式和(8.1—6)式出发，讨论内波的特性。

由(8.1—4)式的第一个方程时 z 求导，第二个方程对 x 求导，然后相减消去扰动压强 p'，得

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\rho_0 u}{\partial z}-\frac{\partial\rho_0 w}{\partial x}\right)-g\frac{\partial\rho'}{\partial x}=0。\qquad (8.1-7)$$

将连续方程(8.1—2)乘以 ρ_0，再与(8.1—5)式相加，得

$$\frac{\partial\rho_0 u}{\partial x}+\frac{\partial\rho_0 w}{\partial z}+\frac{\partial\rho'}{\partial t}=0。\qquad (8.1-8)$$

将(8.1—7)式对 x 和 t 各求导一次，(8.1—8)式各对 z 和 t 各求导

一次，然后消去 u，结果有

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 \rho_0 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t}\right) + \frac{\partial^2 \rho_0 w}{\partial x^2}\right] + g\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial \rho'}{\partial t}\right) = 0,$$

利用(8.1—6)式，上式变成

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[\frac{\partial^2 \rho_0 w}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \rho_0 w}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial z}\left(w\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right)\right] - g\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(w\frac{\partial \rho_0}{\partial z}\right) = 0。\tag{8.1-9}$$

现考虑频率为 ω、水平波数为 k 的波动

$$w = W(z)e^{i(\omega t - kx)},\tag{8.1-10}$$

将(8.1—10)式代入方程(8.1—9)，得 W 的方程

$$\frac{d}{dz}\left(\rho_0\frac{dW}{dz}\right) + k^2\left(-\frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz} - 1\right)\rho_0 W = 0,$$

若引入

$$N^2 = -\frac{g}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dz},\tag{8.1-11}$$

N 称为 Väisälä 频率，于是铅直流速振幅方程变成

$$\frac{d}{dz}\left(\rho_0\frac{dW}{dz}\right) + k^2\left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right)\rho_0 W = 0。\tag{8.1-12}$$

为了求解该方程，引进流函数 Ψ，满足 $w = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$，$u = \frac{\partial \Psi}{\partial z}$。$\Psi$ 可取为如下形式

$$\Psi = \frac{Z(z)}{\sqrt{\rho_0}}e^{i(\omega t - kx)},\tag{8.1-13}$$

相应地有

$$W = \frac{ikZ}{\sqrt{\rho_0}}。\tag{8.1-14}$$

于是，由(8.1-12)式(在略去小量后)得[富永政英(1976)]

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2\left(\frac{N^2}{\omega^2} - 1\right)Z = 0。\tag{8.1-15}$$

一般说来，Väisälä 频率 N 为 z 的函数。如果假定 N 与 z 无关，比如

假定密度分布形如 $\rho_0=\bar{\rho}_0e^{-\alpha z}$,此种情形下,方程(8.1—15)有如下一般解

$$Z = A_1e^{k(1-\frac{N^2}{\omega^2})^{1/2}z} + B_1e^{-k(1-\frac{N^2}{\omega^2})^{1/2}z}, \quad N^2 < \omega^2, \tag{8.1-16}$$

或

$$Z = A_2e^{ik(\frac{N^2}{\omega^2}-1)^{1/2}z} + B_2e^{-ik(\frac{N^2}{\omega^2}-1)^{1/2}z}, \quad N^2 > \omega^2, \tag{8.1-17}$$

于是流函数为

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\Big[A_1e^{k(1-\frac{N^2}{\omega^2})^{1/2}z+i(\omega t-kx)} + B_1e^{-k(1-\frac{N^2}{\omega^2})^{1/2}z+i(\omega t-kx)}\Big], \quad N^2 < \omega^2, \tag{8.1-18}$$

或

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{\rho_0}}\Big[A_2e^{ik(\frac{N^2}{\omega^2}-1)^{1/2}z+i(\omega t-kx)} + B_2e^{-ik(\frac{N^2}{\omega^2}-1)^{1/2}z+i(\omega t-kx)}\Big], \quad N^2 > \omega^2。 \tag{8.1-19}$$

相应地,铅直流速可表为

$$w = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{ik}{\sqrt{\rho_0}}\Big[A_1e^{k(1-\frac{N^2}{\omega^2})^{1/2}z+i(\omega t-kx)} + B_1e^{-k(1-\frac{N^2}{\omega^2})^{1/2}z+i(\omega t-kx)}\Big], N^2 < \omega^2, \tag{8.1-20}$$

或

$$w = -\frac{\partial\Psi}{\partial x} = \frac{ik}{\sqrt{\rho_0}}\Big[A_2e^{ik(\frac{N^2}{\omega^2}-1)^{1/2}z+i(\omega t-kx)} + B_2e^{-ik(\frac{N^2}{\omega^2}-1)^{1/2}z+i(\omega t-kx)}\Big], \quad N^2 > \omega^2。 \tag{8.1-21}$$

(8.1—20)式表明,当 $N^2<\omega^2$ 时,铅直流速振幅随 z 呈指数形式变化,它不是内波的解。而(8.1—21)式所表示的是内波运动形式:它不仅在 x 方向有波动,在 z 方向也存在波动,但必须满足 $N^2>\omega^2$。

对于内波，其运动在海水内部明显，对自由海面无多大影响，因此相应的海面和海底边界条件可取

$$w_{z=0}=0,\quad w_{z=-h}=0。$$

应用以上边界条件，由铅直流速的一般解(8.1—21)式可以得到

$$\left.\begin{aligned}&B_2=-A_2,\\&2iA_2\sin\left[k\left(\frac{N^2}{\omega^2}-1\right)^{1/2}h\right]=0,\end{aligned}\right\}\qquad(8.1-22)$$

因此应满足如下关系

$$k\left(\frac{N^2}{\omega^2}-1\right)^{1/2}h=n\pi,\qquad n=1,2,3\cdots\cdots$$

或

$$\omega^2=\frac{k^2N^2h^2}{n^2\pi^2+k^2h^2}.\qquad(8.1-23)$$

此即为频散关系。利用(8.1—22)式，由(8.1—21)式可得满足边界条件的内波铅直流速

$$w=\frac{A}{\sqrt{\rho_0}}\sin\frac{n\pi}{h}ze^{i(\omega t-kx)}。\qquad(8.1-24)$$

$(n=1,2,3,\cdots\cdots)$

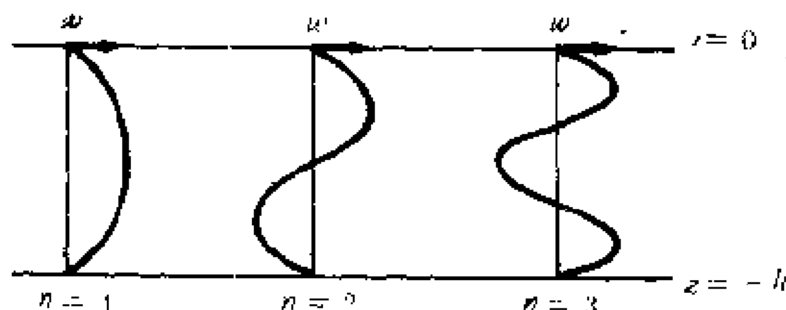


图 8—1　内波的各种波型

由(8.1—24)式可以看出，当 n 取不同之值时，w 有不同型式。如图 8—1 所示，当 $n=1$ 时，w 在 $z=0$ 和 $z=-h$ 处为零，而在 $z=-\frac{h}{2}$

处其振幅最大；当 $n=2$ 时，w 在 $z=0$，$-\frac{h}{2}$ 和 $-h$ 处为零，而于 $z=-\frac{h}{4}$ 和 $-\frac{3h}{4}$ 处其振幅最大，但位相相反。总之，随着 n 的增加，内部出现的最大振幅个数也随之增加。这形象地说明了内波与表面波的区别。内波与表面波的另一个重大区别是群速 C_g 的方向不同。为了讨论这个问题，将(8.1－24)式中的波数表为

$$m^2 = l^2 + k^2, \qquad (8.1-25)$$

其中 k 为 x 方向的波数，$l=\frac{n\pi}{h}=k\sqrt{\frac{N^2}{\omega^2}-1}$ 为 z 方向的波数。设波数 m 与 x 轴的交角为 θ，则 $k=m\cos\theta$，$l=m\sin\theta$。由 z 方向波数 l 的表达式可得

$$\frac{N^2}{\omega^2} = 1 + \frac{l^2}{k^2} = 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta,$$

于是

$$\omega = N\cos\theta = N\frac{k}{m}。 \qquad (8.1-26)$$

利用(8.1－25)式和(8.1－26)式，可以导出群速的 x 分量和 z 分量

$$C_{gx} = \frac{d\omega}{dm}\cos\theta = N\left(\frac{1}{m} - \frac{k^2}{m^3}\right), \qquad (8.1-27)$$

$$C_{gz} = \frac{d\omega}{dm}\sin\theta = -N\frac{kl}{m^3}, \qquad (8.1-28)$$

其中

$$\frac{N}{m} = \frac{N\cos\theta}{k} = \frac{\omega}{k} = C_H, \qquad (8.1-29)$$

以及

$$\left.\begin{aligned} N\frac{k^2}{m^3} &= \frac{\omega}{m}\cos\theta = C\cos\theta = C_x, \\ N\frac{kl}{m^3} &= \frac{\omega}{m}\sin\theta = C\sin\theta = C_z。\end{aligned}\right\} \quad (8.1-30)$$

C 为波速，C_x 和 C_z 为波速的 x 分量和 z 分量，C_H 为水平波速。将(8.1—29)式和(8.1—30)式代入(8.1－27)式和(8.1—28)式，得

$$C_{gx} = C_H - C_x,$$

$$C_{gz} = -C_z。$$

由以上两式求平方和，结果有

$$C_g^2 = C_H^2 + C^2 - 2C_H C_x。\quad (8.1-31)$$

因为 $C_H C_x = C^2$，因此(8.1—31)式变成

$$C_g^2 + C^2 = C_H^2 \quad (8.1-32)$$

此式表明 $\mathbf{C}_g \perp \mathbf{C}$，即内波的群速与相速垂直，从而内波能量的输送方向与波动传播方向垂直。

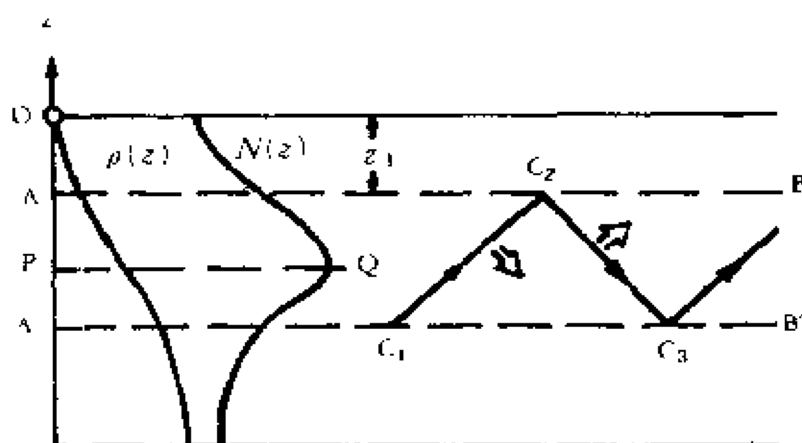


图 8—2　内波在跃层中的传播
→内波传播方向 ⇒内波能量输送方向

Väisälä 频率 N 是由海水稳定密度分布所决定的。由(8.1—26)式可知，若 N 为常量时，不同频率 ω 的内波有不同的传播方向。若 $N=N(z)$ 时，某一确定频率 ω 的内波在其传播过程中将不断变化传播方向：当从具有较小 N 值的水层向具有较大 N 值的水层传播时，波向与 x 轴的交角 θ 由小变大，反之则由大变小；当到达 $N=\omega$ 的水层时，波向 $\theta=0$，波动不能在此层传

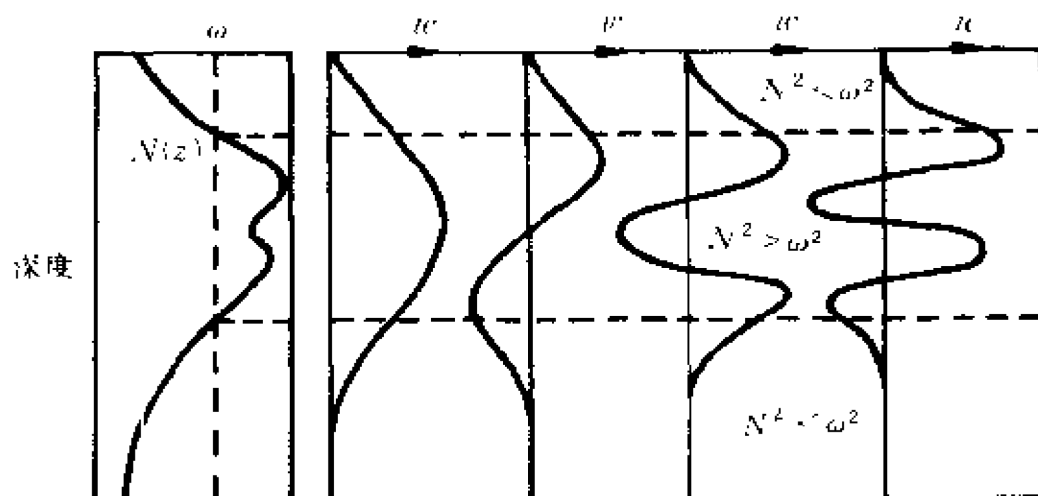


图 8—3　$N=N(z)$时的内波波型

播，而被完全反射，见如图 8—2 所示的海水密度分布及相应的 $N(z)$的分布。设在密度跃层里发生频率为 $\omega=N(z_1)$的内波，因此，在 AB 和 $A'B'$之间以内波形式运动，在此区域之外，则是振幅由 AB 或 $A'B'$向自由海面或海底衰减的运动形式。在 AB 和 $A'B'$之间的区域里，内波大致沿 C_1C_2 方向传播，当到达 AB 平面时发生反射，然后大致沿 C_2C_3 方向传播，反射波到达 $A'B'$时再次发生反射，如此反复下去。由于内波能量输送方向与其传播方向垂直（如图 8—2 中的双箭头所示），因而当内波大致沿 C_1C_2 方向传播时，其能量沿 C_2C_3 方向输送。AB 和 $A'B'$就好象管子一样，引导着内波传播，称之为波导管。在跃层里发生的内波中，同一频率的内波当然也可以具有不同的波型。图 8—3 所示的是 $N=N(z)$情况下的四种波型。对于只有一个极值的最低波型，其铅直流速在跃层里变化不大。

§8.2　界面波与内波

海洋中经常出现强密度跃层。图 8—4 是我国近海 8 月份观测到的密度铅直分布。可见存在强密度跃层，它将海水分成上下两层，上层的密度随深度变化缓慢，下层的密度差不多均匀一致。在

热带和亚热带，由于风暴或贸易风的作用，使海洋上层充分混合，结果形成强跃层，并且使海水分成两个均匀层。

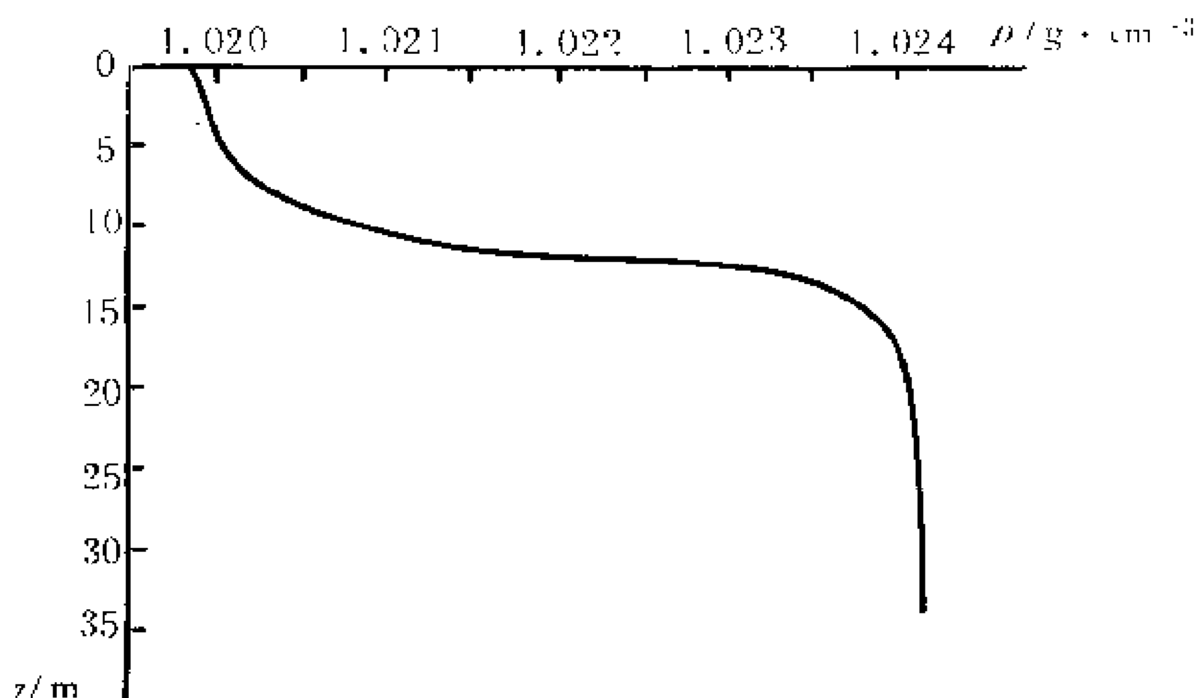


图 8—4 中国近海某站 8 月份的密度铅直分布

在这种海水密度结构中，只在跃层中 $N(z)$ 具有极大值，而跃层之外，$N(z)$ 之值都很小，可近似认为是零。因此，在上下两个均匀层中，铅直流速方程(8.1—12)简化为

$$\frac{d^2W}{dz^2}-k^2W=0, \qquad (8.2-1)$$

由此可得上下均匀层的铅直流速振幅

$$W_1=A_1e^{kz}+B_1e^{-kz}, \quad 0>z>-d+\frac{\varepsilon}{2},$$

$$W_2=A_2e^{kz}+B_2e^{-kz}, \quad -d-\frac{\varepsilon}{2}>z>-h,$$

其中 d 为跃层的中心深度，ε 为跃层的厚度，h 为海水水深。设跃层内的流速以 $W=W(z)$ 表示。在跃层的上下界面处应满足

$$W(-d+\frac{\varepsilon}{2})=W_1(-d+\frac{\varepsilon}{2})=A_1e^{-kd+\frac{1}{2}k\varepsilon}+B_1e^{kd-\frac{1}{2}k\varepsilon},$$

$$W(-d-\frac{\varepsilon}{2})=W_2(-d-\frac{\varepsilon}{2})=A_2e^{-kd-\frac{1}{2}k\varepsilon}+B_2e^{kd+\frac{1}{2}k\varepsilon}。$$

在跃层内，最低型内波（跃层内只有一个振幅极大的内波）的铅直流速振幅变化不大，故近似认为

$$W(z)\simeq W(-d),\qquad -d+\frac{\varepsilon}{2}>z>-d-\frac{\varepsilon}{2}。$$

因此，可将强跃层抽象成一个界面，这等价于 $\varepsilon\to0$ 的极限情形，从而跃层内的最低型内波趋向于界面上的水平波动，

$$W(z)=W_1(-d)=A_1e^{-kd}+B_1e^{kd}。$$

整个海洋中的运动可表为

$$\left.\begin{aligned}W_1&=A_1e^{kz}+B_1e^{-kz},0>z>-d,\\W_2&=A_2e^{kz}+B_2e^{-kz},-d>z>-h。\end{aligned}\right\}\qquad(8.2-2)$$

（8.2—2）式所表示的铅直运动是数学抽象的结果，能够描述强跃层情况下最低型内波的主要特征，并且越是离开界面，越与实际情况接近。

本节只是导出界面波的概念，其具体性质将在下节详细讨论。

§8.3　两层流体的界面波

假定海水中没有其它流动，则在两层不同密度海水中的小振幅小尺度界面波可用下述线性方程描述

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\\frac{\partial w}{\partial t}&=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g。\end{aligned}\right\}\qquad(8.3-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0。\tag{8.3-2}$$

其中没有考虑地转效应，x 轴取在静止的两层流体界面上，z 轴仍取为向上为正。设上层海水的流速，密度，压强和厚度以 u_1，w_1，ρ_1，p_1 和 b_1 表示，下层的以 u_2，w_2，ρ_2，p_2 和 b_2 表示。今考虑频率为 ω，水平波数为 k 的界面谐波，上述物理量可表为

$$\left.\begin{aligned}u_1&=U_1e^{i(\omega t-kx)},\\w_1&=W_1e^{i(\omega t-kx)},\\p_1&=p_{01}+p'_1=p_{01}+P_1e^{i(\omega t-kx)}。\end{aligned}\right\}\tag{8.3-3}$$

$$\left.\begin{aligned}u_2&=U_2e^{i(\omega t-kx)},\\w_2&=W_2e^{i(\omega t-kx)},\\p_2&=p_{02}+p'_2=p_{02}+P_2e^{i(\omega t-kx)}。\end{aligned}\right\}\tag{8.3-4}$$

其中 p_{01} 和 p_{02} 为流体静压强，设仅为 z 的函数，p'_1 和 p'_2 为界面波诱导压强。利用(8.3—3)式和(8.3—4)式，由连续方程(8.3—2)式得

$$\left.\begin{aligned}iku_1&=\frac{\partial w_1}{\partial z},\\iku_2&=\frac{\partial w_2}{\partial z}。\end{aligned}\right\}\tag{8.3-5}$$

由运动方程(8.3—1)的第一个方程，再利用(8.3—5)式的关系，得

$$\left.\begin{aligned}ikp'_1&=\rho_1C_Hu_1=\rho_1C_H\frac{\partial w_1}{\partial z},\\ikp'_2&=\rho_2C_Hu_2=\rho_2C_H\frac{\partial w_2}{\partial z}。\end{aligned}\right\}\tag{8.3-6}$$

由于所讨论的波动为线性的，若设界面处的波剖面为

$$\zeta\sim e^{i(\omega t-kx)},$$

则它与铅直流速的关系是

$$w|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = i\omega\zeta。\tag{8.3-7}$$

根据前节讨论，发生界面波的情况下，上层和下层的铅直流速可表为

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= (A_1 e^{kz} + B_1 e^{-kz}) e^{i(\omega t - kx)}, 0 < z < b_1, \\ w_2 &= (A_2 e^{kz} + B_2 e^{-kz}) e^{i(\omega t - kx)}, -b_2 < z < o。\end{aligned}\right\} \tag{8.3-8}$$

它们应满足如下运动学边界条件

自由海面 $\quad w_1|_{z=b_1} = 0,$ (8.3-9)

海底 $\quad w_2|_{z=-b_2} = 0,$ (8.3-10)

界面 $\quad w_1|_{z=\zeta} = w_2|_{z=\zeta}。$ (8.3-11)

再在界面附近、厚度为 ε 的范围内对方程(8.1-12)式积分，

$$\int_\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho \frac{\partial w}{\partial z}\right) dz + k^2 \int_\varepsilon \left[\frac{1}{\omega^2}\left(-g \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}\right) - 1\right] \rho w dz = 0,$$

结果得

$$\rho_2 \frac{\partial w_2}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta} - \rho_1 \frac{\partial w_1}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta} = \frac{k^2}{\omega^2} g (\rho_2 w_2|_{z=\zeta} - \rho_1 w_1|_{z=\zeta})$$

$$+ \frac{\rho_2 + \rho_1}{2} w_1|_{z=\zeta} \varepsilon k^2。$$

对于界面波，有 $\varepsilon k \ll 1$，因此上式简化为

$$\rho_2 \frac{\partial w_2}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta} - \rho_1 \frac{\partial w_1}{\partial z}\bigg|_{z=\zeta} = g \frac{k^2}{\omega^2} (\rho_2 w_2|_{z=\zeta} - \rho_1 w_1|_{z=\zeta}), \tag{8.3-12}$$

这是铅直流速在界面处应满足的动力学边界条件。

首先，利用边界条件(8.3-9)和(8.3-10)，由(8.3-8)式可得

$$\left.\begin{aligned} A_1 e^{kb_1} + B_1 e^{-kb_1} &= 0, \\ A_2 e^{-kb_2} + B_2 e^{kb_2} &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{8.3-13}$$

利用此两式，消去(8.3-8)式中的 B_1 和 B_2，得

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= A\operatorname{sh}k(z-b_1)e^{i(\omega t-kx)}, \\ w_2 &= B\operatorname{sh}k(z+b_2)e^{i(\omega t-kx)}, \end{aligned}\right\} \tag{8.3-14}$$

其中 $A=2A_1e^{kb_1}$，$B=2A_2e^{-kb_2}$。其次利用界面运动学边界条件(8.3—11)和动力学边界条件(8.3—12)，可得下列方程

$$A\operatorname{sh}k(\zeta-b_1) = B\operatorname{sh}(\zeta+b_2), \tag{8.3-15}$$

$$\begin{aligned} &A[\rho_1 kC_H^2\operatorname{ch}k(\zeta-b_1)-\rho_1 g\operatorname{sh}k(\zeta-b_1)] \\ &= B[\rho_2 kC_H^2\operatorname{ch}k(\zeta+b_2)-\rho_2 g\operatorname{sh}k(\zeta+b_2)]。\end{aligned} \tag{8.3-16}$$

设讨论小振幅波动，海水厚度充分大，故 $\zeta \ll b_1$，$\zeta \ll b_2$。于是(8.3—15)和(8.3—16)式可简化为

$$\left.\begin{aligned} &A\operatorname{sh}kb_1 + B\operatorname{sh}kb_2 = 0, \\ &A[\rho_1 kC_H^2\operatorname{ch}kb_1 + \rho_1 g\operatorname{sh}kb_1] \\ &-B[\rho_2 kC_H^2\operatorname{ch}kb_2 - \rho_2 g\operatorname{sh}kb_2] = 0。\end{aligned}\right\} \tag{8.3-17}$$

由此可知，要得到 A、B 的非零解，必满足如下关系

$$\triangle = \begin{vmatrix} \rho_1 kC_H^2\operatorname{ch}kb_1 + \rho_1 g\operatorname{sh} kb_1 & -\rho_2 kC_H^2\operatorname{ch}kb_2 + \rho_2 g\operatorname{sh} kb_2 \\ \operatorname{sh}kb_1 & \operatorname{sh}kb_2 \end{vmatrix} = 0,$$

由此求得频散关系和水平波速

$$\omega^2 = \frac{(\rho_2-\rho_1)gk\operatorname{sh}kb_1\operatorname{sh}kb_2}{\rho_1\operatorname{ch}kb_1\operatorname{sh}kb_2 + \rho_2\operatorname{ch}kb_2\operatorname{sh}kb_1}, \tag{8.3-18}$$

$$C_H^2 = \frac{(\rho_2-\rho_1)g}{k(\rho_1\operatorname{cth}kb_1 + \rho_2\operatorname{cth}kb_2)}。 \tag{8.3-19}$$

当两层海水都很厚时，$\operatorname{cth}kb_1 \simeq 1$，$\operatorname{cth}kb_2 \simeq 1$，因此(8.3—19)式变成

$$C_H^2 = \frac{(\rho_2-\rho_1)g}{(\rho_2+\rho_1)k}。 \tag{8.3-20}$$

我们已经知道，深水表面波动的波速为

$$C_s^2 = \frac{g}{k}, \tag{8.3-20a}$$

其中下标 s 指示表面波。实际上，如果将 ρ_1 当成空气密度，ρ_2 当成

海水密度，由于 $\rho_1 \ll \rho_2$，故由(8.3—20)式可得(8.3—20a)式。对于界面波来说，由于两层海水密度差 $\rho_2-\rho_1 \ll \rho_2$ 或 ρ_1，故有界面波波速远小于具有相同波数的表面波波速

$$C_B^2 \ll C_S^2。\qquad (8.3-21)$$

由(8.3—17)式的第一个方程可得

$$B = -A\frac{\mathrm{sh}kb_1}{\mathrm{sh}kb_2},$$

代入(8.3—14)式消去 B，满足边界条件的铅直流速可表为

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= A\mathrm{sh}k(z-b_1)e^{i(\omega t-kx)}, \\ w_2 &= -A\frac{\mathrm{sh}kb_1}{\mathrm{sh}kb_2}\mathrm{sh}k(z+b_2)e^{i(\omega t-kx)}。\end{aligned}\right\} \qquad (8.3-22)$$

由关系式(8.3—5)可得水平流速

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -iA\mathrm{ch}k(z-b_1)e^{i(\omega t-kx)}, \\ u_2 &= iA\frac{\mathrm{sh}kb_1}{\mathrm{sh}kb_2}\mathrm{ch}k(z+b_2)e^{i(\omega t-kx)}。\end{aligned}\right\} \qquad (8.2-23)$$

由(8.3—7)式得界面波波剖面

$$\begin{aligned} \zeta &= i\frac{A}{\omega}\frac{\mathrm{sh}kb_1}{\mathrm{sh}kb_2}\mathrm{sh}k(\zeta+b_2)e^{i(\omega t-kx)} \\ &\simeq i\frac{A}{\omega}\mathrm{sh}kb_1e^{i(\omega t-kx)}。\end{aligned} \qquad (8.3-24)$$

取(8.3—22)式、(8.3—23)式和(8.3—24)式的实部，并令 $R=-\frac{A}{\omega}\mathrm{sh}kb_1$，结果界面波动可表为

$$\zeta = R\sin(\omega t - kx) \qquad (8.3-25)$$

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= -R\frac{\omega}{\mathrm{sh}kb_1}\mathrm{ch}k(z-b_1)\sin(\omega t-kx), \\ u_2 &= R\frac{\omega}{\mathrm{sh}kb_2}\mathrm{ch}k(z+b_2)\sin(\omega t-kx), \end{aligned}\right\} \qquad (8.3-26)$$

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= -R\frac{\omega}{\mathrm{sh}kb_1}\mathrm{sh}k(z-b_1)\cos(\omega t-kx),\\ w_2 &= R\frac{\omega}{\mathrm{sh}kb_2}\mathrm{sh}k(z+b_2)\cos(\omega t-kx),\end{aligned}\right\}\quad(8.3-27)$$

其中，对上层，$0<z<b_1$，对下层，$-b_2<z<0$。由(8.3—25)—(8.3—27)式所表示的运动可以看出界面波和相应的流场有如下一些特征：铅直流速振幅在界面最大，随着离开界面的距离逐渐减小，当到自由海面和海底时变为零；水平流速振幅也是在界面附近最大并随着离开界面的距离逐渐减小，但上层和下层的水平流速方向相反；界面波剖面与下层水平流速有相同的位相，而与上层水平流速反位相。对(8.3—26)式进行铅直向积分平均可得

$$\left.\begin{aligned} \bar{u}_1 &= \frac{1}{b_1}\int_0^{b_1}udz = -\frac{R\omega}{kb_1}\sin(\omega t-kx),\\ \bar{u}_2 &= \frac{1}{b_2}\int_{-b_2}^{0}udz = \frac{R\omega}{kb_2}\sin(\omega t-kx)。\end{aligned}\right\}\quad(8.3-28)$$

可见，铅直向平均水平流速的振幅与水层厚度成反比，当 $b_2>b_1$ 时，$|\bar{u}_1|>|\bar{u}_2|$。

§8.4 考虑地转效应的界面波

对大尺度内波，地转效应是不可忽略的。本节只限于讨论地转影响在界面波中的反映。大尺度界面波动中，Coriolis 力相对于非线性惯性项要重要得多，摩擦力相对地也可以忽略，因此，描述运动的基本方程可表为

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}-fv &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x},\\ \frac{\partial v}{\partial t}+fu &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y},\\ \frac{\partial w}{\partial t} &= -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z}-g,\end{aligned}\right\}\quad(8.4-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0。\qquad (8.4-2)$$

由以上的运动方程和连续方程消 u,v 和 w,可以获得只包含压强 p 的方程。具体步骤是:第一步,x 方向的运动方程对 t 求导数,y 方向的运动方程乘以 f,然后再相加,得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+f^2 u=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_x}{\partial t}+f p_y\right)。\qquad (8.4-3)$$

第二步,x 方向的运动方程对 y 求导,连续方程对 t 求导,分别得

$$\frac{\partial u_y}{\partial t}-f v_y=-\frac{1}{\rho}p_{xy},$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+\frac{\partial v_y}{\partial t}+\frac{\partial w_z}{\partial t}=0。$$

将前一式中的 v_y 代入后一式之中,有

$$\frac{\partial u_x}{\partial t}+\frac{\partial w_z}{\partial t}+\frac{1}{f}\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{xy}}{\partial t}\right)=0。\qquad (8.4-4)$$

再将 z 方向的运动方程对 z 求导后代入上式,消去$\frac{\partial w_z}{\partial t}$,结果(8.4—4)式变成

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_{xy}}{\partial t}+f\left(\frac{\partial u_x}{\partial t}-\frac{p_{zz}}{\rho}\right)=0。\qquad (8.4-5)$$

第三步,利用(8.4—3)式和(8.4—5)式设法消去 u;将(8.4—3)式分别对 x 和 y 求导一次,得

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}+f^2 u_x=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xx}}{\partial t}+f p_{xy}\right),\qquad (8.4-6)$$

和

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}+f^2 u_y=-\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p_{xy}}{\partial t}+f p_{yy}\right)。\qquad (8.4-7)$$

将(8.4—5)式对 t 求导两次,得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^3 p_{xy}}{\partial t^3}+f\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}\right)-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(p_{zz})\right]=0,$$

$$(8.4-8)$$

再将(8.4－5)式乘以 f^2，得

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(f^2u_y)+\frac{f^2}{\rho}\frac{\partial p_{xy}}{\partial t}+f^3(\frac{\partial u_x}{\partial t}-\frac{1}{\rho}p_{xz})=0。\quad(8.4-9)$$

将(8.4.－8)式与(8.4－9)式相加，有

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}+f^2u_y)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 p_{xy}}{\partial t^2}+f^2\frac{\partial p_{xy}}{\partial t})$$

$$+f\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}+f^2u_x)-\frac{f}{\rho}(\frac{\partial^2 p_{xz}}{\partial t^2}+f^2p_{xz})=0。$$

$$(8.4-10)$$

将(8.4－6)式和(8.4－7)式分别代入上式的第三项和第一项，结果得到仅含压强 p 的微分方程

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(p_{xx}+p_{yy}+p_{zz})+f^2p_{zz}=0。\qquad(8.4-11)$$

考虑频率为 ω，x 和 y 方向波数为 k 和 l 的波动，则压强可表为

$$p=p_0(z)+P(z)e^{i(\omega t-kx-ly)},\qquad(8.4-12)$$

其中 $p_0(z)\sim z$。将(8.4－12)式代入(8.4－11)式可得内波诱导压强振幅的微分方程

$$(\omega^2-f^2)\frac{d^2P}{dz^2}-\omega^2(k^2+l^2)P=0。\qquad(8.4-13)$$

上列方程有解

$$P=A_0e^{mz}+B_0e^{-mz},\qquad(8.4-14)$$

其中，A_0、B_0 为积分常数，m 应为实数，

$$m^2=\frac{\omega^2(k^2+l^2)}{\omega^2-f^2}\qquad(8.4-15)$$

由上式知，只有 $\omega^2>f^2$，m 才可能为实数。

设 u，v，w 和 ζ 形式可表为

$$\left.\begin{aligned}\zeta &= Ze^{i(\omega t-kx-ly)},\\ u &= U(z)e^{i(\omega t-kx-ly)},\\ v &= V(z)e^{i(\omega t-kx-ly)},\\ w &= W(z)e^{i(\omega t-kx-ly)}。\end{aligned}\right\}\qquad(8.4-16)$$

将 p 和 w 的表达式代入 z 方向运动方程，得

$$i\omega W(z) = -\frac{1}{\rho}\frac{dP(z)}{dz},\qquad(8.4-17)$$

将 u,v 和 p 的表达式代入 x 和 y 方向运动方程，得

$$i\omega U(z)-fV(z) = \frac{ik}{\rho}P(z),$$

和

$$i\omega V(z) + fU(z) = \frac{il}{\rho}P(z),$$

由此解得

$$U(z) = \frac{\omega k - ifl}{\rho(\omega^2 - f^2)}P(z),\qquad(8.4-18)$$

$$V(z) = \frac{\omega l + ifk}{\rho(\omega^2 - f^2)}P(z)。\qquad(8.4-19)$$

在界面处，有 $w|_{z=\zeta}=\frac{\partial\zeta}{\partial t}$，再利用(8.4—17)式，可得

$$i\omega Z = W|_{z=\zeta} = \frac{-1}{i\omega\rho}\frac{dP}{dz}|_{z=\zeta}。\qquad(8.4-20)$$

只要将(8.4—14)式的压强振幅一般解代入(8.4—17)式，便得铅直流速振幅的一般解

$$W(z) = Ae^{mz} + Be^{-mz}。\qquad(8.4-20)$$

确定满足边界条件的铅直流速的过程与前一节的类似。利用自由海面和海底铅直流速为零的运动学边界条件，上下两层的铅直流速可表为

$$\left.\begin{aligned} W_1(z) &= C\text{sh}m(z-b_1), \\ W_2(z) &= D\text{sh}m(z+b_2), \end{aligned}\right\} \qquad (8.4-21)$$

其中 b_1 和 b_2 为上下层海水的厚度。利用界面运动学边界条件(8.3—1)和动力学边界条件[形式上类似于(8.3—12)式，可以利用基本方程(8.4—1)和(8.4—2)导出]，得 C 和 D 之间的关系

$$C\text{sh}mb_1 + D\text{sh}mb_2 = 0, \qquad (8.4-22)$$

$$C\left(\frac{\rho_1\omega^2}{m}\text{ch}mb_1 + \frac{\rho_1 g}{\omega}\text{sh}mb_1\right) - D\left(\frac{\rho_2\omega^2}{m}\text{ch}mb_2 - \frac{\rho_2 g}{\omega}\text{sh}mb_2\right) = 0。 \qquad (8.4-23)$$

欲使 C,D 有非零解，必须满足

$$\triangle \begin{vmatrix} \frac{\rho_1\omega}{m}\text{ch}mb_1 + \frac{\rho_1 g}{\omega}\text{sh}mb_1 & -\frac{\rho_2\omega}{m}\text{ch}mb_2 + \frac{\rho_2 g}{\omega}\text{sh}mb_2 \\ \text{sh}mb_1 & \text{sh}mb_2 \end{vmatrix} = 0,$$

由此导出界面波的频散关系

$$\omega^2 = \frac{gm(\rho_2-\rho_1)\text{sh}mb_1\text{sh}mb_2}{\rho_1\text{ch}mb_1\text{sh}mb_2 + \rho_2\text{ch}mb_2\text{sh}mb_1}。 \qquad (8.4-24)$$

利用(8.4—22)式，满足边界条件的铅直流速为

$$\left.\begin{aligned} W_1(z) &= C\text{sh}m(z-b_1), \\ W_2(z) &= -C\frac{\text{sh}mb_1}{\text{sh}mb_2}\text{sh}m(z+b_2)。 \end{aligned}\right\} \qquad (8.4-25)$$

反过来，再通过(8.4—17)式由 W 求得 P，它们是

$$\left.\begin{aligned} P_1(z) &= -\frac{i\rho_1\omega}{m}C\text{ch}m(z-b_1), \\ P_2(z) &= \frac{i\rho_2\omega}{m}C\frac{\text{sh}mb_1}{\text{sh}mb_2}\text{ch}m(z+b_2)。 \end{aligned}\right\} \qquad (8.4-26)$$

根据(8.4—18)—(8.4—20)式，利用 $P(z)$ 可以得到流速振幅和波剖面振幅

$$
\left.\begin{aligned}
U_1(z) &= \frac{\omega k - ifl}{\rho_1(\omega^2 - f^2)}\left[-i\frac{\rho_1\omega}{m}C\operatorname{ch}m(z-b_1)\right],\\
U_2(z) &= \frac{\omega k - ifl}{\rho_2(\omega^2 - f^2)}\left[i\frac{\rho_2\omega}{m}C\frac{\operatorname{sh}mb_1}{\operatorname{sh}mb_2}\operatorname{ch}m(z+b_2)\right],\\
V_1(z) &= \frac{\omega l + ifl}{\rho_1(\omega^2 - f^2)}\left[-i\frac{\rho_1\omega}{m}C\operatorname{ch}m(z-b_1)\right],\\
V_2(z) &= \frac{\omega l + ifk}{\rho_2(\omega^2 - f^2)}\left[i\frac{\rho_2\omega}{m}C\frac{\operatorname{sh}mb_1}{\operatorname{sh}mb_2}\operatorname{ch}m(z+b_2)\right],\\
Z &= -i\frac{C}{\omega}\operatorname{sh}m(\zeta - b_1) \simeq i\frac{C}{\omega}\operatorname{sh}mb_1。
\end{aligned}\right\}
\tag{8.4-27}
$$

如果将 x 轴取在波动传播方向上，则在形式上可令 $l=0$，从而

$$
m = \frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2 - f^2}} \tag{8.4-28}
$$

相应地，(8.4－25)和(8.4－27)式变成

$$
Z = i\frac{C}{\omega}\operatorname{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_1\right],
$$

$$
U_1(z) = -i\frac{\omega C}{\sqrt{\omega^2-f^2}}\operatorname{ch}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}(z-b_1)\right],
$$

$$
U_2(z) = i\frac{\omega C}{\sqrt{\omega^2-f^2}}\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_1\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_2\right]}\operatorname{ch}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}(z+b_2)\right],
$$

$$
V_1(z) = \frac{fC}{\sqrt{\omega^2-f^2}}\operatorname{ch}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}(z-b_1)\right],
$$

$$
V_2(z) = \frac{-fC}{\sqrt{\omega^2-f^2}}\frac{\operatorname{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_1\right]}{\operatorname{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_2\right]}\operatorname{ch}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}(z+b_2)\right],
$$

$$W_1(z) = C\mathrm{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}(z-b_1)\right],$$

$$W_2(z) = -C\frac{\mathrm{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_1\right]}{\mathrm{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_2\right]}\mathrm{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}(z+b_2)\right]。$$

令 $R=\frac{-C}{\omega}\mathrm{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_1\right]$，考虑因子 $e^{i(\omega t-kx)}$ 后取其实部，得界面波及其流速表达式

$$\left.\begin{aligned}
\zeta &= R\sin(\omega t-kx)\\
u_1 &= \frac{-\omega^2 R}{\sqrt{\omega^2-f^2}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_1\right]}\mathrm{ch}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}(z-b_1)\right]\sin(\omega t-kx),\\
u_2 &= \frac{\omega^2 R}{\sqrt{\omega^2-f^2}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_2\right]}\mathrm{ch}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}(z+b_2)\right]\sin(\omega t-kx),\\
v_1 &= \frac{f\omega R}{\sqrt{\omega^2-f^2}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_1\right]}\mathrm{ch}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}(z-b_1)\right]\cos(\omega t-kx),\\
v_2 &= \frac{-f\omega R}{\sqrt{\omega^2-f^2}\,\mathrm{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_2\right]}\mathrm{ch}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}(z+b_2)\right]\cos(\omega t-kx),\\
w_1 &= \frac{-\omega R}{\mathrm{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_1\right]}\mathrm{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}(z-b_1)\right]\cos(\omega t-kx),\\
w_2 &= \frac{\omega R}{\mathrm{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_2\right]}\mathrm{sh}\left[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}(z+b_2)\right]\cos(\omega t-kx)。
\end{aligned}\right\}$$

(8.4 — 29)

及频散关系

$$\omega = \frac{(gk/\sqrt{\omega^2-f^2})(\rho_2-\rho_1)\mathrm{sh}[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_1]\mathrm{sh}[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_2]}{\rho_1\mathrm{ch}[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_1]\mathrm{sh}[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_2]+\rho_2\mathrm{ch}[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_2]\mathrm{sh}[\frac{\omega k}{\sqrt{\omega^2-f^2}}b_1]}。\qquad (8.4-30)$$

显然，当 $f=0$ 时，解(8.4－29)式及其频散关系(8.4－30)式与解(8.3－25)－(8.3－27)式及其频散关系(8.3－18)式一致。由频散关系(8.4－30)式可以看出，对于广阔海洋中的界面波，$\omega^2>f^2$ 是其存在条件。由解(8.4－29)可以看出：地转效应产生了与波动传播方向垂直的横向流动；上下两层中的水平流动方向相反；水平流速和铅直流速振幅随着离开界面的距离而减小。

§8.5　内波对自由海面的影响及其估计

在前几节讨论中，采用了自由海面铅直流速为零的条件。实际上，这是一种近似。本节讨论内波对自由海面的影响，并对这种影响的量级作出估计。

8.5.1 小振幅内波对自由海面的影响

由(8.1－20)式知，N 为常数的小振幅内波的铅直流速一般表达式为

$$w=\frac{ik}{\sqrt{\rho_0}}[A_2e^{ilz+i(\omega t-kx)}+B_2e^{-ilz+i(\omega t-kx)}],\qquad (8.5-1)$$

其中

$$l=k\sqrt{\frac{N^2}{\omega^2}-1}。\qquad (8.5-2)$$

如果现在去掉自由海面铅直流速的零的假定，而将自由海面视为空气和海水的界面，则解(8.5－1)应该满足自由海面的运动学和动力学边界条件

$$w|_{z=0}=w_a|_{z=0},\qquad (8.5-3)$$

$$\rho_0 \frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_{z=0} - \rho_a \frac{\partial w_a}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{k^2}{\omega^2} g(\rho_0 w - \rho_a w_a)\big|_{z=0}, \quad (8.5-4)$$

以及海底运动学边界条件

$$w\big|_{z=-h} = 0。 \quad (8.5-5)$$

由于空气密度 ρ_a 远小于海水密度 ρ_0，故(8.5—4)式可近似表为

$$\frac{\partial w}{\partial z}\bigg|_{z=0} = \frac{k^2}{\omega^2} g w\bigg|_{z=0}。 \quad (8.5-6)$$

将(8.5—1)式代入(8.5—5)和(8.5—6)式，分别得到如下方程

$$A_2 e^{-ilh} + B_2 e^{ilh} = 0, \quad (8.5-7)$$

$$il(A_2 - B_2) = \frac{k^2}{\omega^2} g(A_2 + B_2)。 \quad (8.5-8)$$

由(8.5—7)式得

$$B_2 = -A_2 e^{-2ilh}, \quad (8.5-9)$$

将其代入(8.5—8)式，得

$$il(1 + e^{-2ilh}) = \frac{k^2}{\omega^2} g(1 - e^{-2ilh})。$$

两边同乘以 e^{ilh}，上式变成

$$l\cos lh = \frac{k^2}{\omega^2} g \sin lh, \quad (8.5-10)$$

由此得频散关系

$$\omega^2 = \frac{k^2}{l} g \tan lh。 \quad (8.5-11)$$

现在将(8.5—8)式改写成

$$B_2 = \frac{il - \frac{k^2}{\omega^2} g}{il + \frac{k^2}{\omega^2} g} A_2$$

将它代入(8.5—1)式后，得到

$$w = \frac{-2k}{\sqrt{\rho_0}(il + \frac{k^2}{\omega^2}g)} A_2 [l\cos lz + \frac{k^2}{\omega^2} g \sin lz] e^{i(\omega t - kx)}。$$

(8.5 — 12)

很容易验证，(8.5—12)式满足边界条件(8.5—5)和(8.5—6)。由于

$$\frac{l}{\frac{k^2}{\omega^2}g} = \frac{k\sqrt{\frac{N^2}{\omega^2}-1}}{\frac{k^2}{\omega^2}g} = \frac{C_H^2}{g/k}\sqrt{\frac{N^2}{\omega^2}-1}$$

其中，$g/k = C_S^2$ 为与内波具有相同波数的表面波波速，$C_H^2 = \frac{\omega^2}{k_2}$为内波的水平波速，且有 $C_S^2 \gg C_H^2$［见(8.3—21)式］，$N \sim 1—10^{-2}s^{-1}$，$\omega \sim 10^{-3}s^{-1}$，因此

$$l/(\frac{k^2}{\omega^2}g) \ll 1, \qquad (8.5 — 13)$$

从而铅直流速表达式中方括号内的第一项 $l\cos lz$ 相对于第二项 $\frac{k^2}{\omega^2}g\sin lz$ 可以忽略。在这种情况下，有 $w|_{z=0}=0$，即海面铅直流速为零的假定是可以接受的。并且，此时，(8.5—10)式与(8.1—22)式的第二式一致，从而铅直流速表达式(8.5—12)变成运用刚盖假定的铅直流速表达式(8.1—24)。

8.5.2 界面波对自由海面的影响

从界面波铅直流速的一般表达式

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= (A_1 e^{kz} + A_2 e^{-kz}) e^{i(\omega t - kx)}, 0 < z < b_1, \\ w_2 &= (B_1 e^{kz} + B_2 e^{-kz}) e^{i(\omega t - kx)}, -b_2 < z < 0, \end{aligned}\right\}$$

(8.5 — 14)

以及边界条件

$$海面 \qquad \frac{\partial w_1}{\partial z}\Big|_{z=b_1} = \frac{k^2}{\omega^2} g w_1 \Big|_{z=b_1}, \qquad (8.5 — 15)$$

海底 $\quad w_2|_{z=-b_2}=0,\qquad (8.5-16)$

界面 $\quad w_1|_{z=0}=w_2|_{z=0},\qquad (8.5-17)$

$$\rho_2\frac{\partial w_2}{\partial z}\bigg|_{z=0}-\rho_1\frac{\partial w_1}{\partial z}\bigg|_{z=0}=\frac{k^2}{\omega^2}g(\rho_2 w_2-\rho_1 w_1)\bigg|_{z=0}. \qquad (8.5-18)$$

确定其定解。首先利用海底边界条件(8.5—16),则(8.5—14)式的第二式可表为

$$w_2=B\text{sh}k(z+b_2)e^{i(\omega t-kx)}, \qquad (8.5-19)$$

将(8.5—14)式的第一式以及(8.5—19)式代入边界条件(8.5—15)式,(8.5—17)式和(8.5—18)式,结果有

$$A_1\left(1-\frac{k}{\omega^2}g\right)e^{kb_1}=A_2\left(1+\frac{k}{\omega^2}g\right)e^{-kb_1}, \qquad (8.5-20)$$

$$\rho_2 B\text{ch}kb_2-\rho_1(A_1-A_2)=\frac{k}{\omega^2}g[\rho_2 B\text{sh}kb_2-\rho_1(A_1+A_2)], \qquad (8.5-21)$$

$$A_1+A_2=B\text{sh}kb_2。 \qquad (8.5-22)$$

由(8.5—20)式,有

$$A_2=\frac{1-\frac{k}{\omega_2}g}{1+\frac{k}{\omega^2}g}A_1 e^{2kb_1}, \qquad (8.5-23)$$

将上式代入 w_1 的表达式,得到

$$w_1=A_1\left[1+\frac{1-\frac{k}{\omega^2}g}{1+\frac{k}{\omega^2}g}e^{2k(b_1-z)}\right]e^{kz}e^{i(\omega t-kx)}。 \qquad (8.5-24)$$

将(8.5—23)式代入(8.5—22)式,有

$$B=\left[1+\frac{1-\frac{k}{\omega^2}g}{1+\frac{k}{\omega^2}g}e^{2kb_1}\right]A_1/\mathrm{sh}kb_2, \qquad (8.5-25)$$

将其代入 w_2 的表达式(8.5—19),结果

$$w_2=A_1\left[1+\frac{1-\frac{k}{\omega^2}g}{1+\frac{k}{\omega^2}g}e^{2kb_1}\right]\frac{\mathrm{sh}k(z+b_2)}{\mathrm{sh}kb_2}e^{i(\omega t-kx)}。$$

$$(8.5-26)$$

由于$\frac{gk}{\omega^2}=\frac{g/k}{\omega^2/k^2}=\frac{C_S^2}{C_H^2}\gg 1$,因此 w_1 的表达式(8.5—24)中的方括号内之值

$$\left[1+\frac{1-\frac{k}{\omega^2}g}{1+\frac{k}{\omega^2}g}e^{2k(b_1-z)}\right]_{z=b_1}=\frac{2}{1+\frac{k}{\omega^2}g}\ll 1,$$

$$(8.5-27)$$

故自由海面处的垂直流速非常之小,$w_1|_{z=b_1}=0$ 的假定是可以接受的。

在自由海面

$$\zeta_1=\frac{w_1}{i\omega}\Big|_{z=b_1}=\frac{A_1}{i\omega}\left[1+\frac{1-\frac{k}{\omega^2}g}{1+\frac{k}{\omega^2}g}\right]e^{kb_1}e^{i(\omega t-kx)},$$

在界面处

$$\zeta_2=\frac{w_2}{i\omega}\Big|_{z=0}=\frac{A_1}{i\omega}\left[1+\frac{1-\frac{k}{\omega^2}g}{1+\frac{k}{\omega^2}g}e^{2kb_1}\right]e^{i(\omega t-kx)},$$

求两者之比值

$$\frac{\zeta_2}{\zeta_1}=\frac{w_2\big|_{z=0}}{w_1\big|_{z=b_1}}=\frac{\left[1+\dfrac{1-\dfrac{k}{\omega^2}g}{1+\dfrac{k}{\omega^2}g}e^{2kb_1}\right]}{\left[1+\dfrac{1-\dfrac{k}{\omega^2}g}{1+\dfrac{k}{\omega^2}g}\right]e^{kb_1}}$$

$$=\mathrm{ch}kb_1-\frac{k}{\omega^2}g\,\mathrm{sh}kb_1。\qquad(8.5-28)$$

由此可见$|\zeta_2|\gg|\zeta_1|$,并且两者位相相反。

第九章　风暴潮

风暴潮是由强烈的大气扰动所引起的海面异常升高的现象。风暴潮与天文潮是同时发生的，如果风暴潮正好遇上天文潮的高潮阶段，则可导致水位暴涨，危及沿岸生命和财产的安全。中外历史上有许多严重的风暴潮灾事例。

产生风暴潮的强烈大气扰动通常包括热带风暴(例如台风、飓风)，温带气旋，寒潮或冷空气。我国的北方海区(渤海和北黄海)冷空气活动频繁，由寒潮或冷空气所激发的风暴潮非常显著，台风次之；而我国南方海区则受台风影响，经常发生台风所导致的风暴潮灾。不同类型的大气扰动所引起的风暴潮特点不一样。由于热带风暴移动迅速，所产生的风暴潮有急剧的水位变化；由于温带气旋移动较慢，所引起的风暴潮的水位变化是持续的，相对地不急剧；寒潮或冷空气所激起的风暴潮也是具有水位变化持续而不太剧烈的特点。

风暴潮发生在不同类型的海区，具有不同的动力学特征。对于发生在封闭或半封闭海域的风暴潮，由于水域尺度较风场尺度小，海域中的水体几乎以整体对大气扰动进行反应；当大气扰动在广阔的海域之上移动时，由于大气扰动系统的范围小于海域的水平尺度，因而产生前进波形式的风暴潮。我国渤海和北黄海的风暴潮便是属于前一种情形。

§9.1　狭长矩形浅水海域中的定常风暴潮

风暴潮是由强烈大气扰动引起的，风应力为其主要强迫力。作用在自由海面的风应力通过铅直湍流交换将它的影响传递进入海洋内部。对于水平尺度较大但水深浅的海域，运动方程中的非线性平流项相对于铅直湍流摩擦项并不重要。例如狭长海域水平尺度 $L=500\text{km}$，铅直尺度 $D=20\text{m}$，水平特征流速 $U=2\text{m/s}$，$A_z=2\times10^{-2}\text{m}^2/\text{s}$，于是有 $\dfrac{U^2/L}{A_zU/D^2}\sim10^{-1}$，故这种情况下非线性平流项相对地可以忽略。另外，由于海域是狭长的，横向运动不显著，从而 Coriolis力可以不计。假定海水为均质不可压缩流体，则狭长浅水海域中的定常风暴潮可用如下基本方程描述

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \tag{9.1-1}$$

$$g\frac{\partial\zeta}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial z}\left[A_z(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right]。 \tag{9.1-2}$$

相应的海面边界条件

$$u\frac{\partial\zeta}{\partial x}-w=0, \tag{9.1-3}$$

$$A_z(0)\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{\tau_s}{\rho}, \tag{9.1-4}$$

和海底边界条件

$$u=0,w=0。 \tag{9.1-5}$$

对连续方程(9.1-1)从海底 $z=-h$ 到海面 $z=\zeta$ 积分，再利用边界条件(9.1—3)和(9.1—5)，得到

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0, \tag{9.1-6}$$

其中全流

$$U = \int_{-h}^{\zeta} u dz \simeq \int_{-h}^{0} u dz, \tag{9.1-7}$$

式中假定$|\zeta| \ll h$。

9.1.1 等深封闭海域中的定常风暴潮

如图 9－1 所示，等深狭长矩形封闭海域的常深度为 h，长度为 L，海域两端的 x 坐标分别为 0 和 L。设定常风沿 x 方向吹刮，风应力为一常量。由于海域封闭，于两端应满足

$$U(0) = U(L) = 0。 \tag{9.1-8}$$

由(9.1－6)式积分，再利用条件(9.1－8)，可以得到

$$U(x) = \int_{-h}^{0} u dz = 0。 \tag{9.1-9}$$

将运动方程从 z 到 0 沿 z 方向积分，并利用边界条件(9.1－4)，有

$$A_z(z) \frac{\partial u}{\partial z} = g \frac{\partial \zeta}{\partial x} z + \frac{\tau_s}{\rho}。 \tag{9.1-10}$$

对上式沿 z 方向从海底 $z=-h$ 处到任意深度 z 处进行积分，得

$$u = g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \int_{-h}^{z} \frac{t}{A_z(t)} dt + \frac{\tau_s}{\rho} \int_{-h}^{z} \frac{1}{A_z(t)} dt。 \tag{9.1-11}$$

将上式代入(9.1－9)式，于是

$$g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \int_{-h}^{0} dz \int_{-h}^{z} \frac{t}{A_z(t)} dt + \frac{\tau_s}{\rho} \int_{-h}^{0} dz \int_{-h}^{z} \frac{1}{A_z(t)} dt = 0,$$

进而获得

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{(1+m)\tau_s}{\rho g h}, \tag{9.1-12}$$

其中

$$m = -\frac{\int_{-1}^{0} dz' \int_{-1}^{z'} \frac{1}{A_z(t')} dt'}{\int_{-1}^{0} dz' \int_{-1}^{z'} \frac{t'}{A_z(t')} dt'} - 1, \tag{9.1-13}$$

$$(t', z') = (t, z)/h。$$

方程(9.1—12)对 x 积分可给出风暴潮的一般表达式

$$\zeta = \frac{(1+m)\tau_s}{\rho g h}x + C,$$

其中积分常数 C 由水体守恒确定，即由

$$\int_0^L \zeta dx = 0$$

确定，结果得

$$C = -\frac{(1+m)\tau_s}{2\rho g h}L。$$

最后有

$$\zeta = \frac{(1+m)\tau_s}{\rho g h}\left(x - \frac{L}{2}\right)。 \qquad (9.1\text{-}14)$$

此式可以描述风暴潮位的特征：水位为线性分布，风暴潮位为零的点在海域中点 $x=\frac{1}{2}L$ 处，$x=L$ 处（迎风岸）的风暴潮位最高，而 $x=0$ 处（背风岸）的最低；风暴潮位与水深成反比，与风应力成正比。

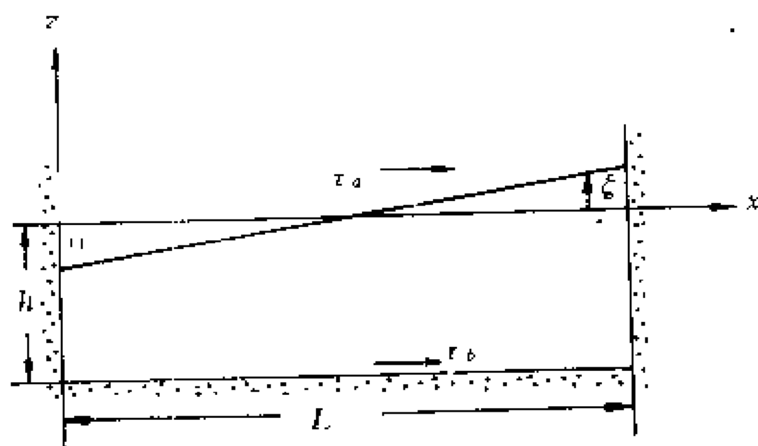


图9—1 等深狭长矩形封闭海域中的风暴潮

9.1.2 海底坡度的影响

若设水深不为常数，而是一种以如下简单 x 函数表示的形式

$$h(x) = h_0 - \alpha x \qquad (9.1\text{-}15)$$

其中坡度 α 很小，$\alpha \ll 1$。这种倾斜如图9—2 所示，是一种顺风方向的倾斜，应该对增强风暴潮位有影响。类似于前面的等深情况，经相同的步骤可以得风暴潮位坡度

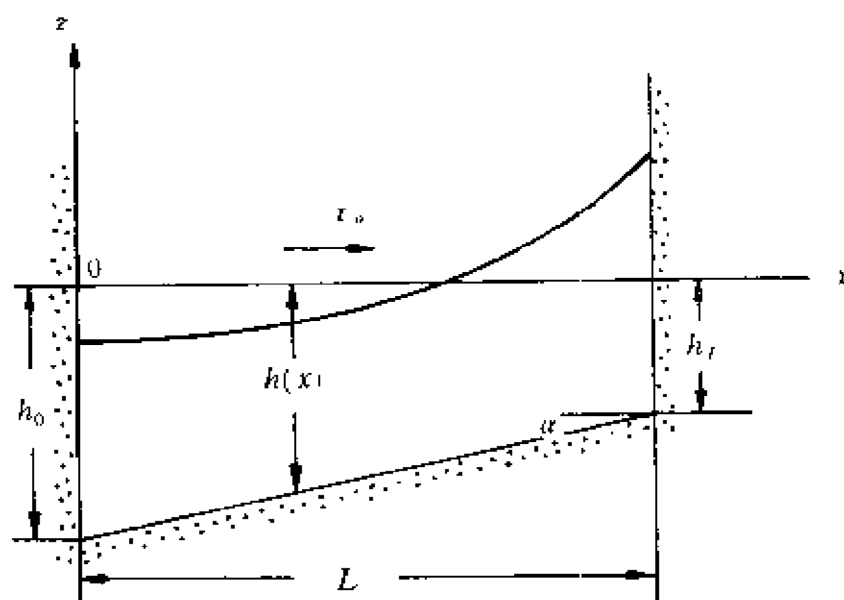


图 9—2　非等深狭长矩形封闭海中的风暴潮

$$\frac{d\zeta}{dx}=\frac{(1+m)\tau_a}{\rho g h(x)},\qquad (9.1\text{-}16)$$

其中

$$m=-\frac{\int_{-1}^{0}dz'\int_{-1}^{z'}\frac{1}{A_z(t')}dt'}{\int_{-1}^{0}dz'\int_{-1}^{z'}\frac{t'}{A_z(t')}dt'}-1\qquad (9.1\text{-}17)$$

$$(t',z')=(t,z)/h(x)。$$

将(9.1—15)式的水深表达式代入(9.1—16)式，得

$$\frac{d\zeta}{dx}=\frac{(1+m)\tau_a}{\rho g(h_0-\alpha x)}\simeq\frac{(1+m)\tau_a}{\rho g h_0}(1+\frac{\alpha}{h_0}x)。\qquad (9.1\text{-}18)$$

积分方程(9.1—18)，得

$$\zeta=\frac{(1+m)\tau_a}{\rho g h_0}(x+\frac{\alpha}{2h_0}x^2)+C,\qquad (9.1\text{-}19)$$

其中积分常数由水体守恒 $\int_0^L\zeta dx=0$ 定出

$$C = -\frac{(1+m)\tau_s L}{2\rho g h_0}\left(1+\frac{aL}{3h_0}\right)。$$

结果风暴潮位为

$$\zeta = \frac{(1+m)\tau_s}{\rho g h_0}\left[x-\frac{L}{2}+\frac{a}{2h_0}\left(x^2-\frac{L^2}{3}\right)\right]。\qquad (9.1\text{-}20)$$

显然，由于海底坡度的存在，风暴潮位的波面为曲线剖面，面不是平底情况下的直线剖面(图 9－1)，风暴潮位随 x 增长较快。当 $a=0$ 时，(9.1－20)式转化为平底情况下的(9.1－14)式

9.1.3 等深半封闭海域中的定常风暴潮

这里讨论等深狭长矩形半封闭海域中的定常风暴潮。设狭长海域的封闭端位于 $x=L$，而开端位于 $x=0$ 并与外海相通(图 9－3)。描述运动的基本方程仍为(9.1－2)和(9.1－6)，同样地得到风暴潮位

$$\zeta = \frac{(1+m)\tau_s}{\rho g h}x + C \qquad (9.1\text{-}21)$$

不过其中的积分常数 C 只能依开端 $x=0$ 处给定的边界条件确定。如果 $x=0$ 处为深海，由于深海大洋水体庞大，由风所引起的风暴潮位在 $x=0$ 处可近似认为是零，即 $\zeta(0)=0$。由此可确定出 $C=0$，于是风暴潮位表达为

$$\zeta = \frac{(1+m)\tau_s}{\rho g h}x。\qquad (9.1\text{-}22)$$

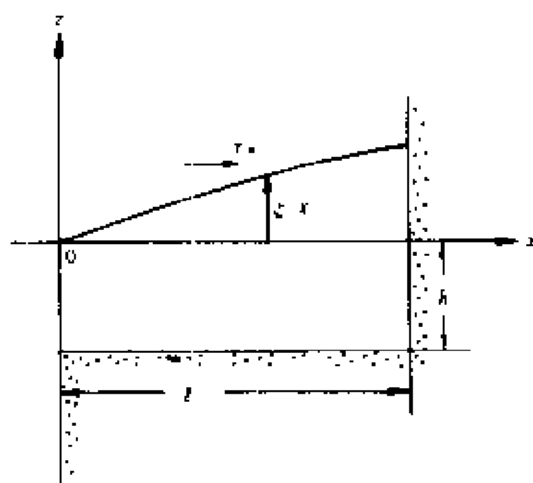


图 9－3 等深狭长矩形半封闭海域中的风暴潮

比较(9.1－22)式和(9.1－14)式可知，如果半封闭的和封闭的狭长海区具有相同的水深 h，相同的长度

L,相同的 m 值和相同的风应力 τ_s 作用,则半封闭海域中的风暴潮位值大于封闭海域中的风暴潮位值。例如在 $x=L$ 处,有

$$\zeta_{半封}(L) = \frac{(1-m)\tau_s}{\rho g h}L$$

$$\zeta_{封}(L) = \frac{(1+m)\tau_s}{\rho g h}\frac{L}{2}$$

前者为后者的两倍,因此半封闭海域中产生的风暴潮具有更大的危险性。如果 $x=0$ 处为有限深海,则在 $x=0$处存在一个非零的风暴潮位,设 $\zeta(0)=\zeta_0$,于是(9.1—21)式中的积分常数为 $C=\zeta_0$,结果风暴潮位表达为

$$\zeta = \frac{(1+m)\tau_s}{\rho g h}x + \zeta_0$$

显然,这种情形下的半封闭海域中的风暴潮则更加危险。

§9.2 狭长矩形浅水海域中的非定常风暴潮

前一节讨论了定常风暴潮,它只局限于描述风暴潮的定常分布和极值估计,但不能给出风暴潮的发生和发展的过程。对于非定常的情 形,狭长浅水海域中的运动可以描述为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{9.2-1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -g\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z}\left[A_z(z)\frac{\partial u}{\partial z}\right], \tag{9.2-2}$$

相应的海面边界条件

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + u\frac{\partial \zeta}{\partial x} - w = 0, \tag{9.2-3}$$

$$A_z(0)\ \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_s}{\rho}, \tag{9.2-4}$$

和海底边界条件

$$u = 0, w = 0。 \tag{9.2-5}$$

参照§4.4基本方程铅直向平均的运算过程，由基本方程(9.2—1)和(9.2—2)以及边界条件(9.2—3)——(9.2—5)，可得铅直向积分形式的基本方程

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \tag{9.2-6}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + gh\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\tau_s}{\rho} - \frac{\tau_b}{\rho}, \tag{9.2-7}$$

其中

$$U = \int_{-h}^{0} u dz, \tag{9.2-8}$$

$$\tau_b = \rho A_z(-h)\ \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{z=-h}。 \tag{9.2-9}$$

在§7.6中，我们曾将海底切应力(摩擦力)表示成与近底层流速二次方成比例的关系，那是因为使用了滑动底边界条件。这里，可以从理论上导出底摩擦 τ_b 的表达式。如果考虑$\frac{\partial u}{\partial t}$可以忽略的准平衡情形(冯士筰,1982)，则(9.2—2)式变成

$$g\ \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z}\left[A_z(z)\ \frac{\partial u}{\partial z}\right]。 \tag{9.2-10}$$

上式沿 z 方向从 z 到 0 积分，再利用边界条件(9.2—4)，得

$$A_z(z)\ \frac{\partial u}{\partial z} = g\ \frac{\partial \zeta}{\partial x}z + \frac{\tau_s}{\rho}, \tag{9.2-11}$$

(9.2-11)式沿 z 方向从 $-h$ 到 z 积分，并利用边界条件(9.2—5)的第一式，结果有

$$u = g\frac{\partial \zeta}{\partial x}\int_{-h}^{z}\frac{t}{A_z(t)}dt + \frac{\tau_s}{\rho}\int_{-h}^{z}\frac{1}{A_z(t)}dt, \qquad (9.2\text{-}12)$$

将上式代入(9.2—8)式，得全流表达式

$$U = g\frac{\partial \zeta}{\partial x}\int_{-h}^{0}dz\int_{-h}^{z}\frac{t}{A_z(t)}dt + \frac{\tau_s}{\rho}\int_{-h}^{0}dz\int_{-h}^{z}\frac{1}{A_z(t)}dt。 \qquad (9.2\text{-}13)$$

然后，将(9.2—11)式代入(9.2—9)式，得

$$\tau_b = -gh\rho\frac{\partial \zeta}{\partial x} + \tau_s。 \qquad (9.2\text{-}14)$$

利用(9.2—13)式消去上式中的$\frac{\partial \zeta}{\partial x}$，结果有

$$\tau_b = -m\tau_s + \rho\beta U, \qquad (9.2\text{-}15)$$

式中

$$m = -\frac{\int_{-1}^{0}dz'\int_{-1}^{z'}\frac{1}{A_z(t')}dt'}{\int_{-1}^{0}dz'\int_{-1}^{z'}\frac{t'}{A_z(t')}dt'} - 1,$$

$$\beta = -\frac{1}{h^2}\cdot\frac{1}{\int_{-1}^{0}dz'\int_{-1}^{z'}\frac{t'}{A_z(t')}dt'},$$

$$(z', t') = (z, t)/h。$$

假设方程(9.2—7)中的底摩擦 τ_b 可以用(9.2—15)式表示，于是，将(9.2—15)式代入运动方程(9.2—7)以后，得

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \beta U + gh\frac{\partial \zeta}{\partial x} = \frac{1}{\rho}(1+m)\tau_s。 \qquad (9.2\text{-}16)$$

今引进象函数 φ，使其满足连续方程(9.2—6)，于是有

$$U = \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad \zeta = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}。 \qquad (9.2-17)$$

利用(9.2—17)式的关系，(9.2—16)式变成

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \beta \frac{\partial \varphi}{\partial t} - gh \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = F, \qquad (9.2-18)$$

其中设 h 为常深度，τ_s 为常量，且

$$F = \frac{1+m}{\rho} \tau_s。 \qquad (9.2\text{-}19)$$

对于封闭的狭长海域，于海域两端应满足

$$U(0) = U(L) = 0。 \qquad (9.2\text{-}20)$$

将此条件代入(9.2—17)式的第一式，有

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{x=0} = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{x=L} = 0,$$

即 $\varphi(0,t) = \varphi(L,t) =$ 常数。但可令常数为零，因为由(9.2—17)式知，这对 U 和 ζ 并无影响。与边界条件(9.2—20)相应的边界条件为

$$\varphi(0,t) = \varphi(L,t) = 0。 \qquad (9.2\text{-}21)$$

为了给出 φ 的唯一解，除了边界条件之外，还需要初始条件。可以假定于 $t=0$ 时刻，$\zeta=0$ 和 $U=0$。由(9.2—17)的关系式可导出相应的初始条件

$$\varphi(x,0) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0。 \qquad (9.2\text{-}22)$$

现在利用边界条件和初始条件确定方程(9.2—18)的解。设其解为

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{L} x, \qquad (9.2\text{-}23)$$

显然，此解满足边界条件(9.2—21)。将(9.2—19)式展成与(9.2—23)式相似的形式

$$F = F \cdot \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{L} x, \qquad (9.2\text{-}24)$$

式中的 $\frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\cdots,n}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{L} x = 1$。将(9.2—23)和(9.2—24)式代入方程(9.2—18)，得两组方程

$$T_n''(t) + \beta T_n'(t) + gh(\frac{n\pi}{L})^2 T_n(t) = \frac{4}{n\pi}F,$$

$$n = 1,3,5\cdots\cdots \quad (9.2\text{-}25)$$

$$T_n''(t) + \beta T_n'(t) + gh(\frac{n\pi}{L})^2 T_n(t) = 0, \quad n = 2,4,6\cdots\cdots$$

$$(9.2\text{-}26)$$

相对应的初始条件由(9.2—22)可得

$$T_n(0) = T_n'(0) = 0, \quad n = 1,3,5,\cdots\cdots \quad (9.2\text{-}27)$$

$$T_n(0) = T_n'(0) = 0。n = 2,4,6\cdots\cdots \quad (9.2\text{-}28)$$

在求解方程(9.2—25)和(9.2—26)之前,需要了解一下 β 和 $gh(\frac{n\pi}{L})^2$ 的量级。一般地讲,$\beta \sim 10^{-6}—10^{-4}s^{-1}$,$gh(\frac{\pi}{L})^2 \sim 10^{-8}—10^{-6}$ s^{-2}。由此可知方程特征根为复数。方程(9.2—26)之通解为

$$T_n(t) = e^{at}(C_1\cos b_n t + C_2\sin b_n t), \quad (9.2\text{-}29)$$

其中 $n=2,4,6\cdots\cdots$,

$$\left.\begin{aligned} a &= -\frac{\beta}{2}, \\ b_n &= \sqrt{gh(\frac{n\pi}{L})^2 - (\frac{\beta}{2})^2}。\end{aligned}\right\} \quad (9.2\text{-}30)$$

利用初始条件(9.2—28)式,可以确定积分常数 $C_1=C_2=0$,因此有

$$T_n(t) = 0, \qquad n = 2,4,6\cdots\cdots。 \quad (9.2\text{-}31)$$

而方程(9.2—25)的解为

$$T_n(t) = e^{at}(A_1\cos b_n t + A_2\sin b_n t) + \frac{4F}{n\pi gh(\frac{n\pi}{L})^2}, \quad (9.2\text{-}32)$$

其中 $n=1,3,5,\cdots\cdots$。根据初始条件,可定出积分常数 $A_1=$

$\frac{4F}{n\pi gh(\frac{n\pi}{L})^2}$, $A_2 = 0$。于是满足初始条件的解表为

$$T_n(t) = \frac{4F}{n\pi gh(\frac{n\pi}{L})^2}(1 - e^{at}\cos b_n t), \quad n = 1,3,5,\cdots\cdots。$$

(9.2-33)

上式代入(9.2—23)式，再利用(9.2—19)式和(9.2—30)式，结果得

$$\varphi(x,t) = \sum_{n=1,3,5\cdots} \frac{4(1+m)\tau_s}{n\pi\rho gh(\frac{n\pi}{L})^2}(1 - e^{-\frac{\beta}{2}t}\cos b_n t)\sin\frac{n\pi}{L}x。\quad (9.2\text{-}34)$$

利用关系式(9.2—17)，可得风暴潮位表达式

$$\zeta(x,t) = -\frac{(1+m)\tau_s}{\rho gh}\cdot\frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}(1 - e^{-\frac{\beta}{2}t}\cos b_n t)\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{L}x。$$

(9.2-35)

在 $x=L$ 处（迎风岸），有

$$\zeta(L,t) = \frac{(1+m)\tau_s}{\rho gh}\cdot\frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5,\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1 - e^{-\frac{\beta}{2}t}\cos b_n t)。$$

(9.2-36)

当 $t\to\infty$ 时，利用关系式

$$x - \frac{L}{2} = -\frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos\frac{n\pi}{L}x,$$

$$1 = \frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1,3,5\cdots}^{\infty}\frac{1}{n^2},$$

(9.2—35)式和(9.2—36)式分别蜕化为

$$\zeta(x,\infty) = \frac{(1+m)\tau_s}{\rho gh}(x - \frac{L}{2}),$$

$$\zeta(L,\infty) = \frac{(1+m)\tau_a}{\rho g h}\cdot\frac{L}{2}$$

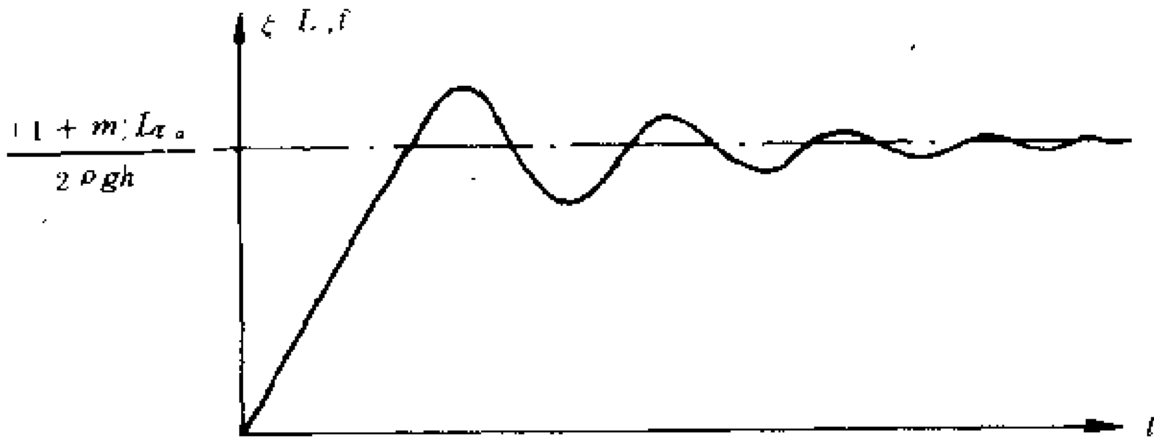


图 9—4 迎风岸的风暴潮位过程曲线示意图

此即 9.1.1 节中导出的结果(定常风暴潮)。

依(9.2—36)式,绘制了迎风岸 $X=L$ 处的风暴潮随时间变化的过程曲线,示于图 9－4 中。可以看出:风暴潮位以振荡的形式随时间渐渐趋向于定常;在非定常阶段,出现风暴潮位的极大值,这些极大值随时间逐渐减小。由此可以说明,在非定常阶段会发生比定常阶段更危险的风暴潮水位。

§9.3 考虑地转效应的风暴潮

前面讨论了狭长海域中的风暴潮,考虑了铅直湍流摩擦,但忽略了 Coriolis 力。对于宽阔的海域,就风暴潮面而论,湍流摩擦与地转效应必须同时考虑。特别是浅水情形,两者可具有相同的量级($E_z=1$),并且非线性平流项相对于地转效应可能也可以忽略不计($R_0<1$)。因此,浅水宽阔海域中的风暴渐可用下述基本方程描述:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \qquad (9.3-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x}+A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{9.3-2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-g\frac{\partial \zeta}{\partial y}+A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \tag{9.3-3}$$

其中 A_z 取为常数。海面边界条件($z=\zeta$)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+u\frac{\partial \zeta}{\partial x}+v\frac{\partial \zeta}{\partial y}-w=0, \tag{9.3-4}$$

$$\rho A_z\frac{\partial u}{\partial z}=\tau_{ax},\ \rho A_z\frac{\partial v}{\partial z}=\tau_{ay}, \tag{9.3-5}$$

海底边界条件($z=-h$)

$$u=v=w=0。 \tag{9.3-6}$$

对连续方程沿铅直向从 $z=-h$ 到 $z=0$ 积分,并利用边界条件(9.3-4)和(9.3-6),得

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0, \tag{9.3-7}$$

其中 $U=\int_{-h}^{0}u\,dz$,$V=\int_{-h}^{0}v\,dz$。如果$\frac{\partial u}{\partial t}$,$\frac{\partial v}{\partial t}$相对于运动方程中的其它项为小量,即假定风暴潮位的变化是持续的,但不急剧,于是运动方程可简化为

$$-fu+g\frac{\partial \zeta}{\partial x}=A_z\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \tag{9.3-8}$$

$$fu+g\frac{\partial \zeta}{\partial y}=A_z\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}。 \tag{9.3-9}$$

方程(9.3—7)、(9.3—8)和(9.3—9)的海面($z=0$)边界条件为

$$\rho A_z\frac{\partial u}{\partial z}=\tau_{ax},$$

$$\rho A_z\frac{\partial u}{\partial z}=\tau_{ay}, \tag{9.3-10}$$

海底($z=-h$)边界条件

$$u=0,\quad v=0。\tag{9.3-11}$$

对于有界海区，尚需岸界 C_1 边界条件

$$U\cos\alpha+V\cos\beta=0,\tag{9.3-12}$$

水界 C_2 边界条件

$$\zeta=N(C_2,t)。\tag{9.3-13}$$

对非定常风暴潮，应给定初始条件($t=0$)

$$\zeta=S(x,y)。\tag{9.3-14}$$

上列方程(9.3－7)－(9.3－14)构成了非定常准平衡的风暴潮定解问题。

孙文心，冯士筰等(1979)根据方程(9.3－7)－(9.3－14)研究了我国渤海的风暴潮。将方程(9.3－9)的两边同乘以 i，再与方程(9.3－8)相加，得到

$$A_z\frac{\partial^2(u+iv)}{\partial z^2}-if(u+iv)=g\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}+i\frac{\partial\zeta}{\partial y}\right),\tag{9.3-15}$$

令

$$W=u+iv,\tag{9.2-16}$$

$$Q=\frac{\partial\zeta}{\partial x}+i\frac{\partial\zeta}{\partial y},\tag{9.3-17}$$

于是(9.3－15)式可记为

$$A_z\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}-ifW=gQ。\tag{9.3-18}$$

利用(9.3－16)式，边界条件(9.3－10)和(9.3－11)相应地可分别表为

$$\rho A_z\frac{\partial W}{\partial z}\Big|_{z=0}=\tau_s,\tag{9.3-19}$$

$$W|_{z=-h}=0,\tag{9.3-20}$$

其中 $\tau_s=\tau_{sx}+i\tau_{sy}$。由此可得解

$$W = \frac{\tau_s}{k\rho A_z} \cdot \frac{\mathrm{sh}k(z+h)}{\mathrm{ch}(kh)} + \frac{gQ}{k^2 A_z}\left[\frac{\mathrm{ch}(kz)}{\mathrm{ch}(kh)} - 1\right], \quad (9.3\text{-}21)$$

其中 $k=(1+i)/\sqrt{2A_z/f}$。将(9.3—21)式沿 z 方向从海底到海面积分，然后代入连续方程(9.3—7)，即可得

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t} = \frac{g}{A_z}A_R\nabla^2\zeta + \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{A_z}A_R\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g}{A_z}A_I\right)\right]\frac{\partial\zeta}{\partial x}$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{g}{A_z}A_R\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{g}{A_z}A_I\right)\right]\frac{\partial\zeta}{\partial y} + F(x,y,t),$$

(9.3-22)

式中 $F(x,y,t) = \frac{1}{\rho A_z}\left\{B_R\left(\frac{\partial\tau_{sx}}{\partial x} + \frac{\partial\tau_{sy}}{\partial y}\right) - B_I\left(\frac{\partial\tau_{sy}}{\partial x}\right.\right.$

$$\left.\left. - \frac{\partial\tau_{sx}}{\partial y}\right)\right\} + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B_R}{\rho A_z}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B_I}{\rho A_z}\right)\right\}\tau_{sx} +$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{B_R}{\rho A_z}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{B_I}{\rho A_z}\right)\right\}\tau_{sy},$$

$$(A_R, B_R) = (R_e[A], R_e[B]),$$

$$(A_I, B_I) = (I_m[A], I_m[B]),$$

$$A = \frac{1}{k^2}\left[h - \frac{1}{k}\mathrm{th}(kh)\right], B = \frac{1}{k^2}\left[\mathrm{sech}(kh) - 1\right]。$$

求解方程(9.3—22)的岸界 C_1 的边界条件变为

$$A_R\frac{\partial\zeta}{\partial n} + A_I\frac{\partial\zeta}{\partial s} + \frac{B_R}{\rho g}\tau_{sn} + \frac{B_I}{\rho g}\tau_{ss} = 0, \quad (9.3\text{-}23)$$

水界 C_2 的边界条件和初始条件仍分别为(9.3—13)式和(9,3—14)式。其中(n,s)组成岸界切线—法线右手自然坐标系。由此可知，由(9.3—22)，(9.3—23)，(9.3—13)和(9.3—14)式，能够确定具体海区具体情况下的风暴潮潮位 ζ，然后由(9.3—21)式计算风暴潮流 u 和 v。

针对渤海的几何形状，采用 $N(C_2, 0)=0, S(x,y)=0, f=$

$2\omega\sin 40°$，$A_z = 3\times10^{-2}\mathrm{m^2/s}$，以及风应力场的四种分布

1. $\tau_{sx} = -\tau_{NE} = -9.25\sin[\frac{2\pi}{48}(t-21)]$，

$$(21\text{时} \leqslant t \leqslant 45\text{时})$$

$\tau_{sy} = \tau_{SE} = 3.2\sin(\frac{2\pi}{96}t)$，　　$(0 \leqslant t \leqslant 48\quad)$

2. $\tau_{sx} = -9.25\sin(\frac{2\pi}{48}t)$，　　$(0 \leqslant t \leqslant 24)$

$\tau_{sy} = 0$，

3. $\tau_{sx} = 0$，

$\tau_{sy} = 3.2\sin(\frac{2\pi}{96}t)$，　　$(0 \leqslant t \leqslant 48)$

4. $\tau_{sx} = -9.25$，　　$(0 \leqslant t \leqslant \infty)$

$\tau_{sy} = 0$。

他们选用了 oxy 坐标系中的 ox 轴指向东北，oy 轴指向西北。进行了数值计算，依据数值绘制了风暴潮位和潮流的时空分布图。本节只选用了作者们的部分图，示于图 9－5　图 9－6　和 9－7　之中。图 9－5 是第一种风场下从起风时刻开始起算的第 6，第 15，第 24，第 33，第 39，第 45，第 51 和第 57 小时的风暴潮位等值线分布图，可以看出等值线随时间作逆时针旋转。图 9－6 是第一种风场下与图 9－5 中时刻相对应的风暴流场分布，流向随时间同样地作逆时针方向旋转。这种逆时针旋转是考虑地转效应的结果。由图 9－7 还可以发现，由于地转效应，风暴潮流的铅直分布构成了一种螺旋，和风海流和三维潮流的铅直结构相似。

§9.4　大洋风暴潮的生成和传播

起源于大洋的风暴系统的范围小于大洋，因此所产生的风暴

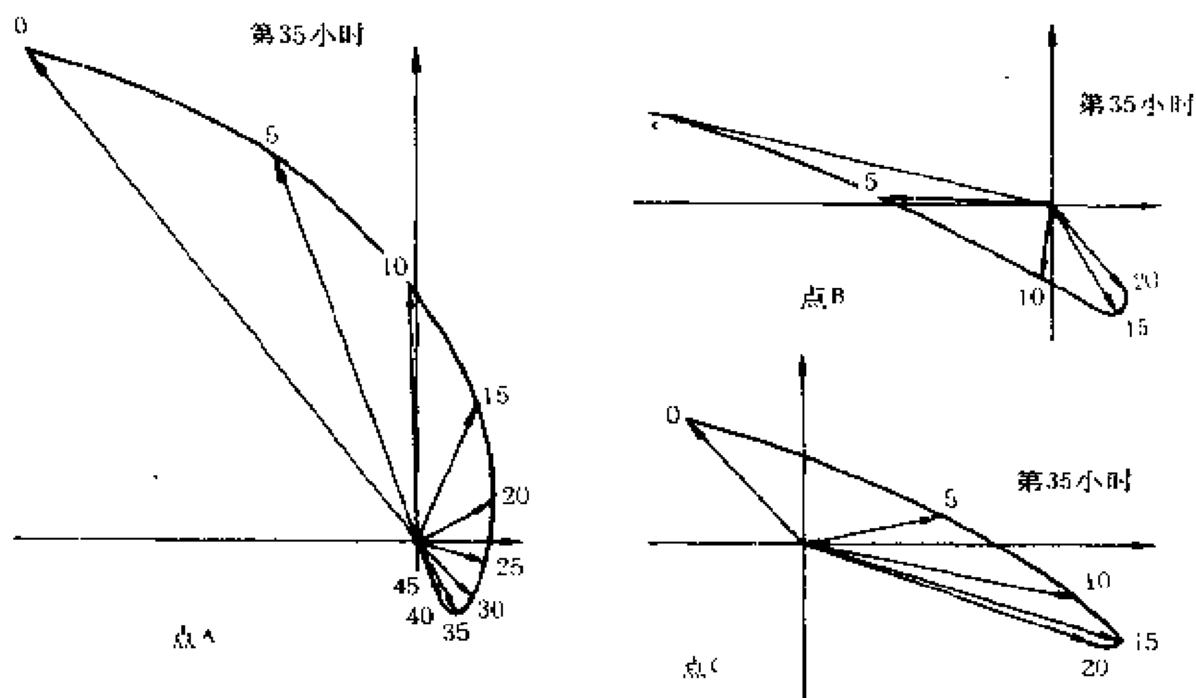


图 9－7　第一种风场下三个地点的流螺旋
(孙文心等，1979)

潮具有前进波动的特征。由于运动的大尺度，非线性平流项相对于 Coriolis 力可以忽略($R_0<1$)；由于大洋风暴潮起因于风应力和大气压强分布不均的作用，所以其运动与风海流类似，主要集中在海面附近的 Ekman 层内，从面大洋可视为等深大洋，并且海底摩擦力可视为零；由于运动的水平尺度远大于铅直尺度，故而水平湍流粘滞力可以忽略($E_l<E_z$)；由于风暴系统所在海面的气压分布不均，故大气压强不能视为常数；风暴潮位相对于大洋深度可以忽略，因此有 $\zeta+h\simeq h$。基于这些考虑，描述大洋风暴潮运动的基本方程可由方程组(4.5－37)进行简化并加上大气压强梯度项得到，即

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+h\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)=0, \qquad (9.4\text{-}1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-g\frac{\partial \zeta}{\partial x}+\frac{\tau_{sx}}{\rho h}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial x}, \tag{9.4-2}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-g\frac{\partial \zeta}{\partial y}+\frac{\tau_{sy}}{\rho h}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p_a}{\partial y}, \tag{9.4-3}$$

其中 u,v 为铅直向平均流速，大洋深度 h 为常量，p_a 为大气压强，f 为常量。

下面由方程(9.4－1)——(9.4－3)消去 u 和 v，求出 ζ 的微分方程。为此，作如下的推导。将连续方程(9.4－1)对 t 求导，有

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}+h\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right]=0, \tag{9.4-4}$$

(9.4－2)式和(9.4－3)式分别对 x 和 y 求导，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x}&=f\frac{\partial v}{\partial x}-g\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{1}{\rho h}\frac{\partial \tau_{sx}}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t\partial y}&=-f\frac{\partial u}{\partial y}-g\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}+\frac{1}{\rho h}\frac{\partial \tau_{sy}}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p_a}{\partial y^2},\end{aligned}\right\} \tag{9.4-5}$$

将(9.4－5)式代入(9.4－4)式，结果导出

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2}-fh\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)&=gh\left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2}\right)-\\ \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial \tau_{sx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{sy}}{\partial y}\right)&+\frac{h}{\rho}\left(\frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p_a}{\partial y^2}\right)。\end{aligned} \tag{9.4-6}$$

上式再对 t 求导一次，变成

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 \zeta}{\partial t^3}-fh\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)&=gh\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\left(\frac{\partial \zeta}{\partial t}\right)\\ -\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \tau_{sx}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{sy}}{\partial y}\right)&+\frac{h}{\rho}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p_a}{\partial y^2}\right),\end{aligned} \tag{9.4-7}$$

将(9.4－2)式和(9.4－3)式分别对 y 和 x 求导，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial y}&=f\frac{\partial v}{\partial y}-g\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\partial y}+\frac{1}{\rho h}\frac{\partial \tau_{sx}}{\partial y}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p_a}{\partial x\partial y},\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t\partial x}&=-f\frac{\partial u}{\partial x}-g\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x\partial y}+\frac{1}{\rho h}\frac{\partial \tau_{sy}}{\partial x}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 p_a}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\} \tag{9.4-8}$$

由(9.4—1),(9.4—7)和(9.4—8)式消去 u 和 v,最后导出 ζ 满足的方程

$$\frac{\partial^3 \zeta}{\partial t^3} + f^2 \frac{\partial \zeta}{\partial t} - gh\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial F}{\partial t}, \qquad (9.4\text{-}9)$$

其中

$$F = \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial \tau_{ax}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{ax}}{\partial y}\right) + \frac{1}{\rho} f \int_0^t \left(\frac{\partial \tau_{ax}}{\partial y} - \frac{\partial \tau_{ay}}{\partial x}\right) dt$$

$$- \frac{1}{\rho} h\left(\frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p_a}{\partial y^2}\right)。 \qquad (9.4\text{-}10)$$

求解方程(9.4—9)的解析解是比较困难的,但对一些简单情况可以获得解析解。首先讨论一个无限长的沟渠,给出大气扰动风暴潮的发生和传播规律。对这种海洋,略去地转效应。这相当于将地转效应只理解为起了类似于 Kelvin 波那样的作用,略去它并不影响风暴潮的主要传播规律。鉴于这种考虑,微分方程(9.4—9)便可简化为

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} = f(x,t) \qquad (9.4\text{-}11)$$

其中

$$c^2 = gh \qquad (9.4\text{-}12)$$

$$f(x,t) = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \tau_{ax}}{\partial x} + \frac{1}{\rho} h \frac{\partial^2 p_a}{\partial x^2}。 \qquad (9.3\text{-}13)$$

令

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}(x - st) = \frac{1}{\rho c^2} \int \tau_{ax} dx - \frac{p_a}{\rho g}, \qquad (9.4\text{-}14)$$

其中 s 为风暴沿 x 方向的移行速度。于是,(9.4—13)式可表为

$$f(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x^2}, \qquad (9.4\text{-}15)$$

(9.4-11)式可表为

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 \bar{\zeta}}{\partial x^2}。 \tag{9.4-16}$$

设运动由静止开始，即 $t=0$ 时，$\zeta=0, u=0$。由连续方程(9.4－4)知，$u=0$，又没有横向运动，必有初始时刻的$\frac{\partial \zeta}{\partial t}=0$。因此求解方程(9.4－16)的初始条件为

$$\zeta = \frac{\partial \zeta}{\partial t} = 0, (t = 0) \tag{9.4-17}$$

由(9.4－16)和(9.4－17)式，得满足初始条件的解

$$\zeta(x,t) = \frac{1}{1-(\frac{s}{c})^2}[\bar{\zeta}(x - st) - \frac{1}{2}(1 + \frac{s}{c})\bar{\zeta}(x - ct) - \frac{1}{2}(1 - \frac{s}{c})\bar{\zeta}(x + ct)]。 \tag{9.4-18}$$

此解描述了等深无限长沟渠式大洋中风暴潮。可以看出：风暴在原来静止的沟渠大洋中引起的风暴潮包括三列波，第一列是以风暴移动速度 s 随风暴一同沿正 x 方向移行的强迫波动，第二列与第三列以重力长波波速 c 分别沿正 x 方向和负 x 方向传播的自由波动；在大洋里，由于 $c \gg s$，因此自由波动传播快于强迫波动，从而与风暴移行方向相同的自由波动先于风暴到达沿岸，这便是风暴来临之前的先兆波；当先兆波到达沿岸时，如果当地水深所对应的自由波速 c 仍大于产生它的风暴移行速度 s，则先兆波表现为海而降低，反之，则表现为海面升高。另外，当风暴的移行速度 s 与当地的重力长波波速 c 相近的时候，出现共振现象。因为当 $s=c$ 时，表达式(9.4－18)为不定式，$\frac{0}{0}$型，此时解变成

$$\zeta_r = \frac{ct}{2} \bar{\zeta}'(c - ct) + \frac{1}{4}[\bar{\zeta}(x - ct) - \bar{\zeta}(x + ct)]。 \tag{9.4-19}$$

显然，当时间增加时，$s=c$ 时的风暴潮位 ζ_r 直线上升，当时间足够长时，(9.4－19)式中的后两项与第一项相比可以忽略，于是有

$$\zeta_{t\to\infty} \simeq \frac{ct}{2}\bar{\zeta}'(x-ct)。\qquad (9.4\text{-}20)$$

图 9－8 是日本大版气象站记录的一次风暴潮随时间变化的过程曲线，有人认为是共振引起的(Welander，1961)。该实例是(9.4－20)式所描述的共振现象的一个粗略定性验证：记录的前一段时间，风暴潮位几乎是直线增高。Proudman(1953)提供了另一个风暴潮共振的例子：1929 年 7 月 20 日，一个相当大的风暴潮孤立波袭击了英国的 Sussex。该波由南向北，以每小时 65 公里的速度奔向英吉利海峡。依当时的静压效应计算，增水仅应为 1.5cm，当然无法依此做出解释。但由于风暴移行速度 $s=65\text{km/hr}$，相当于水深 33m 所对应的重力长波波速 c，而英吉利海峡到 Sussex 之间的平均水深十分接近 33m，故经研究认为该大波是可能由于 $s\simeq c$ 时产生共振引起的。

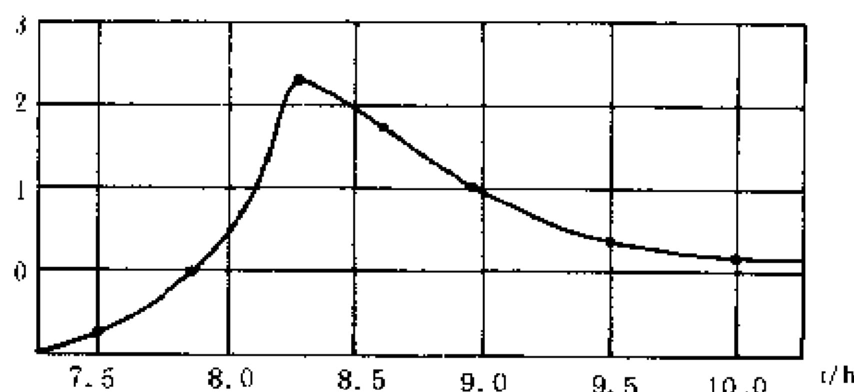


图 9－8　大版的一次风暴潮过程曲线

其次，如果考虑大洋为无界的，采用 f－平面近似，讨论自由波动远离风暴之后的情形。此时，可忽略摩擦和大气压强变化，相应地方程(9.4－9)变成

$$\frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2}+f^2\zeta-gh\left(\frac{\partial^2\zeta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\zeta}{\partial y^2}\right)=0。\qquad (9.4\text{-}21)$$

风暴潮可视为许许多多组成波构成，由于问题是线性的，可以只考察其中一个组成波，设

$$\zeta=R\cos(kx+ly-\omega t),\qquad (9.4\text{-}22)$$

将其代入(9.4—21)式,得频散关系

$$\omega^2 = f^2 + gh(k^2 + l^2)。 \tag{9.4-23}$$

显然,此关系即为7.5.1节中的Sverdurp波的频散关系。由此关系可知,组成波为一系列频率不同、波数不等的Sverdrup波之和。但不存在$\omega^2 \leqslant f^2$的组成波。这些组成波的特性已在7.5.1中做过讨论。

最后,假设等深大洋存在一条无限长的垂直岸壁,取x轴与平均海平面和岸壁的交线一致。今讨论$y>0$的平面。设自由长波平行于岸传播,它的组成波为

$$\zeta = Z(y)\cos(kx - \omega t), \tag{9.4-24}$$

将其代入方程(9.4—21),得$Z(y)$的微分方程

$$Z''(y) - m^2 Z(y) = 0, \tag{9.4-25}$$

式中

$$m^2 = k^2 + \frac{f^2 - \omega^2}{gh}。 \tag{9.4-26}$$

(9.4—25)式之解为

$$Z(y) = A_1 e^{-my} + A_2 e^{my},$$

考虑到解的有界性,$A_2 \equiv 0$,于是由(9.4—24)可得

$$\zeta = A_1 e^{-my}\cos(kx - \omega t)。 \tag{9.4-27}$$

由频散关系(9.4—26)和有界解(9.4—27)来看,此种组成波即为7.5.3节中讨论过的Kelvin波。

§9.5 大陆架上的风暴潮

当风暴潮由远洋到达大陆架缓坡时,由于水深逐渐变浅,因而其能量一方面逐渐集中,另一方面则受底摩擦而逐渐消耗。对风暴潮的自由波列来说,由于它先于风暴到达而没有能量补充,底摩擦的消耗多于能量集中,结果形成振幅不大、变化缓慢的先兆波;对

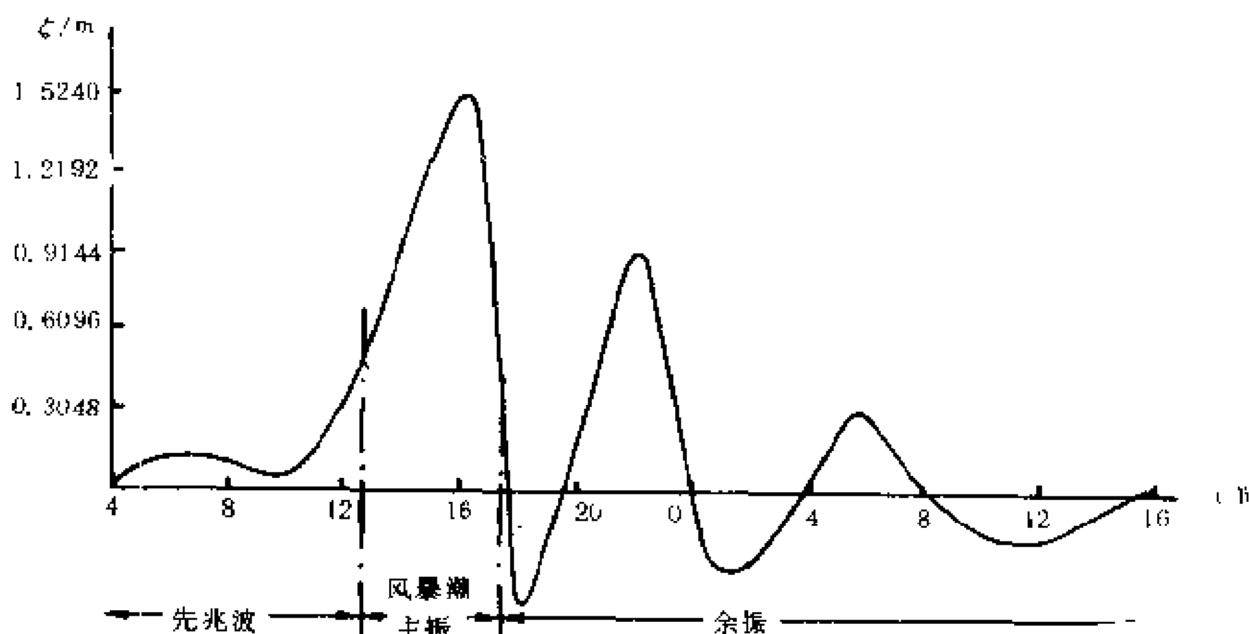


图 9—9　美国大西洋城 1944 年 9 月 14 ——15 日风暴潮过程曲线

于伴随着风暴而至的强迫波，尽管受底摩擦影响，但凭借着强大风暴的能量，具有异常大的水位升高，能造成巨大灾害。当风暴过境之后，依然存在着一种波动，其显著部分仅局限于离岸一个波长的范围内，故称之为边缘波。因此，在大陆架上发生的风暴潮可分为三个阶段：第一阶段为先兆阶段，可以观测到先兆波所引起的海面微微降低或升高；第二阶段为主振阶段，可以观测强迫波引起的异常水位升高；第三阶段为余振阶段，能观测到海面相当显著的升降。

图 9—9 是美国大西洋城 1944 年 9 月 14 日—15 日的风暴潮位过程曲线。可以看出，主振阶段可以造成巨大灾害，而余振阶段也是很危险的，这是因为余振水位如果与天之潮高潮相遇，可能形成实际水位超出该地的警戒水位，从面再次酿成灾害。

本节主要讨论大陆架上风暴过境时的风暴潮和风暴过境后的边缘波。

9.5.1 深转风暴潮

大陆架上风暴过境时的风暴潮是极其复杂的，完全的理论在求解上将遇到难以克服的困难。Freeman 和 Bear 等(1957)提出了一种简单的风暴潮理论，他们称之为“深转风暴潮”。冯士筰(1978)对深转风暴潮进行了更精确的论证，它是实际情形的一个良好的初步近似。

若不考虑大陆架上的细微结构，可将其抽象成海岸为直线、等深线与海岸线平行的理想海域。如图 9－10 所示，设 oxy 平面与平均海面重合，x 轴与直线海岸一致，y 轴指向外海为正。理想化大陆架上的深转风暴潮的基本方程可由忽略非线性平流项的铅直向平均基本方程简化而来。据(4.5－37)式知，铅直向平均方程组为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial[(h+\zeta)u]}{\partial x}+\frac{\partial[(h+\zeta)v]}{\partial y}=0 \quad (9.5-1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}-fv=-g\frac{\partial\zeta}{\partial x}+\frac{\tau_{ax}}{\rho(h+\zeta)}-\bar{k}u, \quad (9.5-2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t}+fu=-g\frac{\partial\zeta}{\partial y}+\frac{\tau_{ay}}{\rho(h+\zeta)}-\bar{k}v, \quad (9.5-3)$$

其中 u、v 为铅直向平均流速分量，$\bar{k}u$ 和 $\bar{k}v$ 为 §7.6 节中讨论过的摩擦项，而 $\bar{k}=\frac{k'}{h+\zeta}$，$k'$ 为将底摩擦表示成与流速一次方成比例的比例系数。设大陆架宽度以 l 表示，风暴所影响的范围在 x 方向为 L。l 和 L 的特征尺度可分别取为 50km 和 1000km。由连续方程知，因为 $L\gg 1$，故 $u\gg v$，即风暴潮流基本上沿等深线方向流动，这便是 Freeman 他们命名深转风暴潮的原因。据此，运动方程中的与 v 有关的项可以略去，再引进全流

$$U=(h+\zeta)u,\quad V=(h+\zeta)v, \quad (9.5-4)$$

于是，描述深转风暴潮的基本方程可表为

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0, \tag{9.5-5}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\tau_{ax}}{\rho} - \bar{k}U, \tag{9.5-6}$$

$$fU = -gh\frac{\partial \zeta}{\partial y} + \frac{\tau_{ax}}{\rho}。 \tag{9.5-7}$$

设水深分布如图 9－11 所示，为

$$h = h_0 + ay, \tag{9.5-8}$$

风应力为一常数 τ_0，它的 x 和 y 分量为

$$\tau_{ax} = \tau_0\cos\theta, \quad \tau_{ay} = \tau_0\sin\theta, \tag{9.5-9}$$

其中 θ 为风应力与 x 轴之交角。大陆架外缘，边界条件可取为

$$\zeta = 0, \quad (y = l) \tag{9.5-10}$$

初始条件

$$\zeta = U = 0。 \quad (t = 0) \tag{9.5-11}$$

将(9.5－9)式的第一式代入(9.5－6)式，得

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \bar{k}U = \frac{\tau_0}{\rho}\cos\theta$$

其通解为

$$U = \frac{\tau_0\cos\theta}{\rho\bar{k}}(1 - e^{-\bar{k}t}) + C,$$

式中积分常数 C 由初始条件(9.5－11)得 $C=0$，则得风暴潮全流

$$U = \frac{\tau_0\cos\theta}{\rho\bar{k}}(1 - e^{-\bar{k}t}),$$

将上式代入(9.5－7)式，并利用(9.5－8)式的水深分布，经积分，再利用边界条件，得风暴潮位表达式

$$\zeta = \frac{\tau_0\sin\theta}{\rho g a}\left[1 - \frac{f}{\bar{k}}\mathrm{ctg}\theta(1 - e^{-\bar{k}t})\right]\ln\frac{h_0 + ay}{h_0 + al}。 \tag{9.5-13}$$

由(9.5－12)式和(9.5－13)式知，风暴潮位与风暴潮流同时达到定常状态。定常时岸边的风暴潮位为

$$\zeta(0,\infty)=\frac{\tau_0}{\rho g\alpha}[\sin\theta-\frac{f}{\tilde{k}}\cos\theta]\ln(h_0/d),\tag{9.5-14}$$

其中 $d=h_0+\alpha l$。对于确定的大陆架底形，不同的风应力方向将产生不同高度的岸边增水。设某一方向 θ_0 可产生最大的增水，故此方向是“危险风向”。利用 $\frac{d\zeta(0,\infty)}{d\theta}=0$，确定出危险风向的关系式

$$\tan\theta_0=-\tilde{k}/f。\tag{9.5-15}$$

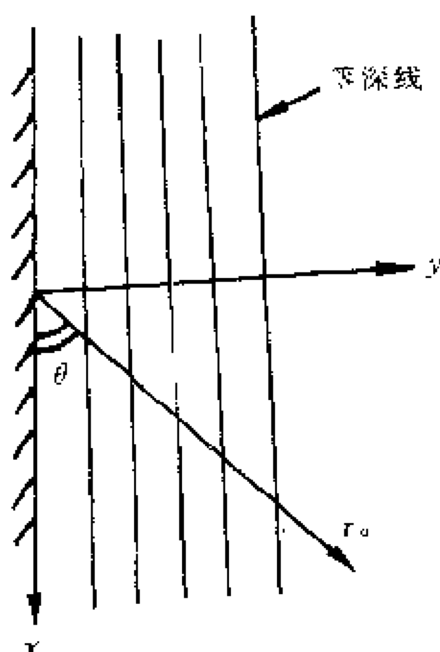


图 9－10 大陆架平面图

由此可见，对于低纬度，$f\simeq0$，相应地有 $\theta_0\simeq-\frac{\pi}{2}$，即向岸风向为最危险风向；对于水深较深的海域，$\tilde{k}=\frac{k'}{h+\zeta}\simeq0$，相应地 $\theta_0=0$，即沿岸风向为最危险风向；当海域由深逐渐变浅时，危险风向由 $\theta_0=0$ 逐渐向 $\theta_0=-\frac{\pi}{2}$ 转变。

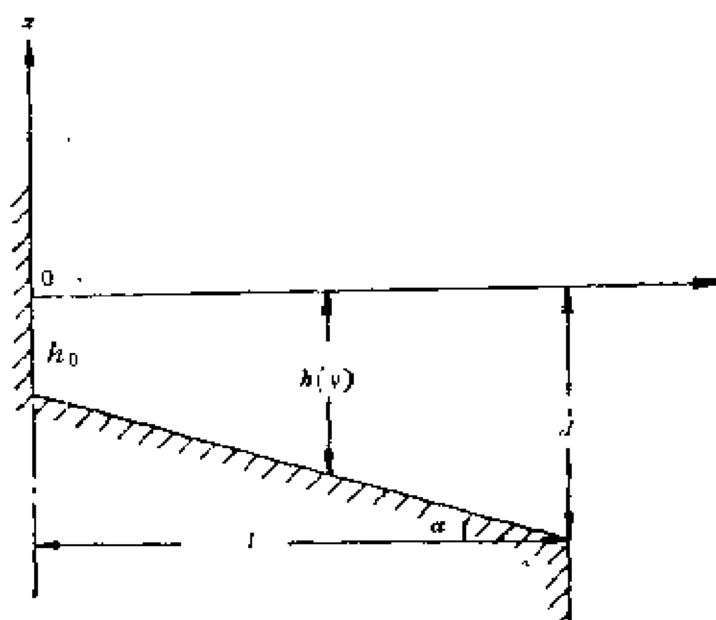


图 9－11 常底坡的大陆架

Freeman 和 Bear 等利用深转风暴潮理论回报了两次风暴潮过

程，其中由命名为 Baker 的飓风所产生的风暴潮过程曲线与理论计算结果相当一致，而由命名为 Edna 的飓风所引起的大西洋城的那一次风暴潮过程曲线与理论计算结果相比，前一段时间，两者相当吻合，但后一段时间，实际观测与理论结果相比多了一个波动（如图 9—12 所示）。这是因为 Edna 的路径是沿岸由南向北的，因此推测可能是由于“边缘波”所引起的。

9.5.2 边缘波

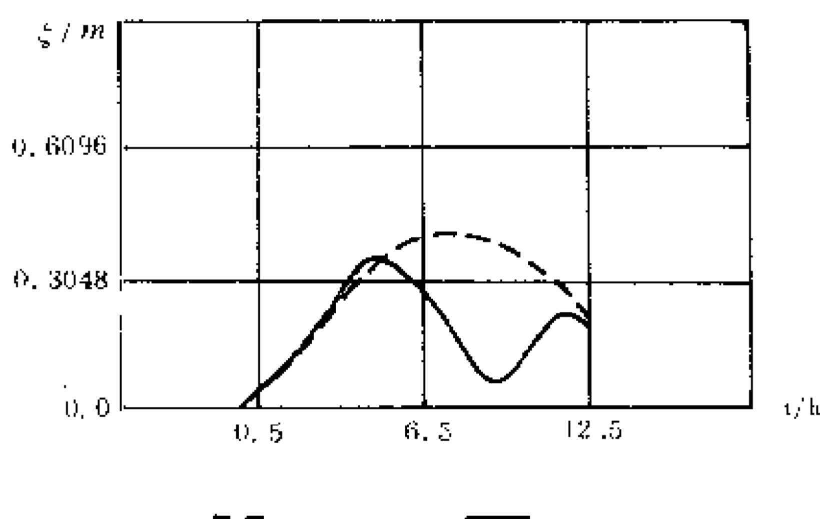


图 9—12 用深转风暴潮理论预报大西洋城的一次风暴潮的过程曲线与观测曲线的比较

(Freeman 和 Bear, 1957)

风暴过境之后，大陆架上仍然存在一种波动，这就是平行于岸传播、其显著部分位于沿岸附近的边缘波。有关边缘波的理论研究，最早始于 Stokes（1846）。他从流体动力学基本方程出发，导出了一类特殊的波动解，就是我们现在讨论的边缘波。但是，直到二十世纪六十年代，Munk 和 Snodgrass 等(1956)才在分析大陆架上的观测资料中证实了边缘波在自然界中的存在，因而边缘波的研究开始受到重视。不久，Reid(1958)改进了 Stokes 的研究，考虑了地转的影响，其解较接近于大陆架上观测到的边缘波。冯士筰(1979)注意到大陆架浅水区域底摩擦所引起的明显的能量耗散现象，在基本方程中不仅考虑 Coriolis 力项，而且也考虑了底摩擦，使问题得到了较全面的描述。

下面讨论中，仍取 oxy 平面与平均海平面一致，x 轴与直线海

岸重合，y 轴指向外海为正(见图 9－10)。设水深分布为如下线性函数

$$h(y)=\alpha y \qquad (0\leqslant y<\infty), \tag{9.5-16}$$

其中 α 假定为小量。对于自由边缘波，描述它的基本方程可由(9.5－1)—(9.5－3)式中略去风应力项然后引进全流 U 和 V[见(9.5－4)式]后得到

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0, \tag{9.5-17}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}-fV=-gh\frac{\partial\zeta}{\partial x}-\tilde{k}U, \tag{9.5-18}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}+fU=-gh\frac{\partial\zeta}{\partial y}-\tilde{k}V。 \tag{9.5-19}$$

讨论从 Stokes 边缘波开始，因为尽管它忽略了地转效应和摩擦影响，但其解反映了实际边缘波的主要特征，其显著部分位于沿岸附近，并且求解过程比较简单。对 Stokes 边缘波有了认识之后，再扼要地讨论一下地转和底摩擦的影响。

若暂不考虑 Coriolis 力和底摩擦力，基本方程(9.5－17)—(9.5－19)化简为

$$\frac{\partial\zeta}{\partial t}+\frac{\partial U}{\partial x}+\frac{\partial V}{\partial y}=0, \tag{9.5-20}$$

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-gh\frac{\partial\zeta}{\partial x}, \tag{9.5-21}$$

$$\frac{\partial V}{\partial t}=-gh\frac{\partial\zeta}{\partial y}, \tag{9.5-22}$$

相应的边界条件

$$y=0\text{ 处} \qquad \zeta \quad \text{有界}, \tag{9.5-23}$$

$$U = 0, \tag{9.5-24}$$

$$y \to \infty \qquad \zeta, U, V, \to 0。 \tag{9.5-25}$$

因为研究波动，故解可表为如下形式

$$\left.\begin{aligned} \zeta &= H(y)e^{i(kx-\omega t)}, \\ U &= X(y)e^{i(kx-\omega t)}, \\ V &= Y(y)e^{i(kx-\omega t)}。 \end{aligned}\right\} \tag{9.5-26}$$

将(9.5－26)式和(9.5－16)式代入运动方程(9.5－21)和(9.5－22)，得

$$X = \frac{kgay}{\omega}H, \tag{9.5-27}$$

$$Y = \frac{-igay}{\omega}\frac{dH}{dy}。 \tag{9.5-28}$$

由连续方程(9.5－20)和以上两式，可导出

$$\frac{d}{dy}\left(y\frac{dH}{dy}\right) + \left(\frac{\omega^2}{ga} - k^2 y\right)H = 0。 \tag{9.5-29}$$

为了求解方程(9.5－29)，先作置换

$$\widetilde{H} = He^{-\tilde{y}/2}, \; \tilde{y} = 2ky, \tag{9.5-30}$$

于是(9.5－29)式变成

$$\tilde{y}\frac{d^2\widetilde{H}}{d\tilde{y}^2} + (1+\tilde{y})\frac{d\widetilde{H}}{d\tilde{y}} + \left(\frac{\omega^2}{2kga} + \frac{1}{2}\right)\widetilde{H} = 0, \tag{9.5-31}$$

此方程之解为

$$\widetilde{H} = A_n e^{-\tilde{y}} L_n(\tilde{y}), \tag{9.5-32}$$

其中 n 之值满足

$$n + 1 = \frac{\omega^2}{2kga} + \frac{1}{2}, \qquad n = 0, 1, 2\cdots\cdots$$

即

$$n = \frac{\omega_n^2}{2kga} - \frac{1}{2}; \tag{9.5-33}$$

L_n 为 Laguerre 多项式

$$L_n(\bar{y}) = 1-\binom{n}{1}\bar{y}/1! + \binom{n}{2}\bar{y}^2/2! - \cdots + (-1)^n\binom{n}{n}\bar{y}^n/n!。 \qquad (9.5\text{-}34)$$

将(9.5－30)式代入(9.5－32)式，求得

$$H = A_n e^{-ky} L_n(2ky), \qquad (9.5\text{-}35)$$

利用(9.5－27)和(9.5－28)式，有

$$X = \frac{kgay}{\omega_n} A_n e^{-ky} L_n(2ky), \qquad (9.5\text{-}36)$$

$$Y = \frac{ikga}{\omega_n} A_n e^{-ky}\left\{ y L_n(2ky) - \frac{n}{k}\left[L_n(2ky) - nL_{n-1}(2ky)\right]\right\}, \qquad (9.5\text{-}37)$$

其中利用了公式

$$y\frac{dL_n(y)}{dy} = nL_n(y) - n^2 L_{n-1}(y)。$$

现在考察 $n=0$ 的情形，即零阶波型。此时，由于 $L_0(2ky)=1$，则(9.5－35)—(9.5－37)式变为

$$\left.\begin{aligned} H &= A_0 e^{-ky}, \\ X &= \frac{kgay}{\omega_0} A_0 e^{-ky}, \\ Y &= \frac{ikgay}{\omega_0} A_0 e^{-ky}。 \end{aligned}\right\} \qquad (9.5\text{-}38)$$

考虑因子 $e^{i(kx-\omega t)}$ 后，取其实部，有

$$\zeta = A_0 e^{-ky}\cos(kx-\omega t), \qquad (9.5\text{-}39)$$

$$U = \frac{kgay}{\omega_0} A_0 e^{-ky}\cos(kx-\omega t), \qquad (9.5\text{-}40)$$

$$V = -\frac{kgay}{\omega_0} A_0 e^{-ky}\sin(kx-\omega t)。 \qquad (9.5\text{-}41)$$

这就是零阶 Stokes 边缘波。由(9.5－33)式可得相应的频率

$$\omega_0 = \pm\sqrt{g\alpha k}, \tag{9.5-42}$$

式中的正负号分别对应于波动沿正 x 和负 x 方向传播。零阶 Stokes 边缘波波速为

$$c_0 = \pm\sqrt{g\alpha/k}。 \tag{9.5-43}$$

由零阶 Stokes 边缘波的表达式(9.5－39)－(9.5－41)可以看出，波动振幅于岸边($y=0$)处最大，随着离开岸边距离的增加而呈指数形式减少。当 $y=\lambda$(波长)时，$e^{-k\lambda}=e^{-2\pi}=0.001867$。可见，离岸一个波长处，边缘波的影响已可以忽略，这便是边缘波名称的由来。

如果考虑地转影响，可得 Reid 的边缘波。其中零阶波型

$$\zeta \sim e^{-ky}e^{i(kx-\omega t)} \tag{9.5-44}$$

式中的频率满足

$$\omega_0 = \begin{cases} \dfrac{-f}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{f^2 + 4g\alpha k} \\ \dfrac{-f}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{f^2 + 4g\alpha k}, \end{cases} \tag{9.5-45}$$

相应地，波速为

$$c_0 = \begin{cases} \dfrac{-f}{2k} + \sqrt{\left(\dfrac{f}{2k}\right)^2 + \dfrac{g\alpha}{k}} \\ \dfrac{-f}{2k} - \sqrt{\left(\dfrac{f}{2k}\right)^2 + \dfrac{g\alpha}{k}}。 \end{cases} \tag{9.5-46}$$

比较(9.5－43)式和(9.5－46)式，可以看出地转对波动性质的影响。由于地转效应，沿正、负 x 方向传播的边缘波具有不同的频率和波速，如果我们面海背陆，会发现向左(沿负 x 方向)传播的边缘波波速大于向右(沿正 x 方向)传播的边缘波波速。冯士筰导出的边缘波有较大的普遍性。如令 $f=0$ 和 $\bar{k}=0$($\bar{k}$ 为摩擦系量)，就代表 Srokes 边缘波，如令 $\bar{k}=0$，就相当于 Reid 边缘波。为了察看底摩

擦的影响，这里仅列出 $f=0$ 但 $\bar{k}\neq0$ 时的零阶（$n=0$）波型

$$\zeta \sim e^{-kr-\frac{\bar{k}}{2}t}e^{i(kz-\omega t)}, \tag{9.5-47}$$

其中波动频率满足

$$\omega_0=\begin{cases}\sqrt{gak-(\bar{k}/2)^2}\\ -\sqrt{gak-(\bar{k}/2)^2},\end{cases} \tag{9.5-48}$$

对应的波速

$$c_0=\begin{cases}\sqrt{\dfrac{ga}{k}-\left(\dfrac{\bar{k}}{2k}\right)^2}\\ -\sqrt{\dfrac{ga}{k}-\left(\dfrac{\bar{k}}{2k}\right)^2}\end{cases} \tag{9.5-49}$$

(9.5—47)式表示阻尼 Stokes 波，其振幅随时间逐渐衰减，直至消亡。由频率或波速表达式(9.5—48)或(9.5—49)可以看出，阻尼波动的存在必须满足条件

$$\bar{k}^2/4gak<1, \tag{9.5-50}$$

否则阻尼波动不存在。因为如果(9.5—50)式不能满足，ω_0 和 c_0 均变为虚数。另外，由(9.5—50)式还可以得知，当摩擦系量 $\bar{k}$ 和海底坡度 α 确定之后，阻尼 Stokes 波存在一个最小的波数 k_{min}，所存在的阻尼 Stokes 波均应满足 $k\geq k_{min}$。

附　　录

一、国际单位制(SI)的基本单位和辅助单位

量的名称	单位名称	单位符号	注
长度	米	m	单位符号用正体字。下同
质量	千克(公斤)	kg	圆括号内为同义语。下同
时间	秒	s	
电流	安[培]	A	方括号内的字一般可省略。下同
热力学温度	开[尔文]	K	
物质的量	摩[尔]	mol	
发光强度	坎[德拉]	cd	
平面角	弧度	rad	辅助单位
立体角	球面度	sr	辅助单位

(据 UNESCO,NO. 45, 1985)

二、SI 中具有专门名称的导出单位

量的名称	单位名称	单位符号	注
频率	赫[兹]	Hz	s^{-1}
力;重力	牛[顿]	N	$m \cdot kg/s^2$
压力;压强;应力	帕[斯卡]	Pa	N/m^2; $m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
能量;功;热	焦[耳]	J	$N \cdot m$; $m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
功率;辐射通量	瓦[特]	W	J/s; $m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
电荷量	库[仑]	C	$A \cdot s$
电位;电压;电动势	伏[特]	V	W/A; $m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
电 容	法[拉]	F	C/V; $m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
电 阻	欧[姆]	Ω	V/A; $m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
电 导	西[门子]	S	A/V; $m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
摄氏温度	摄氏度	℃	$t/℃ = T/K - 273.15$
光通量	流[明]	lm	$cd \cdot sr$
光照度	勒[克斯]	lx	lm/m^2; $m^{-2} \cdot cd \cdot sr$

(节选自 UNESCO,NO. 45,1985,及蔡铭生,1988)

三、由 SI 的基本单位、辅助单位及导出单位构成的组合形式或物理量

量的名称	常用符号	单位名称	单位符号	注
面积	A, S	平方米	m^2	量的符号用斜体，单
体积；容积	V	立方米	m^3	位符号用正体。（下同）
速度	v, u, v, w, c	米每秒	m/s	
加速度	a	米每二次方秒	m/s^2	
密度	ρ	千克每立方米	kg/m^3	
比容	v	立方米每千克	m^3/kg	
动力粘度	η, μ	帕[斯卡]秒	Pa·s	$m^{-1}\cdot kg\cdot s^{-1}$
运动粘度	ν	二次方米每秒	m^2/s	$m^2\cdot s^{-1}$
表面张力	σ, γ	牛[顿]每米	N/m	$kg\cdot s^{-2}$
热流率密度	q, φ	瓦[特]每平方米	W/m^2	$kg\cdot s^{-3}$
热容；熵	C	焦[耳]每开[尔文]	J/K	$m^2\cdot kg\cdot s^{-2}\cdot K^{-1}$
比热容；比熵	c, s	焦[耳]每千克开[尔文]	J/(kg·K)	$m^2\cdot s^{-2}\cdot K^{-1}$
热导系量	λ, κ	瓦[特]每米开[尔文]	W/(m·K)	$m\cdot kg\cdot s^{-3}\cdot K^{-1}$
动量	p	千克米每秒	N·s	$m\cdot kg\cdot s^{-1}$
力矩	M	牛[顿]米	N·m	$m^2\cdot kg\cdot s^{-2}$

（据 UNESCO，NO. 45，1985 及蔡铭生，1988，选录）

四、国家选定的(GB)非 SI 计量单位

量的名称	单位名称	单位符号	与 SI 单位的换算关系或说明
时间	分	min	1 min=60s
	[小]时	h	1 h=3600s
	天(日)	d	1 d=86400s (平均太阳日)
平面角	[角]秒	(″)	1″=(π/648000)rad,(π 为圆周率)
	[角]分	(′)	1′=(π/10800)rad
	度	(°)	1°=(π/180)rad
旋转速度	转每分	r/min	1r/min=(1/60)s^{-1}
长度	海里	n mile	1n mile=1852m (只用于航程)
速度	节	kn	1 kn=(1852/3600)m/s (只用于航行)
	厘米每分	cm/min	1 cm/min=(1/6)×10^{-3}m/s
	千米每小时	km/h	1 km/h=(1/36)×10m/s
质量	吨	t	1t=10^3kg
体积	升	L,(l)	1L=1dm^3=$10^{-3}m^3$
	毫升	mL,(ml)	1mL=$10^{-6}m^3$
密度	吨每立方米	t/m^3	1 t/m^3=10^3kg/m^3
	千克每升	kg/L	1 kg/L=10^3kg/m^3
	克每升	g/L	1 g/L=1kg/m^3
体积流量	立方米每天	m^3/d	1 m^3/d=(1/864)×$10^{-2}m^3$/s
	立方米每小时	m^3/h	1 m^3/h=(1/36)×$10^{-2}m^3$/s
	立方米每分	m^3/min	1 m^3/min=(1/60)m^3/s
功;能	瓦[特小]时	W·h	1 W·h=3.6×10^3J
	千瓦[特小]时	kW·h	1 kW·h=3.6×10^6J

(据綦铭生,1988,节录)

五、用于构成十进倍数和分数单位的词头

词头符号	词头名词	所表示的因数
M	兆	10^6
k	千	10^3
h	百	10^2
da	十	10^1
d	分	10^{-1}
c	厘	10^{-2}
m	毫	10^{-3}
μ	微	10^{-6}

(据蔡铭生,1988,节录)

六、某些非 SI 及非 GB 计量单位的换算

量的名称	单位名称	习用符号	与 SI 单位的换算因数	注
距离	埃	Å	10^{-12}m	
	micron	u	10^{-6}m	
	英尺	ft	0.3048m	
	英里		1.609344km	近似
	国际海里 ,浬,美海里		1.852km	
	市里		500m	
面积	公顷	ha	$10^{4}m^{2}$	
	平方市里		$2.5\times10^{5}m^{2}$	
时间	[平均历]月		2.628×10^{6}s	可与法定计量单位并用
	周(星期)		6.048×10^{5}s	
	[历]年	a	3.1536×10^{7}s	
速度	国际节		0.5144444444m/s	近似
	英里每小时	mile/h	0.44704m/s	
加速度	伽	Gal	$10^{-2}m/s^{2}$	
	标准重力加速度	g_n	$9.80665m/s^{2}$	g 为斜体字
质量	公吨	t	1000kg	
	[常衡]磅	lb	0.45359237kg	
体积流量	斯[韦尔德鲁普]	Sv	$10^{6}m^{3}/s$	
力	达因	dyn	10^{-5}N	
	千克力	kgf	9.80665N	
压力;压强;应力	大气压	atm	1.01325×10^{5}Pa	
	标准大气压	atm	1.01325×10^{5}Pa	
	巴	bar	10^{5}Pa	
	通用毫米汞柱	mmHg	133.322Pa	近似
动力粘度	千克每米秒	kg/(m·s)	1Pa·s	
运动粘度	斯[托克斯]	St	$10^{-4}m^{2}/s$	
表面张力	达因每厘米	dyn/cm	10^{-3}N/m	

(接下页)

功，能，热	平均卡	cal_{mean}	4.1897J	近似
	大卡（千卡）	kcal	4.1868×10^{3}J	
	尔格（达因厘米）	erg	10^{-7}J	
	牛[顿]米	N·m	1J	
	帕斯卡立方米	$Pa\cdot m^{3}$	1J	
功率	卡每小时	cal/h	1.163×10^{-3}W	
温度	华氏温度	°F	$\frac{5}{9}(\frac{t_F}{F}+459.67)$K， $\frac{5}{9}(\frac{t_F}{F}-32)$℃	
热容	卡每摄氏度	cal/℃	4.1868J/K	
	平均卡每摄氏度	cal_{mean}/℃	4.1897J/K	近似
比热容	千卡每千克摄氏度	kcal/(kg·℃)	4.1868×10^{3}J(kg·K)	
比潜热	千卡每千克	kcal/kg	4.1868×10^{3}J/kg	

（据蔡铭生，1988，节选）

七、海水中的声速计算

依 Chen 等(Chen and Millero ,1977),考虑到 SI 的规定,有:

$$c(S,\theta,p) = C_w(\theta,p) + A(\theta,p)S + B(\theta,p)S^{3/2} + D(\theta,p)S^2$$

(附 7 − 1)

$$\begin{aligned} C_w(\theta,p) = & C_{00} + C_{01}\theta + C_{02}\theta^2 + C_{03}\theta^3 + C_{04}\theta^4 + C_{05}\theta^5 \\ & + (C_{10} + C_{11}\theta + C_{12}\theta^2 + C_{13}\theta^3 + C_{14}\theta^4)(np) \\ & + (C_{20} + C_{21}\theta + C_{22}\theta^2 + C_{23}\theta^3 + C_{24}\theta^4)(np)^2 \\ & + (C_{30} + C_{31}\theta + C_{32}\theta^2)(np)^3 \end{aligned}$$

(附 7 − 2)

$C_{00} = 1402.388$, $C_{01} = 5.03711$, $C_{02} = -5.80852 \times 10^{-2}$,
$C_{03} = 3.3420 \times 10^{-4}$, $C_{04} = -1.47800 \times 10^{-6}$, $C_{05} = 3.1464 \times 10^{-9}$;
$C_{10} = 0.153563$, $C_{11} = 6.8982 \times 10^{-4}$, $C_{12} = -8.1788 \times 10^{-6}$,
$C_{13} = 1.3621 \times 10^{-7}$, $C_{14} = -6.1185 \times 10^{-10}$;
$C_{20} = 3.1260 \times 10^{-5}$, $C_{21} = -1.7107 \times 10^{-6}$, $C_{22} = 2.5974 \times 10^{-8}$,
$C_{23} = -2.5335 \times 10^{-10}$, $C_{24} = 1.0405 \times 10^{-12}$;
$C_{30} = -9.7729 \times 10^{-9}$, $C_{31} = 3.8504 \times 10^{-10}$,
$C_{32} = -2.3643 \times 10^{-12}$;

$$\begin{aligned} A(\theta,p) = & A_{00} + A_{01}\theta + A_{02}\theta^2 + A_{03}\theta^3 + A_{04}\theta^4 \\ & + (A_{10} + A_{11}\theta + A_{12}\theta^2 + A_{13}\theta^3 + A_{14}\theta^4)(np) \\ & + (A_{20} + A_{21}\theta + A_{22}\theta^2 + A_{23}\theta^3)(np)^2 \\ & + (A_{30} + A_{31}\theta + A_{32}\theta^2)(np)^3 \end{aligned}$$

(附 7 − 3)

$A_{00} = 1.389$, $A_{01} = -1.262 \times 10^{-2}$, $A_{02} = 7.164 \times 10^{-5}$,
$A_{03} = 2.006 \times 10^{-8}$, $A_{04} = -3.21 \times 10^{-8}$; $A_{10} = 9.4742 \times 10^{-5}$;
$A_{11} = -1.2580 \times 10^{-5}$, $A_{12} = -6.4885 \times 10^{-8}$, $A_{13} = 1.0507 \times 10^{-8}$,
$A_{14} = -2.0122 \times 10^{-10}$; $A_{20} = -3.9064 \times 10^{-7}$, $A_{21} = 9.1041 \times 10^{-9}$,
$A_{22} = -1.6002 \times 10^{-10}$, $A_{23} = 7.988 \times 10^{-12}$; $A_{30} = 1.100 \times 10^{-10}$
$A_{31} = 6.649 \times 10^{-12}$, $A_{32} = -3.389 \times 10^{-13}$;

$$B(\theta,p) = B_{00} + B_{01}\theta + (B_{10} + B_{11}\theta)(np) \qquad (附 7-4)$$

$B_{00} = -1.922 \times 10^{-2}$, $B_{01} = -4.42 \times 10^{-5}$, $B_{10} = 7.3637 \times 10^{-5}$, $B_{11} = 1.7945 \times 10^{-7}$,

$$D(\theta,p) = D_{00} + D_{10}(np) \qquad (附 7-5)$$

$D_{00} = 1.727 \times 10^{-3}$, $D_{10} = -7.9836 \times 10^{-6}$

式(附 7—1)至(附 7—5)中,水温用 θ_{68}(℃),盐度是实用盐标,压力 p 若用 Pa,则 $n=10^{-5}$(在 Chen and Millero 原文中 p 用巴,所以 $n=1$)。适用范围是:S:0～40;θ_{68}:0°～40℃;p:0～10^8Pa。计算声速的标准差为 0.19m/s,计算结果见附录八。

八、海水中的声速(c/m·s^{-1})

(据 UNESCO,1983)

S	p/10^7Pa \ θ_{68}/℃	0	10	20	30	40
25	0	1435.8	1477.7	1510.3	1535.2	1553.4
	1	1452.0	1494.1	1527.0	1552.1	1570.6
	2	1468.6	1510.7	1543.6	1569.0	1587.6
	3	1485.6	1527.5	1560.3	1585.7	1604.5
	4	1502.8	1544.3	1576.9	1602.4	1621.3
	5	1520.4	1561.3	1593.6	1619.0	1638.0
	6	1538.1	1578.4	1610.3	1635.5	1654.6
	7	1556.0	1595.6	1626.9	1651.9	1671.0
	8	1574.1	1612.8	1643.5	1668.2	1687.2
	9	1592.2	1630.1	1660.2	1684.5	1703.3
	10	1610.4	1647.4	1676.8	1700.6	1719.2
30	0	1442.5	1483.7	1515.9	1540.4	1558.3
	1	1458.8	1500.2	1532.5	1557.3	1575.4
	2	1475.4	1516.8	1549.2	1574.1	1592.3
	3	1492.4	1533.6	1565.8	1590.8	1609.2
	4	1509.7	1550.4	1582.4	1607.4	1626.0
	5	1527.2	1567.4	1599.1	1624.0	1642.7
	6	1544.9	1584.4	1615.7	1640.4	1659.2
	7	1562.7	1601.5	1632.3	1656.8	1675.6
	8	1580.7	1618.7	1648.9	1673.1	1691.8
	9	1598.8	1636.0	1665.5	1689.3	1707.8
	10	1616.8	1653.3	1682.1	1705.4	1723.5

(接下页)

S	θ_s °C / p 1 GPa	0	10	20	30	40
35	0	1449.1	1489.8	1521.5	1545.6	1563.2
	1	1465.5	1506.3	1538.1	1562.4	1580.2
	2	1482.3	1523.0	1554.7	1579.2	1597.1
	3	1499.3	1539.7	1571.3	1595.9	1613.9
	4	1516.5	1556.5	1587.9	1612.5	1630.7
	5	1534.0	1573.4	1604.5	1629.0	1647.3
	6	1551.6	1590.4	1621.0	1645.4	1663.8
	7	1569.1	1607.5	1637.6	166 .7	1680.1
	8	1587.2	1624.6	1654.1	1677.9	1696.2
	9	1605.2	1641.8	1670.6	1694.0	1712.2
	10	1623.2	1659.0	1687.2	1710.1	1727.8
40	0	1455.8	1495.9	1527.1	1550.8	1568.1
	1	1472.3	1512.[illegible]	1543.7	1567.6	1585.0
	2	1489.1	1529.1	1560.3	1584.3	1601.8
	3	1506.1	1545.8	1576.8	1600.9	1618.6
	4	1523.3	1562.5	1593.3	1617.5	1635.3
	5	1540.7	1579.4	1609.8	1633.9	1651.9
	6	1558.2	1596.3	1626.3	1650.2	1668.3
	7	1575.9	1613.3	1642.8	1666.5	1684.6
	8	1593.7	1630.3	1659.2	1682.6	1700.6
	9	1611.5	1647.1	1675.7	1698.7	1716.4
	10	1629.3	1664.[illegible]	1692.2	1711.6	1732.0

九、常用数据选录

地球

平均半径：6371km

赤道半径：6378km

两极半径：6357km

自转角速度：$\Omega=7.292\times10^{-5}s^{-1}$

面积：$5.10\times10^{14}m^2$

海洋面积：$3.62\times10^{14}m^2$

陆地面积：$1.48\times10^{14}m^2$

海冰面积：3 月：$1.75\times10^{13}m^2$

9 月：$2.84\times10^{13}m^2$

冰原和冰川面积：$1.62\times10^{13}m^2$

陆地平均高度：875m

海洋平均深度：3795m

海洋最大深度：11034m

太阳常数：$S_0=(1367\pm7)W/m^2$

斯忒藩－玻尔兹曼常数：

$$\sigma=(5.67051\pm0.00019)\times10^{-8}W/(m^2\cdot K^4)$$

地月平均距离：3.844×10^5km

地日平均距离：1.496×10^8km

地球质量与月球质量之比：81.3

太阳质量与地球质量之比：332958

（据：中国大百科全书，大气科学、海洋科学、水文科学卷，1987；A. E.吉尔，1988 等）

参考文献

[1] 中国大百科全书，大气科学、海洋科学、水文科学卷，北京·上海，中国大百科全书出版社，1987，923页。

[2] 中华人民共和国国家海洋局，《向阳红09》海洋调查船中太平洋西部调查报告，北京，海洋出版社，1981a，178页。

[3] 中华人民共和国国家海洋局，《实践》号海洋调查船中太平洋西部调查报告，北京，海洋出版社，1981b，92页。

[4] 中国科学院海洋研究所海洋气象组，西北太平洋海面热量平衡图集，北京，科学出版社，1979，158页。

[5] 文圣常、余宙文，海浪理论与计算原理，北京，科学出版社，1984，662页。

[6] 文圣常、张大错等，改进的理论风浪频谱，海洋学报，1990，12卷3期，271—283。

[7] 方国洪、王仁树，海湾的潮汐与潮流，海洋与湖沼，1966，8卷1期，60—77。

[8] 方国洪，潮汐分析和预报的准调和分潮方法，海洋科学集刊，1974，1976，1981，9卷，1—15，11卷，33—56，18卷，19—39。

[9] 方国洪、丁克俊，浅水港口潮汐预报的一个方法，海洋与湖沼，1981，12卷5期，383—390。

[10] 方国洪等，潮汐和潮流的分析和预报，北京，海洋出版社，1986，474页。

[11] 王从敏、翁学传，夏季台湾暖流水对长江冲淡水扩展方向的影响——Fuzzy关系方程的一种应用，海洋与湖沼论文集，1986，增刊，13—19。

[12] 王赐震、苏育嵩，一种有限区域海表温度预报模式，I．动力学部分，海洋与湖沼，1990，21卷5期，419—427。

[13] 王赐震、苏育嵩，一种有限区域海表温度预报模式，II．物理学部分，海洋与湖沼，1991，22卷1期，69—77。

[14] 毛汉礼、任允武、万国铭，应用$T-S$关系定量地分析浅海水团的初步研究，海洋与湖沼，1964，6卷1期，1—22。

[15] 甘子钧，一个新的海水状态方程，海洋科学，1981，2期，58—59。

[16] 甘子钧、毛汉礼，东海表层多年平均水温的奇异矢量分析和水系划分，海洋科学集刊，1984，NO.21，1—21。

[17] 卢中发，模糊目标函数聚类算法及其在东海黑潮水团分析中的应用，海洋学报，1989，11卷3期，265—274。

[18] 冯士笮，大洋风生—热盐环流模型，山东海洋学院学报，1978a，2期，1—11。

[19] 冯士筰，f—平面上的宽陆架诱导阻尼波，海洋学报，1979b，1卷2期，177—192。

[20] 冯士筰，风暴潮导论，北京，科学出版社，1982，241页。

[21] 叶安乐，杭州湾的潮汐—断面呈指数形式变化的解析模式，海洋湖沼通报，1983a，4期，9—16。

[22] 叶安乐，一种变截面河口中的潮汐响应，山东海洋学院学报，1983b，14卷2期，1—11。

[23] 叶安乐，潮流旋转中的倒转现象的探讨，山东海洋学院学报，1983c，13卷4期，6—16。

[24] 叶安乐，潮流椭圆长轴方向随深度变化的特征，海洋湖沼通报，1984a，2期，1—6。

[25] 叶安乐，分潮流最大流速发生时刻随深度变化的特征，海洋通报，1984b，3卷2期，1—8。

[26] 叶安乐、陈宗镛、于宜法，台湾海峡及其附近海域三维半日潮波的数值研究，海洋与湖沼，1985，16卷6期，439—450。

[27] 叶安乐、陈宗镛，半封闭矩形海域中海底地形对旋转潮波系统的影响，山东海洋学院学报，1987，17卷2期，1—7。

[28] 叶安乐，一种变截面河口中潮能的劈分与传输及其对杭州湾潮能估算的应用，海洋与湖沼，1989，20卷4期，322—329。

[29] 叶安乐，台湾海峡中的开尔文波，海洋通报，1990，9卷5期，1—5。

[30] 刘树勋、韩士鑫、魏永康，东海西北部水团分析及与渔场的关系，水产学报，1984，8卷2期，125—133。

[31] 乐肯堂，长江冲淡水路径的初步分析，I．模式。海洋与湖沼，1984，15卷2期，157—166。

[32] 邢成军，1973年夏季一个反气旋涡旋的初步分析，海洋与湖沼，1983，14卷3期，261—271。

[33] 孙文心、冯士筰等，超浅海风暴潮的数值模拟（I），海洋学报，1979，1卷2期，193—211。

[34] 孙湘平，东海黑潮表层流路（途径）的初步分析，黑潮调查研究论文集，北京，海洋出版社，1987，1—14。

[35] 孙湘平，黑潮第六次大弯曲，黄渤海海洋，1989，7卷4期，1 10。

[36] 孙湘平，黑潮第七次大弯曲，海洋通报，1990，9卷6期，1—7。

[37] 杜 勇、叶安乐、陈宗镛，一种变截面河口中潮位与潮流相位关系的探讨，

海洋学报，1989，11卷2期，136—142。

[38] 李凤岐、苏育嵩、喻祖祥，聚类分析在浅海变性水团分析中的试验，海洋学报，1983，5卷6期，675—686。

[39] 李凤岐、苏育嵩、王凤钦、喻祖祥，用模糊集合观点讨论水团的有关概念，海洋与湖沼，1986a，17卷2期，102—110。

[40] 李凤岐、苏育嵩、喻祖祥、王凤钦，从混合变性过程看水团隶属函数的建立，海洋学报，1986b，8卷2期，131—141。

[41] 李凤岐、苏育嵩，变性水团隶属函数的椭圆拟合法，山东海洋学院学报，1987a，17卷3期，13—22。

[42] 李凤岐、苏育嵩，海洋水团的Fisher型逐步判别预报，山东海洋学院学报，1987b，17卷4期，1—10。

[43] 李凤岐、苏育嵩，利用隶属度的离散值建立水团的隶属函数，海洋湖沼通报，1987c，4期，16—20。

[44] 李凤岐、苏育嵩、范立群，南海北部海区水团的判别分析，海洋湖沼通报，1987d，3期，15—20。

[45] 李凤岐、苏育嵩、范立群，模糊数学方法在南海北部海区水团分析中的应用，海洋学报，1987e，9卷6期，669—680。

[46] 李凤岐、王凤钦、苏育嵩等，黄、东海域春季水团的划分、判别与分析，青岛海洋大学学报，1989a，19卷1期(Ⅱ)，22—34。

[47] 李凤岐、王凤钦、苏育嵩等，黄、东海域春季水团的模糊分析，青岛海洋大学学报，1989b，19卷1期(Ⅰ)，35—46。

[48] 余宙文、甘子钧、叶安乐，等深度旋转均匀流体的线性波动Ⅰ，海洋学报，1985，7卷1期。

[49] 余宙文、甘子钧、叶安乐，等深度旋转均匀流体的线性波动Ⅱ，由静压假定滤掉的可能波动，海洋学报，1986，8卷4期，393—399。

[50] 李繁华等编著，山东近海水文状况，济南，山东省地图出版社，1989，221页。

[51] 苏育嵩，划分变性水团的温盐点聚对照法与东海西部海区变性水团的分析，海洋学报，1980，2卷1期，1—16。

[52] 苏育嵩、喻祖祥、李凤岐，聚类分析法在水团分析中的应用及黄、东海变性水团的分析，海洋与湖沼，1983，14卷1期，1—12。

[53] 沈育疆，东中国海潮汐数值计算，海洋文集，1981，4卷2期，36—44。

[54] 沈育疆、叶安乐，东中国海三维半日潮流场数值计算，海洋湖沼通报，1984，1期，1—10。

[55] 陈宗镛,长方形浅水海湾的一种潮波模式,海洋与湖沼,1965,7卷2期,85—93。
[56] 陈宗镛、周天华,海洋学概论,济南,山东科学技术出版社,1979,327页。
[57] 陈宗镛,潮汐学,北京,科学出版社,1980,301页。
[58] 邱道立、周诗赉、李昌明,应用聚类分析法划分黄海水团的初步研究,海洋学报,1984,6卷3期,281—292。
[59] 张 淮,海面动量、感热和水汽输送的动力学分析,海洋文集,1981,4卷1期,15—22。
[60] 张 淮、孙士才,海面有效辐射的数值分析,地球物理学报,1983,26卷5期,417—426。
[61] 张元奎、贺先明、高水福,北黄海及渤海变性水团的初步分析,海洋湖沼通报,1983,2期,19—26。
[62] 张正斌、刘莲生,海洋物理化学,北京,科学出版社,1989,811页。
[63] 张启龙、翁学传,应用对应分析法划分夏季东海水团的初步研究,海洋科学,1985,9卷2期。
[64] 苗育田、丁洪华,1984年夏季东海水团的聚类分析,海洋与湖沼,1987,18卷4期,388—395。
[65] 国家海洋局第一海洋研究所、第二海洋研究所,黑潮调查研究论文集,北京,海洋出版社,1987,345页。
[66] 杨殿荣主编,海洋学,北京,高等教育出版社,1986,360页。
[67] 杨殿荣、匡国瑞、张玉琳等,黄、东海夏季温跃层的诊断研究,海洋学报,1990,12卷1期,14—23。
[68] 徐 斯等编,海况分析(讲义),山东海洋学院油印,1963。
[69] 徐 斯、王锡候、王仁树,关于有界水团混合的讨论,海洋与湖沼,1965,7卷3期,278—294。
[70] 徐德伦等,海浪波面包线的计算及其分布函数的再推导,海洋学报,1989,11卷4期,411—416。
[71] 袁业立,黄海冷水团环流,I.冷水团中心部分的热结构和环流特征,海洋与湖沼,1979,10卷3期,187—199。
[72] 翁学传、王从敏,黄海冷水团边界及温、盐范围的确定,中国海洋湖沼学会水文气象学会学术会议(1980)论文集,科学出版社,1984,61—70。
[73] 翁学传、张以恳、王从敏、张启龙,黄海冷水团的变化特征,海洋与湖沼,1988,19卷4期,368—379。

[74] 戚建华、李凤岐、苏育嵩，水团多元隶属函数的拟合与应用，青岛海洋大学学报，1991，21卷1期，15—33。

[75] 景振华，海流原理，北京，科学出版社，1966，465页。

[76] 蒲书箴，世界大洋中的锋面，海洋湖沼通报，1985，第1期，61—75。

[77] 赫崇本、汪园祥、雷宗友、徐斯，黄海冷水团的形成及其性质的初步探讨，海洋与湖沼，1959，2卷1期，11—15。

[78] 赫崇本、管秉贤，南海中部NE—SW断面海水热盐结构以及海盆冷水来源的分析，海洋与湖沼，1984，15卷5期，411—418。

[79] 蔡铭生编，法定计量单位使用手册，北京，中国计量出版社，1988，240页.

[80] [日]友田好文、高野健三著，李若钝、井传才译，王赐震、李凤岐订，海洋，北京，海洋出版社，1990，340页。

[81] [苏]B. M. 卡缅科维奇、A. C. 莫宁主编，沈积均、杜碧兰、杨华庭等译，施正铿审校，海洋水文物理学，北京，海洋出版社，1983，592页。

[82] [英]A. E. 吉尔著，张立政、乐肯堂、赵徐懿译，乐肯堂校，大气—海洋动力学，北京，海洋出版社，1988，525页。

[83] [苏]A. И. 乌格留莫夫著，王宗山、徐伯昌译，翁学传校，海洋热状况和长期天气预报，北京，海洋出版社，1984，214页。

[84] [苏]Л. C. 利涅依金、B. C. 马杰里奇著，乐肯堂译，海洋温跃层理论，北京，科学出版社，1989，322页。

[85] N. C. 杰尔洛夫著，赵俊生等译，海洋光学，北京，科学出版社，1981，267页。

[86] S. 庞德、C. L. 皮卡德著，伊增欣、李茂和译，余宙文校，动力海洋学导论，北京，海洋出版社，1990，448页。

[87] [苏]M. Г. 格拉哥列娃、Л. И. 斯克里普图诺娃著，王宗山、徐伯昌译，翁学传校，海洋水温预报，北京，海洋出版社，1982，235页。

[88] [日]高野健三、川合英夫著，涂仁亮、薛金声、李玉瑛等译，王德文、刘玉林校，物理海洋学，第2卷，北京，科学出版社，1985，345页。

[89] M. J. 鲍曼、W. E. 埃萨阿斯著，许建平、刘仁清译，侍茂崇校，沿岸过程中的海洋锋，北京，海洋出版社，1986，174页。

[90] [美]J. A. 瑙斯著，潘学良、吴恒浒译，侍茂崇校，物理海洋学导论，北京，科学出版社，1983，230页。

[91] [日]增泽让太郎等著，鲁守范译，刘玉林、王德文校，物理海洋学，第4卷，北京，科学出版社，1985，346页。

[92] 小野新頭，海水の熱的性質の研究，Ⅳ，海水の熱的な諸定数，低温科学，物

理編,1968,26,329—349。

[93] 佐佐木忠義監修,海洋開発,第2巻,東京,海洋開発せこク -出版局,1971,274PP。

[94] 富永政英,海洋波動,共立出版株式會社,1976,591PP。

[95] Basinski T. and St. Massel,The coastal research station at Lubiatowo—Investiga tion,New methods and equipment, *Inter Ocean'* 73,1973,Bd. 2,1078—1086.

[96] Bathen K. H. ,Heat storage and advection in the North Pacific Ocean, *J. Geophys. Res.* ,1971,Vol. 76 (3),676—687.

[97] Bernstein R. L. ,W. B. White ,Time and length scales of baroclinc eddies in the Central North Pacific Ocean, *J. Phys. Oceanogr.* ,1974, Vol. 4(4),613—625.

[98] Bigg P. H. ,Density of water in SI units over the range 0—40℃ ,*British J. of Applied Physics*,1967,18,521—524.

[99] Bowen J. S. ,The ration of heat losses by conduction and by evaporation from any water surface, *Phys. Rev.* ,1926,27.

[100] Bradshaw A. L. and K. E. Schleicher, Electrical conductivity of seawater, in UN ESCO *Tech. pap. in mar. sci* , No. 37,1981,50 62.

[101] Brettschneider G. , Hydrodynamical—numerical investigation of the tides in the North Sea, *Proceeding of the Symposium on mathematical—Hydrodynamical investigation of Physical Processes in the Sea*, Hamburg, 1968.

[102] Bryan K. and L. J. Lewis, A water mass model of the world Ocean, *J. Geophys. Res.* , 1979, Vol. 84 (C5),2503—2517.

[103] Bryden H. L. ,New polynomials for themal expansion, adiabatic temperature gradient and potential temperature of sea water, *Deep—Sea Res.* ,1973, Vol. 20 (4),401—408

[104] Budyko M. I. , Climate and life,Academic Press,New York,1974.

[105] Caldwell D. R. , S. A. Eide, Adiabatic temperature gradient and potential tem perature correction in pure and salinity water: an experimental determination. *Deep—Sea Res.* , 1980,Vol. 27(1A),71—78.

[106] Callahan J. E. , Velocity structure and flux of the Antarctic Circumpolar Current south of Australia, *J. Geophys. Res.* ,1971, Vol. 76(24),5859—5864.

[107] Callahan J. E. , The structure and circulation of deep water in the Antarctic, *Deep—Sea Res.* , 1972, Vol. 19(8),563—575.

[108] Chakrabarti S. K. and R. P. Cooley, Statistical distribution of periods and

heights of ocean waves, *J. Geophys. Res.*, 1977, Vol. 82(9), 1363—1368.

[109] Charneg J. G., The generation of ocean currents by wind, *Jour. Mar. Res.*, 1955, Vol. 14(4), 477—498.

[110] Chen C. T., F. J. Millero, The specific volume of seawater at high pressure. *Deep—Sea Res.*, 1976, Vol. 23(7), 595—612.

[111] Chen C. T. and F. J. Millero, Precise equation of state for seawater covering only the oceanic range of salinity temperature and pressue, *Deep—Sea Res.*, 1977a, Vol. 24(4), 365—369.

[112] Chen C. T., F. J. Millero, Speed of sound in seawater at high pressures, *J. Acoust. Soc. of Amer.*, 1977b, Vol. 62(5), 1129—1135.

[113] Cheney R. E. and D. E. Winfrey, Distributions and Classification of ocean fronts, NAVOCEANO *Technical note* 3700—56—76, 1976, 1—21.

[114] Clarke R. A., Jean—Claude Gascard, The formation of Labrador Sea Water, Part 1: Large—Scale Processes, *J. Phys. Oceanogr.*, 1983, Vol. 13(10), 1764-1778.

[115] Cochrane J. D., The frequency distribution of water characteristics in the Pacific Ocean, *Deep—Sea Res.*, 1958, Vol. 5(2), 111—127.

[116] Cote L. J. *et al.*, The directional spectrum of a wind generated sea as determined from data obtained by the stereo wave observation project, *Meteor. Papers*, N. Y. U. *Coll. of Eng.* 1960, Vol. 2(6), 88.

[117] Cox R. A., F. Culkin et al, The electrical conductivity/chlorinity relationship in natural sea water, *Deep—Sea Res.*, 1967, Vol. 14(2), 203—220.

[118] Cox M. D., An idealized model of the World Ocean, Part I: The global—scale water masses, *J. Phys. Oceanogr.*, 1989, Vol. 19(11), 1730—1752.

[119] Crease J., The specific volume of sea water under pressure as determined by recent measurement of sound velocity, *Deep—Sea Res.*, 1962, vol. 9, 209—213.

[120] Darwin G. H., Report of a committee for the harmonic analysis of tidal observations, *Brit. Ass. for Adv. Sci.*, 1883, 49—118.

[121] Dauphinee T. M., J. Ancsin, H. P. Klein and M. J. Phillips, The electrical conductivity of weight diluted and concentrated standard seawater as a function of salinity and temperature, in UNESCO *Tech. pap. in mar. sci.*, No. 37, 1981, 28—41.

[122] Defant A., Das kaltwasserauftriebsyegbiret vor der kuste sudwestafrikas,

Stuttgart, Landerkundliche Studien (Festshrift W. Krebs),1936.

[123] Defant A., Theoretische uberlegungen zum phanomen des windstaus und des Auftriebs an ozeanischen Kusten, *Dtsch. Hydrogr. Z.*, 1952, Bd. 5, Teil2, Liefs3.

[124] Defant A. ,Physical Oceanography, Vol. Ⅰ, Ⅱ, Pergamon Press, 1961.

[125] Dietrich G. ,K. Kalle, W. Krauss, G. Siedler, General Oceanography, A Wiley —Interscience Publication, New York · Chichester · Brisbane · Toronto, 1980, 2ed. 626PP.

[126] Doherty B. T. ,D. R. Kester, Freezing point of seawater ,*J. ar. Res.*, 1974, Vol. 32(2), 285—300.

[127] Doodson A. T. ,The analysis of tidal observation, *Phil. Trans. Roy. soc.*, London, 1928, A652, 223—279.

[128] Doodson A. T. ,Tides in oceans bounded by meridians, Ⅰ. Ocean bounded by complete meridean; diurnal tides, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, 1936, A235, 290—333.

[129] Doodson A. T., Tides in oceans bounded by merideans, Ⅱ. Ocen bounded by complete meridian; semidiurnal tides, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, 1939. A237, 311—373.

[130] Doodson A. T. ,Tides in oceans bounded by meridians, Ⅳ. Series solutions in terms of angular width of ocean; semidiurnal tides in narrow oceans. Ⅴ. Solutions by use of finite differences; semidiurnal tides, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, London, 1940, A238, 477—512.

[131] Doodson A. T., The analysis of tidal observation for 29 days, *Int. Hydrogr. Rev.*, Vol. 31(1), 63—91.

[132] Dronkers J. J. ,Computations in rivers and coastal waters, Amsterdam, North—Holland Publishing Compang. , 1964, 518 pp.

[133] Ebbesmeyer C. C. and E. J. Lindstrom, Structure and origin of 18℃ water observed during the POLYMODE local dynamics experiment, *J. Phys. Oceanogr.*, 1986, Vol. 16(3), 443—453.

[134] Ekman V. W. ,Beitrage zur Theorie der Meeresst—romungen, *Ann. d. Hydro. u. Mar. Meteoro.*, 1906, JHRG, 34.

[135] Fang G. (方国洪) and T. Ichiye, On the vertical structure of tidal currents in a homogeneous sea, *Geophys. J. R. Astr. Soc.*, 1983, Vol. 73, 65—82.

[136] Fofonoff N. P. , Computation of potential temperature of seawater for an arbitrary reference, pressure, *Deep—Sea Res.* , 1977, Vol. 24 (5) 489—491.

[137] Freeman J. C. , L. Bear & G. H. Jung, The bathystrophic stom tide, *J. Mar. Res.* , 1957, Vol. 16(1), 12—22.

[138] Glasby G. P. , (ed.), Antarctic sector of the Pacific. Elsevier Oceanography series, Amsterdam—Oxford—NewYork—Tokyo, 1990, 396pp.

[139] Godin G. , The Analysis of tides, University of Toronto Press, 1972, 264pp.

[140] Goldsbrough G. R. The dynamical theory of the dides in a polar basin, *Proc. London Math. Soc.* , 1913, Vol. 14, 31—66.

[141] Goldsbrough G. R. The dynamical theory of the tides in a zonal ocean, *Proc. London Math. Soc.* , 1914, Vol. 14, 207—229.

[142] Goldsbrough G. R. , The tides in oceans on a rotating globe, I. *Proc. Roy. Soc.* , London, 1927, A117, 692—718.

[143] Goldsbrough G. R. and D. C. Colborne, The tides in oceans on a rotating globe. Ⅱ , *Proc. Roy. Soc.* , London, 1929, A126, 1—15.

[144] Goldsbrough G. R. , The tides in oceans on a rotating globe, V, *Proc. Roy. Soc.* , London, 1949, A200, 191—200.

[145] Gordon A. L. , Structure of Antarctic waters between 20°W and 140°W, *Am. Geogr. Soc.* , *Antarctic Map Folio Ser.* , 1967, Folio 6.

[146] Grasshoff K. , On the possible replacement of Knudsen—Ekman's equation of state of seawater, *Deep—Sea Res.* , 1976, Vol. 23(11), 1079—1081.

[147] Greenspan H. P. , The generation of edge waves by moving pressure distribution, *J. Fluid Mech.* , 1956, Vol. 1, 574—592.

[148] Gregg M. C. , Oceanic fine microstructure, *Rev. Geophys. and Space Phys.* , 1975, Vol. 13(3), 586—593.

[149] Gustafson T. and B. kullenberg, Untersuchungen von Tragheitsstromungen in der Ostsee, Sv. Hydr. —Biol. komm. skr. 1936, *NySer. Hydro.* , No. 13.

[150] Halpern D. , Observation of the deepening of the mind—mixed layer in the Northeast Pacific Ocean, *J. Phys. Oceanogr.* , 1974, Vol. 4(3), 454—466.

[151] Hamon B. , The East Australian Current, 1960—1964, *Deep—Sea Res.* , 1965, 12 (6), 899—921.

[152] Hasselmann K. *et al.* , Measurements of wind wave growth and swell decay during the Joint North Sea Wave Project (JONSWAP), Erganzungsheft *Zeit. Hy*

dr. Zeit., 1976,(12), 95 pp.

[153] Hayward A. T. J., Comressibility equation for liquids: a comparative study, *British Journal of Appliedphysics*, 1967, 18, 965—977.

[154] Hendshott M. C., The effects of solid—earth deformation on global ocean tides, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 1972, Vol. 29, 389--403.

[155] Hendshott M. C., Ocean tides, *Trans. Amer. Geophys. Union*, 1973, Vol. 54, 76—86.

[156] Hidaka K., A contribution to the theory of upwelling and coastal currents, *Trans. Amer. Geophys. Un.*, 1954, Vol. 35(3).

[157] Hidaka K., On the equatorial upwelling, *Geophys. Notes*, 1960, Vol. 13(1). Contrib. 5.

[158] Hough S. S., On the application of harmonic analysis to the dynamical theory of the tides, *Phil. Roy. Soc. London*, 1897, 1899, A189, 201—257, A191, 139—185.

[159] Hufford G. L. and J. M. Seabrooke, Oceanography of the Weddell Sea in 1969, *U. S. C. G. Oceanogr. Rep.*, 1970, CG373—31.

[160] Hughes R. L., The hydraulics of local separation in a coastal current with appilcation to the Kuroshio meander, *J. Phys. Oceanogr.* 1989, Vol. 19(12), 1809—1820.

[161] Imawaki S. and K. Takano, Low—frequency eddy kinetic energy spectrun in the deep western North Pacific, *Science*, 1982, 216, 1407—1408.

[162] Imawaki S., Vorticity balance for mid—ocean mesoscale eddies at an abyssal deepth, *Nature*. 1983.

[163] IUPAC, Recommended reference materials for realization of physicochemical properties, Section: density, *Pure and Applied Chem.*, 1976, Vol. 45, 1—9.

[164] Ivanoff A. Oceanic absoption of solar energy, in *modelling and prediction of the upper layers of the ocean*, ed. by E. B. Kraus, Pergamon Press, New York, 1977, 47—71.

[165] Jerlov N. G., Marine optics, Elsevier Scientific publ., Amsterdam, 1976.

[166] Kang Y. Q., An analytical model of tidal waves in the Yellow Sea, *Journal of Marine Research*, 1984, Vol. 42(3), 473—485.

[167] Kawai H., Hydrography of the Kuroshio extension, In: *Kuroshio physical aspects of the Japan Current*. Stommel H., K. Yoshida (eds), Univ. Washington Press,

1972.

[168] Kelvin (See Thomson W.).

[169]Killworth P. D., A two—dimensional model of the formation of Antarctic Bottom Water, *Deep—Sea Res.*, 1973, Vol. 20(11), 941—971.

[170] Kinsman B., Wind waves, Englewood Cliffs, New Jersey, Prentice — Hall, Ins., 1965, 581 pp.

[171] Krauss W., Dynamics of the Homogeneous and the Quasihomogeneous Ocean Berlin, Stuttgar, Gebru Der Borntraeger, 1973, 302 pp.

[172]Laplace P. S., Recherches Sur plusieurs points du systeme du monde, *Memoires de l'Academie royale des Sciences*, 1775, 1776, Vol. 88, 75 — 182, Vol, 89, 177 — 267.

[173] Lewis E. L., Practical Salinity Scale 1978 and its antecedents, IEEE *J. of Ocean Eng.*, 1980, Vol. OE—5, 3—8.

[174] Lewis E. L., R. G. Perkin, The Practical Salinity Scale 1978: conversion of existing data, *Deep—Sea Res.*, 1981, Vol. 28(4A), 307—328.

[175] Li Hongha., J. J. M van Haren and H. M. van Aken, Cluster analysis as a method to discriminate water masses in shelf seas, International Council for the Exploration of the Sea. ICES C. M. 1989/C: 3, Hydrography Committee.

[176] Longuet—Higgins M. S., On the statistical distribution of the height of sea waves, *J. Mar. Res.*, 1952, Vol. 11(3), 245—266.

[177] Longuet—Higgins M. S., The statistical analysis of a random moving surface, *Phil. Trans. Roy. Soc.* A, 1957, Vol. 249(966), 321—387.

[178] Longuet—Higgins M. S., On the distribution of the heights of sea waves: some effects of nonlinearity and finite band width, *J. Geophys. Res.*, 1980, Vol. 85 (3), 481—504.

[179] Luther D. S. & C. Wunch, Tidal Charts of the Central Pacific Ocean, *J. Phys. Oceanogr.*, 1975, Vol. 5, 222—230.

[180] Lvovitch M. J., World water balance, Symp. on world water balance, 2, UNESCO—IASH., Publ. 93, Paris, 1970.

[181] Mamayev O. I., Temperature—salinity analysis of world Ocean waters, Elsevier Scientific Publishing Company, INC., New York, 1975, 374pp.

[182] Masuzawa J., An example of cold eddies south of the Kuroshio, *Res. Oceanogr. Works Japan*, 1957, 3N1, 1—7.